

排列问题

一、加法原理与乘法原理

1. 分类加法原理

先考虑这样一个问题：

从北京到石家庄，可以乘火车，也可以乘汽车，还可以乘飞机。假定火车每日10班，汽车每日2班，飞机每日5班，那么一天中从北京到石家庄有多少种不同的走法呢？

我们不难得到如下结论：三种交通工具的任意一个班次都能够实现从北京到石家庄，因此，一天中不同的走法有 $10 + 2 + 5 = 17$ 种。

把上述例子推广到一般情况，就是**分类加法计数原理**。

做一件事，完成它有 n 类办法，在第一类办法中有 m_1 种不同的方法，在第二类办法中有 m_2 种方法，……，在第 n 类办法中有 m_n 种不同的方法。那么完成这件事共有 $N = m_1 + m_2 + \cdots + m_n$ 种不同的方法。

【补充说明】

分类加法原理针对的是“分类”问题，其中各种方法相互独立，用其中任何一种方法都可以做完这件事。

例1

1. 用1, 3, 5, 7中的任意一个数作分子，2, 4, 8, 9中任意一个数作分母，可构成真分数的个数为（ ）。

A. 8

B. 9

C. 10

D. 11

【答案】 D

【解析】 将2作为分母，则有 $\frac{1}{2}$ ，1个真分数，

将4作为分母，则有 $\frac{1}{4}$ ， $\frac{3}{4}$ ，2个真分数，

将8作为分母，则有 $\frac{1}{8}$ ， $\frac{3}{8}$ ， $\frac{5}{8}$ ， $\frac{7}{8}$ ，4个真分数，

将9作为分母，则有 $\frac{1}{9}$ ， $\frac{2}{9}$ ， $\frac{4}{9}$ ， $\frac{5}{9}$ ，4个真分数，

故构成真分数的个数为 $1 + 2 + 4 + 4 = 11$ 。

故选：D。

【标注】【知识点】分类加法计数原理

2. 若 a 、 b 是正整数，且 $a + b \leq 6$ ，则以 (a, b) 为坐标的点共有多少个？

【答案】15 .

【解析】 $a = 1$ 时， b 的取值为1, 2, 3, 4, 5； $a = 2$ 时， b 的取值为1, 2, 3, 4； $a = 3$ 时， b 的取值为1, 2, 3； $a = 4$ 时， b 的取值为1, 2； $a = 5$ 时， b 的取值为1 . 故总计有15个以 (a, b) 为坐标的点 .

【标注】【知识点】分类加法计数原理

练1

3. 用一个大写的英文字母或一个阿拉伯数字(1 ~ 10)给教室的座位编号，总共能编出()种不同的号码 .

A. 26

B. 10

C. 260

D. 36

【答案】D

【解析】给座位编号的方法可分2类：第一类用英文字母编号，有26种方法；第二类用阿拉伯数字编号，有10种方法 . 故共有 $26 + 10 = 36$ (种)方法 .

【标注】【知识点】分类加法计数原理

2. 分步乘法原理

再考虑另一种形式的问题：

从黑龙江省大庆市到云南省昆明市，需先到北京中转，已知一天内从大庆到北京有三班火车，一班省际客车，从北京到昆明有3班火车 . 那么一天中从大庆到昆明有多少种不同的走法呢？

我们不难得到如下结论：从大庆到昆明需可以分成两个步骤完成：第一步到达北京，有4种走法；第二步到达昆明，有3种走法 . 所以一共有 $4 \times 3 = 12$ 种走法 .

由上面的实例可提取出**分步乘法计数原理** .

做一件事，完成它需要分成 n 个子步骤，做第一个步骤有 m_1 种不同的方法，做第二个步骤有 m_2 种不同方法，……，做第 n 个步骤有 m_n 种不同的方法 . 那么完成这件事共有 $N = m_1 \times m_2 \times \cdots \times m_n$ 种不同

的方法 .

