

组合问题

一、组合定义与组合数计算

1. 组合的定义

一般地，从 n 个不同元素中，任意取出 $m(m \leq n)$ 个元素并成一组，叫做从 n 个不同元素中任取 m 个元素的一个**组合**。

【补充说明】

- (1) 具体来说，组合的要求是 n 个元素不同，被取出的 m 个元素也不同，而且取出方式为不放回取出；
- (2) 组合取出的 m 个元素不讲求顺序，无序性是组合的本质。例如，从 $\{a, b, c\}$ 中取出两个元素形成两个序列 ab 与 ba ，它们属于两种排列，但却是一种组合。

2. 组合数及其运算

组合数

从 n 个不同元素中，任意取出 $m(m \leq n)$ 个元素的所有组合的个数，叫做从 n 个不同元素中，任意取出 m 个元素的**组合数**，用符号 C_n^m 表示。

组合数公式

$$C_n^m = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!}, \quad m \in \mathbf{N}, n \in \mathbf{N}_+, \text{ 并且 } m \leq n;$$
特别地，当 $m=0$ 时，有 $C_n^0=1$ 。

例1

1. 完成下列问题

- (1) 计算： $C_{10}^4 - C_7^3 \cdot A_3^3$ 。
- (2) 求值： $C_{3n}^{38-n} + C_{21+n}^{3n}$ 。
- (3) 证明： $mC_n^m = nC_{n-1}^{m-1}$ 。

练1

2. 若 $C_n^2 A_2^2 = 42$ ，则 $\frac{n!}{3!(n-3)!}$ 的值为()。

A. 6

B. 7

C. 35

D. 20

3. 方程 $C_{28}^x = C_{28}^{3x-8}$ 的解为 _____ .

3. 组合数的两个性质

性质一

$$C_n^m = C_n^{n-m} \text{ (证明留给读者) .}$$

性质二

$$C_{n+1}^m = C_n^m + C_n^{m-1} \text{ (两种证明方法, 具体留给读者) .}$$

【补充说明】

(1) 性质一反映了组合数的对称性: 当 $m > \frac{n}{2}$ 时, 不直接计算 C_n^m 而改为计算 C_n^{n-m} , 这样起到了简化运算的效果;

(2) 要注意性质二的灵活运用: 顺用可以将一个组合数拆成两个, 在进行化简时此种手段可以产生抵消的效果; 逆用可以将两个组合数合并为一个, 求值时可以循环使用此种手段进行并项.

例2

4. 若 $C_{n+1}^7 - C_n^7 = C_n^8$, 则 n 等于 ().

A. 12

B. 13

C. 14

D. 15

5. $C_5^5 + C_6^5 + C_7^5 + C_8^5 = ()$.

A. 28

B. 126

C. 84

D. 70

练2

6. 若 $C_{20}^{2n+6} = C_{20}^{n+2}$, ($n \in \mathbf{N}$), 则 $n =$ _____ .

7. 证明: $C_k^0 + C_{k+1}^1 + C_{k+2}^2 + \cdots + C_n^{n-k} = C_{n+1}^{n-k}$.

二、 常见组合问题

1. 直接法

例1

8. 从10名大学毕业生中选3人担任村长助理, 则甲、乙至少有1人入选, 而丙没有入选的不同选法的种数为 ().

A. 28种

B. 49种

C. 56种

D. 85种

9. 在上海高考改革方案中，要求每位高中生必须在物理、化学、生物、政治、历史、地理6门学科（3门理科学科，3门文科学科）中选择3门学科参加等级考试，小丁同学理科成绩较好，决定至少选择两门理科学科，那么小丁同学的选科方案有 _____ 种。

练1

10. 从5名男生和4名女生中选出4人去参加座谈会，问：
- （1）如果4人中男生和女生各选2人，有多少种选法？
 - （2）如果男生中的甲与女生中的乙至少要有1人在内，有多少种选法？
 - （3）如果4人中必须既有男生又有女生，有多少种选法？
11. 在产品质量检验时，常从产品中抽出一部分进行检查，现在从98件正品和2件次品共100件产品中，任意抽出3件抽查。
- （1）抽出的3件中至少有两件是正品的抽法有多少种？
 - （2）抽出的3件中恰好有一件是次品，再把抽出的3件产品放在展台上，排成一排进行对比展览，共有多少种不同的排法？

2. 分组分配

分堆问题的特点是堆与堆之间的区别仅仅是元素个数，而不强调元素本身，因此若出现了若干组元素个数相同的情况，在采取分步乘法计数原理处理问题之后还需要做除序处理。

（1）非均匀分堆

【模型】 n 个不同元素分成 m 组，每组元素数目均不相等，且不考虑各组间的顺序，求其分法种数。

【实例】10本书分成2, 3, 5三堆，其分法种数为 $C_{10}^2 \cdot C_8^3 \cdot C_5^5 = 2520$ 。

（2）均匀分堆

【模型】 n 个不同元素分成 m 组，其中 r 组元素个数相同且不考虑各组之间的顺序，求其分法种数。

【实例】10本书分成2, 4, 4三堆，其分法种数为 $\frac{C_{10}^2 \cdot C_8^4 \cdot C_4^4}{A_2^2} = 1575$ 。

例2

12. 有6本不同的书
- （1）甲、乙、丙3人每人2本，有多少种不同的分法？
 - （2）分成3堆，每堆2本，有多少种不同的分堆方法？
 - （3）分成3堆，一堆1本，一堆2本，一堆3本，有多少种不同的分堆方法？
 - （4）分给甲、乙、丙3人，一人1本，一人2本，一人3本，有多少不同的分配方法？
 - （5）分给甲1本、乙1本、丙4本，有多少种不同的分配方法？
 - （6）分成3堆，有2堆各一本，另一堆4本，有多少种不同的分堆方法？

(7) 摆在3层书架上, 每层2本, 有多少种不同的摆法?

