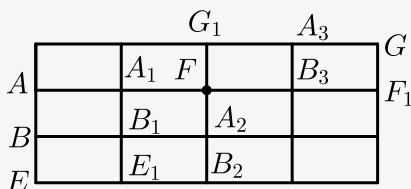


【答案】B

【解析】方法一：除已知标记的 E, F, G 三点外，另记 $A, B, A_1, B_1, E, A_2, B_2, G_1, A_3, B_3, F_1$ ，如图所示。



若总体路线最短，则需 E 到 F 最短，并且 F 到 G 也最短。 E 到 F 最短，可由 $E \rightarrow B \rightarrow F$ 或 $E \rightarrow E_1 \rightarrow F$ 。显然，由 $E \rightarrow B \rightarrow F$ 最短有3条（ $E \rightarrow B \rightarrow A \rightarrow A_1 \rightarrow F$ 或 $E \rightarrow B \rightarrow B_1 \rightarrow A_1 \rightarrow F$ 或 $E \rightarrow B \rightarrow B_1 \rightarrow A_2 \rightarrow F$ ）。由 $E \rightarrow E_1 \rightarrow F$ 最短有3条（ $E \rightarrow E_1 \rightarrow B_1 \rightarrow A_1 \rightarrow F$ 或 $E \rightarrow E_1 \rightarrow B_1 \rightarrow A_2 \rightarrow F$ 或 $E \rightarrow E_1 \rightarrow B_2 \rightarrow A_2 \rightarrow F$ ），由分类加法计数原理可知， $E \rightarrow F$ 共有6条最短路径。而 $F \rightarrow G$ 有 $F \rightarrow G_1 \rightarrow A_3 \rightarrow G$ ， $F \rightarrow B_3 \rightarrow A_3 \rightarrow G$ ， $F \rightarrow B_3 \rightarrow F_1 \rightarrow G$ 共3条最短路径。由分步乘法计数原理可知，共有 $6 \times 3 = 18$ 条最短路径。

故选B。

方法二：从 E 到 F ，每条东西向的街道被分成2段，每条南北向的街道被分成2段，从 E 到 F 最短的走法，无论怎样走，一定包括4段，其中2段方向相同，另2段方向相同，每种最短走法，即是从4段中选出2段走东向的，选出2段走北向的，故共有 $C_4^2 C_2^2 = 6$ 种走法；同理从 F 到 G ，最短的走法，有 $C_3^1 C_2^2 = 3$ 种走法； $\therefore$ 小明到老年公寓可以选择的最短路径条数为 $6 \times 3 = 18$ 种走法，故B正确，ACD错误。故选B。

【标注】【知识点】分步乘法计数原理

【素养】直观想象；逻辑推理；数学运算

二、排列定义与排列数计算

4. 已知 $A_n^2 = 7A_{n-4}^2$ ，则 n 的值为（ ）。

A. 7

B. 8

C. 9

D. 10

【答案】A

【解析】根据排列数的公式，得；

$$\begin{cases} n-4 \geq 2 \\ n \geq 2 \end{cases},$$

$$n(n-1) = 7(n-4)(n-5),$$

解得 $n = 7$, 或 $n = \frac{10}{3}$ (不合题意, 应舍去);

$\therefore n$ 得值是 7.

故选 A.

【标注】【知识点】排列

5. $100 \times 99 \times 98 \times \cdots \times 95$ 等于 ().

A. A_{100}^4

B. A_{100}^5

C. A_{100}^6

D. A_{100}^7

【答案】 C

【解析】 $A_{100}^m = 100 \times 99 \times 98 \times \cdots \times (100 - m + 1),$

$\therefore 100 - m + 1 = 95$, 得 $m = 6$.

故选 C.

【标注】【知识点】排列

三、 常见排列问题

6. 3名男生, 4名女生, 按照不同的要求排队, 求不同的排队方案的方法种数.