 例2

4. 某人有3个电子邮箱，他要发5封不同的电子邮件，则不同的发送方法有（ ）.
- A. 8种 B. 15种 C. 3^5 种 D. 5^3 种

【答案】 C

【解析】 由题可知，每封电子邮件都可以通过三个邮箱发送，
所以，不同的发送方式为 $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^5$.

【标注】 【知识点】分步乘法计数原理

5. 4名同学报名参加两个课外活动小组，每名同学限报其中的一个小组，则不同的报名方法共有（ ）.
- A. 4种 B. 16种 C. 64种 D. 256种

【答案】 B

【解析】 根据题意，每个同学可以在两个课外活动小组中任选1个，即有2种选法，
则4名同学一共有 $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$ 种选法；
故选B .

【标注】 【知识点】分步乘法计数原理

【素养】 逻辑推理

 练2

6. 某公共汽车上有10位乘客，沿途5个车站，乘客下车的可能方式有（ ）种 .
- A. 5^{10} B. 10^5
C. 50 D. A_{10}^5

【答案】 A

【解析】 根据题意，公共汽车沿途5个车站，则每个乘客有5种下车方式，则10位乘客共有 5^{10} 种下车的可能方式 .
故选A .

【标注】【知识点】分步乘法计数原理

7. 现有6名同学去听同时进行的5个课外知识讲座，每名同学可自由选择其中的一个讲座，不同选法的种数是（ ）.
- A. 5^6
- B. 6^5
- C. $\frac{5 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2}{2}$
- D. $6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2$

【答案】A

【解析】因为每个同学可自由选择一个讲座，所以一共有 $5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 5^6$ 种.

【标注】【知识点】分步乘法计数原理

3. 两类计数原理综合

解决有些计数问题时需要兼顾两种基本计数原理，此时要结合题目内容仔细分析“分类”与“分步”的顺序，而且，在具体的“分类”和“分步”的过程中，要明确“分类”的标准和“分步”的步骤. 对于更复杂的一类问题，甚至会出现“分类中有分步，分步中有分类”的情况.

例3

8. 有不同的数学书11本，不同的物理书8本，不同的化学书5本，从中取出不同学科的书2本，有多少种不同的取法？

【答案】183 .

【解析】从这些书中取出不同学科的书2本，有三类取法：

第一类是数学书、物理书各取1本；

第二类是数学书、化学书各取1本；

第三类是物理书、化学书各取1本.

每类取法又可分成两步完成，即依次取出不是同一学科的书各1本，

根据分类加法计数原理和分步乘法计数原理，

得到不同的取法种数是 $11 \times 8 + 11 \times 5 + 8 \times 5 = 183$.

【标注】【知识点】加法原理与乘法原理的综合运用；分步乘法计数原理；分类加法计数原理

练3

9. 在“志愿和平”活动中，某校高二年级3名男教师和4名女教师参与社区防控新冠肺炎疫情的志愿服务。根据岗位需求应派3人巡视商户，且至少有1名男教师；另外4人测量出入人员体温。则这7名教师不同的安排方法有（ ）。

- A. 15种 B. 18种 C. 31种 D. 45种

【答案】 C

【解析】 若巡视商户的3人中有1名男老师，则有 $C_3^1 \cdot C_4^2 = 18$ 种情况，

若巡视商户的3人中有2名男老师，则有 $C_3^2 \cdot C_4^1 = 12$ 种情况，

若巡视商户的3人全为男老师，则有 $C_3^3 = 1$ 种情况，

故总情况为 $18 + 12 + 1 = 31$ 。

故答案选：C。

【标注】 【知识点】分步乘法计数原理；分类加法计数原理；加法原理与乘法原理的综合运用

二、排列定义与排列数计算

1. 排列定义

一般地，从 n 个不同的元素中任取 m ($m \leq n$) 个元素，按照一定的顺序排成一列，叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个排列。