(8) 假设6本书相同, 分给甲、乙、丙三人, 每人至少一本, 则有多少种不同的分法?

练2

13. 某年级有6个班, 派3名语文教师任教, 每个教师教2个班, 则不同的任课方法种数为().

- A. $C_6^2 \cdot C_4^2 \cdot C_2^2$
B. $A_6^2 \cdot A_4^2 \cdot A_2^2$
C. $C_6^2 \cdot C_4^2 \cdot C_2^2 \cdot C_3^3$
D. $\frac{A_6^2 \cdot C_4^2 \cdot C_2^2}{A_3^3}$

14. 将甲, 乙等4位同学分别保送到北京大学, 上海交通大学, 中山大学这3所大学就读, 则每所大学至少保送1人的不同保送方法数共有().

- A. 36种 B. 72种 C. 144种 D. 288种

15. 我市拟向新疆哈密地区的三所中学派出5名教师支教, 要求每所中学至少派遣一名教师, 则不同的派出方法有().

- A. 300种 B. 150种 C. 120种 D. 90种

3. 隔板法

n 个相同元素, 分成 $m(m \leq n)$ 组, 每组至少一个的分组问题——把 n 个元素排成一排, 从 $n-1$ 个空中选 $m-1$ 个空, 各插一个隔板, 有 C_{n-1}^{m-1} .

例3

16. 有10个运动员名额, 分给7个班, 每班至少一个, 有多少种分配方案?

17. 16个球, 球和球之间没有任何区别:

- (1) 把16个球分别放到编号为1, 2, 3的三个盒子当中, 要求每个盒子都必须得有球, 则不同的放球方式有多少种?
(2) 把16个球分别放到编号为1, 2, 3的三个盒子当中, 要求1号盒子至少得有一个球, 2号盒子至少得有两个球, 3号盒子至少得有三个球, 则不同的放球方式有多少种?
(3) 把16个球分别放到编号为1, 2, 3的三个盒子当中, 盒子可以空着不放球, 则不同的放球方式有多少种?

练3

18. 要将5个小球放入3个盒子中:

(1) 若小球完全相同, 盒子不同, 每个盒子中都必须放入小球, 有多少种不同的放入方法?

(2) 若球完全相同, 盒子不同, 任意放入, 有多少种不同的放入方法?

19. 将15个相同的小球, 分给3个人, 每人至少分2个, 则有 _____ 种不同的分法.

4. 排除法

例4

20. 在100件产品中有6件次品, 现从中任取3件产品, 至少取到1件次品的不同取法的种数是().

A. $C_6^1 C_{94}^2$

B. $C_6^1 C_{99}^2$

C. $C_{100}^3 - C_{94}^3$

D. $A_{100}^3 - C_{94}^3$

21. 在报名的3名男教师和6名女教师中, 选取5人参加义务献血, 要求男、女教师都有, 则不同的选取方式的种数为().

A. 60

B. 75

C. 105

D. 120

练4

22. 某班级要从4名男生、2名女生中选派4人参加某次社区服务, 如果要求至少有1名女生, 那么不同的选派方案种数为().

A. 14

B. 24

C. 28

D. 48

23. 在小语种提前招生考试中, 某学校获得5个推荐名额, 其中俄语2名, 日语2名, 西班牙语1名, 并且日语和俄语都要求必须有男生参加, 学校通过选锁定下3男2女共5个推荐对象, 则不同的推荐方法的种数为().

A. 20

B. 22

C. 24

D. 36

24. 在12件产品中, 有10件正品, 2件次品, 从这12件产品中任意抽取3件.

(1) 共有多少种不同的抽法?

(2) 抽出的3件中恰有1件次品的抽法有多少种?

(3) 抽出的3件中至少有1件次品的抽法有多少种?

5. 综合问题

例5

25. 一次演出, 原计划要排4个节目, 因临时有变化, 拟再添加2个小品节目, 若保持原有4个节目的相对顺序不变, 则这6个节目的不同的排列方法有().

A. 30种

B. 25种

C. 24种

D. 20种

 练5

26. 现有5本相同的《数学家的眼光》和3本相同的《数学的神韵》要将它们排在同一层书架上，并且3本相同的《数学的神韵》不能放在一起，则不同的放法种数为（ ）.
- A. 20 B. 120 C. 2 400 D. 14 400
27. 某城市新修建的一条道路上有11盏路灯，为了节省用电而又不能影响正常的照明，可以熄灭其中的4盏灯，但两端的灯不能熄灭，也不能熄灭相邻的两盏灯，则熄灯的方法有（ ）.
- A. C_8^4 B. C_7^4
C. C_6^4 D. 以上答案都不对