- (1) 全体站成一排, 其中甲只能在中间或两端.
- (2) 全体站成一排, 其中甲、乙必须在两端;
- (3) 全体站成一排, 其中甲不在最左端, 乙不在最右端;
- (4) 全体站成一排, 男、女各站在一起;
- (5) 全体站成一排, 男生必须排在一起;
- (6) 全体站成一排, 男生不能排在一起;
- (7) 全体站成一排, 男、女生各不相邻.
- (8) 全体站成一排. 甲、乙中间必须有 2 人.
- (9) 全体站成一排, 甲必须在乙的前面 (不一定相邻);
- (10) 全体站成一排, 甲、乙、丙三人自左向右顺序不变 (不一定相邻);
- (11) 排成前后两排, 前排 3 人, 后排 4 人.

【答案】(1) 2160 (种) .

(2) 240 (种) .

(3) 3720 (种) .

(4) 288 (种) .

(5) 720 (种) .

(6) 1440 (种) .

(7) 144 (种) .

(8) 960 (种) .

(9) 2520 (种) .

(10) 840 (种) .

(11) 5040

(种) .

【解析】(1) (元素分析法) 先考虑甲的位置, 有 A_3^1 种方法, 再考虑其余6人的位置, 有 A_6^6 种方法. 故有 $A_3^1 A_6^6 = 2160$ (种) 方法.

(2) (元素分析法) 先安排甲、乙的位置, 有 A_2^2 种方法, 再安排其余5人的位置, 有 A_5^5 种方法. 故有 $A_2^2 A_5^5 = 240$ (种) 方法.

(3) 方法一: (元素分析法): 按甲是否在最右端分两类:

第一类: 甲在最右端, 有 A_6^6 种方法;

第二类: 甲不在最右端, 甲有 A_5^1 个位置可选, 乙也有 A_5^1 个位置可选, 其余5人有 A_5^5 种排法, 即 $A_5^1 A_5^1 A_5^5$ 种方法. 故有 $A_6^6 + A_5^1 A_5^1 A_5^5 = 3720$ (种) 方法.

方法二: (间接法): 无限制条件的排列方法共有 A_7^7 种, 而甲在最左端, 乙在最右端的排法分别有 A_6^6 种, 甲在最左端且乙在最右端的排法有 A_5^5 种. 故有 $A_7^7 - 2A_6^6 + A_5^5 = 3720$ (种) 方法.

方法三: (位置分析法): 按最左端优先安排分步. 对于最左端除甲外有 A_6^1 种排法, 余下六个位置全排列有 A_6^6 种排法, 其中甲不在最左端, 乙在最右端的排法有 $A_5^1 A_5^5$ 种. 故有 $A_6^1 A_6^6 - A_5^1 A_5^5 = 3720$ (种) 方法.

(4) 相邻问题 (捆绑法): 男生必须站在一起, 即把3名男生进行全排列, 有 A_3^3 种排法, 女生必须站在一起, 即把4名女生进行全排列, 有 A_4^4 种排法, 全体男生、女生各看作一个元素全排列有 A_2^2 种排法. 由分步乘法计数原理共有 $A_3^3 A_4^4 A_2^2 = 288$ (种) 方法.

(5) (捆绑法) 把所有男生看作一个元素, 与4名女生组成5个元素全排列, 故有 $A_5^5 = 720$ (种) 不同的排法.