【补充说明】

(1) 排列的定义实际上包含两层内容：一是“取出元素”，二是“排列顺序”；

(2) 只有元素完全相同，而且顺序也完全一致，二者才算是同一种排列；

(3) 判断一个问题是否是排列问题的关键就是检验顺序对问题的结果是否有影响。例如，从3、5、7、10、13中任取两个数相加（相乘），可以得到多少个不同的和（积），由于加法（乘法）满足交换律，故最终结果与选取两个元素的顺序无关，因此这个问题就不属于排列问题。而从上述五个数中选取两个数进行相减（相除），就属于排列问题；

例1

10. 8名学生站成两排，前排3人，后排5人，则不同的站法共有（ ）。

- A. A_8^8 种

- B. $(A_8^5 + A_3^3)$ 种
 C. $(A_5^5 + A_3^3)$ 种
 D. $\frac{1}{2}A_8^8$ 种

【答案】 A

【解析】 8名学生站成两排，前排3人，后排5人，其实质是8名学生的全排列，故不同的站法有 A_8^8 种。
 故选A。

【标注】 【知识点】 简单的排列问题

2. 排列数及其计算

排列数

从 n 个不同的元素中取出 m ($m \leq n$) 个元素的所有排列的个数，叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的排列数，用符号 A_n^m 表示。

排列数公式

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1), m, n \in \mathbf{N}^*, \text{ 且 } m \leq n.$$

【提问】 请同学们根据分步乘法计数原理证明上面的排列数公式。

全排列

一般地， n 个不同元素全部取出的一个排列，叫做 n 个不同元素的一个全排列。

$$\text{全排列公式 } A_n^n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1.$$

阶乘

正整数由1到 n 的连乘积，叫作 n 的阶乘，用 $n!$ 表示。所以 n 个不同元素的全排列公式可以写成 $A_n^n = n!$ 。
 规定： $0! = 1$ 。

借助于阶乘的定义，可以将排列数公式改写成 $A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$ ，请同学们自行证明。

例2

$$11. 5A_5^3 + 4A_4^2 = (\quad).$$

A. 107

B. 323

C. 320

D. 348

【答案】 D

【解析】 $5A_5^3 + 4A_4^2 = 5 \times 5 \times 4 \times 3 + 4 \times 4 \times 3 = 348$.

故选D.

【标注】 【知识点】 排列

12. 已知 $A_{n+1}^2 - A_n^2 = 10$, 则 n 的值为 ().

A. 4

B. 5

C. 6

D. 7

【答案】 B

【解析】 由 $A_{n+1}^2 - A_n^2 = 10$, 得

$$(n+1)n - n(n-1) = 10,$$

$$\text{即 } n(n+1-n+1) = 10,$$

$$\therefore 2n = 10, \text{ 得 } n = 5.$$

故选B.

【标注】 【知识点】 排列

练1

13. 已知 $\frac{A_n^7 - A_n^5}{A_n^5} = 89$, 则 n 的值为 _____.

【答案】 15

【解析】 根据题意, $\frac{A_n^7 - A_n^5}{A_n^5} = 89$, 则 $\frac{A_n^7}{A_n^5} = 90$, 变形可得 $A_n^7 = 90A_n^5$,

$$\text{则有 } \frac{n!}{(n-7)!} = 90 \times \frac{n!}{(n-5)!},$$

$$\text{变形可得: } (n-5)(n-6) = 90,$$

$$\text{解可得: } n = 15 \text{ 或 } n = -4 \text{ (舍)},$$

$$\text{故 } n = 15.$$

【标注】 【知识点】 排列

14. 计算 $\frac{2A_8^5 + 7A_8^4}{A_9^5 - A_8^5}$.

【答案】 3 .

【解析】
$$\begin{aligned} & \frac{2A_8^5 + 7A_8^4}{A_9^5 - A_8^5} \\ &= \frac{2 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 + 7 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5}{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 - 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4} \\ &= \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times (8+7)}{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times (9-4)} \\ &= 3 . \end{aligned}$$

【标注】【知识点】排列

 练2

15. 3个学生在4本不同的参考书中各挑选1本，不同的选法种数为（ ） .

A. 3

B. 24

C. 34

D. 43

【答案】 B

【解析】 3个学生在4本不同的参考书中各挑选一本，相当于从4个不同元素中选3个，再全排列，故其选法种数为 $A_4^3 = 24$.
故选B .

【标注】【素养】数学运算

【知识点】简单的排列问题

16. 用0, 1, 2, 3, 4, 5这六个数字：

- (1) 可以组成多少个数字允许重复的六位数？
- (2) 可以组成多少个数字不允许重复的六位数？
- (3) 可以组成多少个数字允许重复的五位数？
- (4) 可以组成多少个数字不允许重复的五位数？

【答案】 (1) 38880个 .

(2) 600个 .

(3) 6480个 .

(4) 600个 .

【解析】 (1) 先选首位数字，由于0不能作首位数字，因此有5种选法，由于数字允许重复，故其它位置的数字都有6种选法．因此所求六位数共有 $5 \times 6^5 = 38880$ 个 .

- (2) 先选首位数字, 由于0不能作首位数字, 因此有5种选法, 由于数字不允许重复, 故其它位置的数字全排就可以了.
因此所求六位数共有 $5A_5^5 = 600$ 个.
- (3) 先选首位数字, 由于0不能作首位数字, 因此有5种选法, 由于数字允许重复, 故其它位置的数字都有6种选法. 因此所求五位数共有 $5 \times 6^4 = 6480$ 个.
- (4) 先选首位数字, 由于0不能作首位数字, 因此有5种选法, 由于数字不允许重复, 故其它位置的数字从剩余的5个数字中选出4个全排就可以了.
因此所求五位数共有 $5A_5^4 = 600$ 个.

【标注】【知识点】分步乘法计数原理

三、常见排列问题

1. 元素(位置)优先法

含有特殊元素或特殊位置, 通常优先安排特殊元素或特殊位置.

例1

17. 用数字1, 2, 3, 4, 5组成的无重复数字的四位偶数的个数为 _____.

【答案】 48

【解析】 由题意知本题需要分步计数,
2和4排在末位时, 共有 $A_2^1 = 2$ 种排法,
其余三位数从余下的四个数中任取三个,
有 $A_4^3 = 4 \times 3 \times 2 = 24$ 种排法,
根据由分步计数原理得到符合题意的偶数共有 $2 \times 24 = 48$ 个.
故答案为48.

【标注】【知识点】简单的排列问题

18. 上午要上语文、数学、体育和外语四门功课, 而体育教师因故不能上第一节和第四节课, 则不同排课方案的种数是().

A. 24

B. 22

C. 20

D. 12

【答案】 D

【解析】 有受限元素时，一般先将受限元素排好，即“特殊优先”，
先排体育课有2种排法，故不同排课方案有 $2A_3^3 = 12$ 种。

【标注】 【知识点】 特殊位置优先法

【素养】 逻辑推理

练1

19. 将 A, B, C, D, E, F 六个字母排成一排，且 A, B 均在 C 的同侧，则不同的排法共有 _____ 种
(用数字作答)。

【答案】 480

【解析】 第一类：字母 C 在左边第一个位置有 A_5^5 种；
第二类，字母 C 排在左边第二个位置，有 $A_4^2 A_3^3$ 种；
第三类，字母 C 排在左边第三个位置，有 $A_2^2 A_3^3 + A_3^2 A_3^3$ 种；
由对称性可知共有 $2 \times (A_5^5 + A_4^2 A_3^3 + A_2^2 A_3^3 + A_3^2 A_3^3) = 480$ 种。

【标注】 【知识点】 特殊元素优先法

20. 社区主任要为小红等4名志愿者和他们帮助的2位老人拍照，要求排成一排，小红必须与2位老人都相邻，且两位老人不排在两端，则不同的排法种数是 _____。(用数字作答)