(6)

不相邻问题（插空法）：先排女生有 A_4^4 种排法，把3名男生安排在4名女生隔成的5个空中，有 A_5^3 种排法，故有 $A_4^4 A_5^3 = 1440$ （种）不同的排法。

（7）对比（6），让女生插空：有 $A_3^3 A_4^4 = 144$ （种）不同的排法。

（8）（捆绑法）除甲、乙外，从其余的5人中任取2人，并站在甲、乙之间，与甲、乙组成一个整体，再与余下的3个人进行全排列，故有 $(A_5^2 \cdot A_2^2) \cdot A_4^4 = 960$ （种）不同的排法。

（9）甲在乙前面的排法种数占全体全排列种数的一半，故有 $\frac{A_7^7}{A_2^2} = 2520$ （种）不同的排法。

（10）方法一：先将甲、乙、丙三个人除外，七个位置中，其余的四个人进行排列有 A_7^4 种，然后将甲、乙丙按规定顺序插入三个空中，因此共有 $A_7^4 = 840$ （种）不同的排法。

方法二：甲、乙、丙自左向右的顺序保持不变，即甲；乙丙自左向右顺序的排法种数占全排列种数的 $\frac{1}{A_3^3}$ ，故有 $\frac{A_7^7}{A_3^3} = 840$ （种）不同的排法。

（11）直接分步完成，共有 $A_7^3 \cdot A_4^4 = 5040$ （种）不同的排法。

【标注】【知识点】加法原理与乘法原理的综合运用；分类加法计数原理；分步乘法计数原理；排除法；捆绑法；特殊元素优先法；倍缩法；插空法；特殊位置优先法

7. 六张卡片上分别写有数字0, 1, 3, 4, 5, 从中任取四张排成一排，则可以组成不同的四位奇数的个数是 _____。（用数字作答）

【答案】 144

【解析】 当所取四位数字不含0时，不同的四位奇数的个数为 $C_3^1 C_4^3 = 72$ ，

当所取四位数字含0时，

不同的四位奇数的个数为 $C_3^1 C_2^1 A_4^2 = 72$ ，

∴共有144个。

【标注】【知识点】特殊元素优先法；加法原理与乘法原理的综合运用

8. 5位同学站成一排，甲、乙俩同学必须相邻的排法有（ ）。

A. 48种

B. 72种

C. 84种

D. 96种

【答案】 A

【解析】 $A_2^2 A_4^4 = 48$.

故选A .

【标注】【知识点】分步乘法计数原理

9. 6把椅子摆成一排, 3人随机就座, 任何两人不相邻的坐法种数为() .

A. 144

B. 120

C. 72

D. 24

【答案】 D

【解析】 先把三把椅子隔开摆好, 它们之间和两端有4个位置, 再把三人带椅子插放在四个位置, 共有 $A_4^3 = 24$ 种放法, 故选D .

【标注】【知识点】插空法

【素养】逻辑推理; 数学运算

10. 在一个含有8个节目的节目单中, 临时插入两个歌唱节目, 且保持原节目顺序, 则插入方法有 _____ 种 .

【答案】 90

【解析】 相当于在一个有10个位置的节目单中, 有序插入两个歌唱节目, 还剩余8个位置, 由于剩余的8个节目的相对位置固定, 故此时10个节目的位置确定. 故所有的排法数为 $A_{10}^2 = 10 \times 9 = 90$.

【标注】【知识点】组合

11. 在某班进行的演讲比赛中, 共有5位选手参加, 其中3位女生, 2位男生. 如果2位男生不能连着出场, 且女生甲不能排在第一个, 那么出场顺序的排法种数为 _____ .

【答案】 60

【解析】 ①若第一个出场的是男生, 则第二个出场的是女生, 以后的顺序任意排, 方法有 $C_2^1 C_3^1 A_3^3 = 36$ 种; ②若第一个出场的是女生 (不是女生甲), 则将剩余的2个女生排列好, 2个男生插空, 方法有 $C_2^1 C_2^2 A_3^2 = 24$ 种, 故所有的出场顺序的排法共有 $36 + 24 = 60$ 种 .

【标注】【知识点】特殊元素优先法

12. 用1, 2, 3, 4这四个数字组成无重复数字的四位数, 其中恰有一个偶数字夹在两个奇数字之间的四位数的个数为 _____ .