【答案】 24

【解析】 先将小红排在两位老人中间，有两种方法，将他们看成一个整体，插入剩下的3人形成的全排列中，因为老人不能排两端，所以只有2种插法，因此总方法数为 $2 \times 2A_3^3 = 24$ 种。

【标注】 【素养】 数学运算

【知识点】 插空法

2. 相邻排列问题（捆绑法）

(1) 模型：将 n 个不同元素排成一排，其中某 k 个元素相邻，求不同排法种数的方法。

(2) 思路：将相邻的 k 个元素“捆绑”在一起看成一个整体，此时变为 $n - k + 1$ 个元素的全排列，排法为 A_{n-k+1}^{n-k+1} ；再将“捆绑”在一起的元素内部排列，排法为 A_k^k 。根据分步乘法计数原理，符合条件的排法种数

有 $A_{n-k+1}^{n-k+1} \cdot A_k^k$ 种 .

例2

21. 6名同学排成一排, 其中甲、乙两人必须排在一起的不同排法是 () .

- A. 720种 B. 360种 C. 240种 D. 120种

【答案】 C

【解析】 $\because$ 6名同学排成一排, 其中甲、乙两人必须排在一起,
 $\therefore$ 首先把甲和乙看做一个元素, 使得它与另外4个元素排列,
再者甲和乙之间还有一个排列,
共有 $A_5^5 A_2^2 = 240$.
故选C .

【标注】 【知识点】捆绑法

22. 停车场划出一排12个停车位置, 今有8辆不同的车需要停放, 若要求剩余的4个空车位连在一起, 则不同的停车方法有 () .

- A. A_{12}^8 种 B. $2A_8^8 A_4^4$ 种
C. $8A_8^8$ 种 D. $9A_8^8$ 种

【答案】 D

【解析】 (捆绑问题) 将4个空车位视为一个元素, 与8辆车共9个元素进行全排列,
共有 $A_9^9 = 9A_8^8$ (种) 不同的停车方法 .

【标注】 【知识点】捆绑法

练2

23. 在制作飞机的某一零件时, 要先后实施6个工序, 其中工序A只能出现在第一步或最后一步, 工序B和C在实施时必须相邻, 则实施顺序的排列方法共有 () .

- A. 34种 B. 48种 C. 96种 D. 144种

【答案】 C

【解析】

先将 B 和 C 看作一个整体，并与除 A 以外的三个元素全排列，再对 B, C 排列，共有 $A_2^2 A_4^4$ 种排法，再从两端的位置中选一个排 A ，有 A_2^1 种排法，则排列方法共有 $A_2^2 \cdot A_4^4 \cdot A_2^1 = 96$ （种）。

故选：C。

【标注】【知识点】特殊元素优先法；捆绑法

3. 间隔排列问题（插空法）

（1）模型：将 n 个不同的元素排成一排，其中某 k 个元素互不相邻（ $k \leq n - k + 1$ ），求不同排法种数的方法。

（2）思路：①将没有要求的 $n - k$ 个元素全排列，排列方法有 A_{n-k}^{n-k} 种；②将要求互不相邻的 k 个元素插入 $n - k + 1$ 个空隙中，相当于从 $n - k + 1$ 个空隙中选取 k 个分配给互不相邻的那 k 个元素，其排列方法有 A_{n-k+1}^k 种。根据分步乘法计数原理，符合条件的排法种数有 $A_{n-k}^{n-k} \cdot A_{n-k+1}^k$ 种。

例3

24. 在某校召开的高考总结表彰会上有3位数学老师、2位英语老师和1位语文老师做典型发言。现在安排这6位老师的发言顺序，则3位数学老师互不相邻的排法共有 _____ 种。（请用数字作答）

【答案】144

【解析】采用插空法，先排英语老师和语文老师，共 A_3^3 种。

再插空： $A_3^3 \cdot A_4^3 = 144$ 种。

故答案为：144。

【标注】【知识点】插空法

练3

25. 高三（一）班需要安排毕业晚会的4个音乐节目，2个舞蹈节目和1个曲艺节目的演出顺序，要求两个舞蹈节目不连排，则不同排法的种数是（ ）。

A. 1800

B. 3600

C. 4320

D. 5040

【答案】B

【解析】先将4个音乐节目，1个曲艺节目排列有 $A_5^5 = 120$ 种排法，再将2个舞蹈节目用插空法插入其中的6个“空”，有 $A_6^2 = 30$ 种插入方法，即得不同的排法共有 $120 \times 30 = 3600$ 种，

故选B.

【标注】【知识点】组合；插空法

26. 将7个座位连成一排，安排4个人就座，恰有两个空位相邻的不同坐法有（ ）.

A. 240

B. 480

C. 720

D. 960

【答案】B

【解析】根据题意，分2步进行分析：

①，将4人全排列，安排在4个位置，有 $A_4^4 = 24$ 种情况，

②，4人排好后有5个空位，在其中任选2个，一个空位安排2个空座位，另一个安排一个空座位，有 $A_5^2 = 20$ 种情况，

则恰有两个空位相邻的不同坐法有 $24 \times 20 = 480$ 种.

故选B.

【标注】【知识点】插空法

4. 某些元素顺序确定的排列问题（除序法）

在有些排列问题中，某些元素的前后顺序是固定的（但是不一定相邻），具体如下：

（1）模型：将 $m + n$ 个不同的元素排成一排，其中 m 个元素之间的顺序固定不变，求不同的排法种数的方法.

（2）思路：

①整体法：先将 $m + n$ 个元素全排列，共有 A_{m+n}^{m+n} 种排列方法. 然后任取一种排列，固定另外 n 个元素的位置不动，将 m 个元素交换顺序，共有 A_m^m 种排列方法，而其中只有一种排列是我们所需要的，因此共有 $\frac{A_{m+n}^{m+n}}{A_m^m}$ 种不同的排列方法.

②插空法：先从 $m + n$ 个位置选出 n 个进行排列，然后将顺序固定的 m 个元素插入相应空当中，所以排法种数为 $A_{m+n}^n \times 1 = A_{m+n}^n$ 种.

例4

27. A、B、C、D、E五人站成一排，如果A必须站在B的左边（A、B可以不相邻），则不同的排法有（ ）.

A. 24种

B. 60种

C. 90种

D. 120种

【答案】 B

【解析】 (消序问题) 5个人全排列有 $5! = 120$ (种) ,

A在B左边和A在B右边的情形一样多 ,
所以不同排法有 $\frac{1}{2} \times 120 = 60$ (种) .

【标注】 【知识点】 倍缩法

练4

28. 八个人排一纵队, 甲在乙的前面 (可以与乙不相邻) , 乙在丙的前面 (可以与丙不相邻) , 则这样的排列共有 _____ 种 .

【答案】 6720

【解析】 八个人排成一纵队共有 A_8^8 种排法 ,

$\therefore$ 甲、乙、丙三人排序一定 ,

$\therefore$ 满足题意的排法共有 $\frac{A_8^8}{A_3^3} = 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 6720$ 种 .

【标注】 【知识点】 倍缩法

5. 间接化处理问题 (正难则反)

对于给定附加条件的问题, 正面考虑情况较为复杂时, 可以考察否定附加条件下问题的情况, 然后从无附加条件中排除上述情况即可 .

例5

29. 7个人排一排, 甲不在排头、乙不在排尾的排法有 _____ 种 .

【答案】 3720

【解析】 (间接法) 7人全排有 A_7^7 种情况 ,

从中减去甲在排头的 A_6^6 种情况、乙在排尾的 A_6^6 种情况, 把多减的再加上 ,
即共有 $A_7^7 - 2A_6^6 + A_5^5 = 3720$ 种符合题意的情况 .