【答案】 8

【解析】 如下所示:

$$\times 1 \times 3 \times$$

首先把1, 3全排列, 得到排法种数为 A_2^2 ,

则1, 3之间形成三个空, 2, 4要么在前两个空中全排列,

要么在后两个空中全排列,

$\therefore$ 四位数的个数为 $2A_2^2 \cdot A_2^2 = 8$.

【标注】【知识点】插空法

13. 两个三口(父母及一个小孩)之家共同登山, 需乘坐两辆不同的缆车, 每辆缆车最多只能乘坐4人, 但两个小孩不能单独乘坐同一辆缆车, 则不同的乘坐方法种数为().

A. 50

B. 48

C. 36

D. 49

【答案】 B

【解析】 分两种情况:

(1): 两个小孩坐同一辆车, 可以有一个大人, 也可以有两个大人,

故此种情况下, 满足要求的乘车方法有: $C_2^1 \times (C_4^1 + C_4^2) = 20$.

(2): 两个小孩分别坐两个车, 各有两个大人陪同或者一个小孩有一个大人陪,

另一个小孩有三个大人陪, 满足要求的乘车方法有: $2(C_4^1 + C_4^2 + C_4^3) = 28$ 种.

故不同乘车方法种数有: $20 + 28 = 48$ 种.

故选B.

【标注】【知识点】加法原理与乘法原理的综合运用; 分类加法计数原理

14. 从4名男同学中选出2人, 6名女同学中选出3人, 并将选出的5人排成一排, 选出的3名女同学必须从左至右, 从高到矮排列, 共有 _____ 种不同的排法.

【答案】 2400

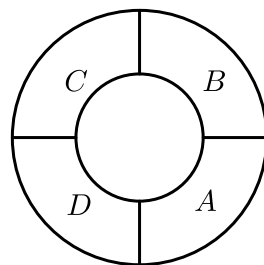
【解析】 从4名男同学中选出2人, 有 C_4^2 种选法,

从6名女同学中先选出3人，有 C_6^3 种选法，
 因为女同学要从左到右，从高到矮排列，
 所以3名女同学的相对顺序固定，
 所以采用除序法，有 $\frac{A_5^5}{A_3^3}$ 种排法，
 $\therefore$ 共有 $C_4^2 C_6^3 \cdot \frac{A_5^5}{A_3^3} = 2400$ 种排法。
 故答案为：2400。

【标注】【素养】逻辑推理；数学运算

【知识点】倍缩法

15. 如图，一环形花坛分成 A, B, C, D 四块，现有4种不同的花供选种，要求在每块里种1种花，且相邻的2块种不同的花，则不同的种法总数为（ ）。



A. 96

B. 84

C. 60

D. 48

【答案】B

【解析】方法一：第一步给 A 区域涂色，有4种选择，
 第二步给 B 区域涂色，有3种选择，
 第三步给 C 区域涂色，
 若 B, C 颜色不同，则 C 有2种选择，此时 D 有2种选择；
 若 B, C 颜色相同，则 C 有1种选择，此时 D 有3种选择。
 故总共有 $4 \times 3 \times (2 \times 2 + 1 \times 3) = 84$ 。

方法二：以颜色为主分类计数，按颜色的多少分三类。

①用4种颜色时，有 A_4^4 种；

②用3种颜色时，则 AC 同色或 BD 同色，分别都有 A_4^3 种；

③用2种颜色时，则 AC 同色且 BD 同色，有 A_4^2 种

总共有 $A_4^4 + 2A_4^3 + A_4^2 = 84$ 种，选B。

方法三：以不相邻区域为主分类计数

首先 A 有4种可选 .

当 BD 同色时 , B 有3种 , C 有3种 ;

当 BD 不同色时 , B 有3种 , D 有2种 , C 有2种 .

由加法和乘法原理可得总数为 $4 \cdot 3 \cdot 3 + 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 84$ 种 .

【标注】【知识点】染色问题