【标注】 【思想】 分类讨论思想

【素养】 逻辑推理 ; 数学运算

【知识点】 排除法

练5

30. 从5名学生中任选4名分别参加数学、物理、化学、生物四科竞赛，且每科竞赛只有1人参加，若甲不参加生物竞赛，则不同的选择方案共有 _____ 种。

【答案】 96

【解析】 由采取补集思想解决：

从5名学生中任选4名分别参加四科竞赛，
且每科竞赛只有1人参加，共有 $A_5^4 = 120$ 种；
其中甲参加生物竞赛有 $A_4^3 = 24$ 种；
共有 $120 - 24 = 96$ 种。

【标注】 【知识点】 排除法

31. 某单位安排7位员工在10月1日至7日值班，每天安排1人，每人值班1天，若7位员工中的甲、乙排在相邻两天，丙不排在10月1日，丁不排在10月7日，则不同的安排方案共有（ ）。
- A. 504种 B. 960种 C. 1008种 D. 1108种

【答案】 C

【解析】 方法一：间接法，若丙排10月1日，共有 $A_5^5 \cdot A_2^2 = 240$ （种），
若丁排10月7日，共有 $A_5^5 \cdot A_2^2 = 240$ （种），
若丙排10月1日且丁排10月7日共有 $A_4^4 \cdot A_2^2 = 48$ （种），
若不考虑丙、丁的条件限制，共有 $A_6^6 \cdot A_2^2 = 1440$ （种），
 $\therefore$ 共有 $1440 - 240 - 240 + 48 = 1008$ （种）符合题意的排法。
方法二：甲乙在1、2或者6、7，有 $C_2^1 A_2^2 (A_5^5 - A_4^4) = 384$ 种，其余情况有
 $C_4^1 A_2^2 (A_5^5 - 2A_4^4 + A_3^3) = 624$ 种，共1008种。
故选C。

【标注】 【知识点】 排除法

6. 错位排列问题

（1）模型：将编号为 $1 \sim n$ 的 n 个小球放入编号为 $1 \sim n$ 的 n 个盒子中，规定 i 号小球不许放入 i 号盒子，求不同的放法种数，此种排列称为全错位排列，相应的排列数称为全错位排列数。

(2) 当 $n = 2, 3, 4, 5$ 时的全错位排列数各为 $1, 2, 9, 44$. 关于 $5, 6, 7$ 个元素的错位排列的计算, 可以用剔除法转化为 2 个、 3 个、 4 个元素的错位排列的问题.

例6

32. 编号为 $1 - 4$ 的4个小球放入编号为 $1 - 4$ 的4个盒子内, 要求小球与盒子的编号不同, 共有多少种方法?

【答案】见解析.

【解析】此问题背景为错位全排列问题: 设集合 $I = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ 中的所有元素的一种全排列 $t_1, t_2, t_3, \dots, t_n$, 满足 $t_n \neq n (i = 1, 2, 3, \dots, n)$, 称这样的排列为错位全排列, 用 a_n . 先考察较为简单的情况, 当 $n = 2$ 时, 显然 $a_2 = 1$; 当 $n = 3$ 时, $a_3 = 3! - C_3^1 \cdot a_2 - 1 = 2$; 故当 $n = 4$ 时, $a_4 = 4! - C_4^1 \cdot a_3 - C_4^2 \cdot a_2 - 1 = 9$, 即为本题的解; 以此类推, 可以得到 $n = 5$ 的时候, 错位全排列数 $a_5 = 5! - C_5^1 \cdot a_4 - C_5^2 \cdot a_3 - C_5^3 \cdot a_2 - 1 = 44$. 有兴趣的同学可以推导一下 a_n 的表达式.

【标注】【知识点】排除法

练6

33. 将编号为 $1, 2, 3, 4$ 的小球放入编号为 $1, 2, 3$ 的盒子中, 要求不允许有空盒子, 且球与盒子的号不能相同, 则不同的放球方法有 ().

A. 16种

B. 12种

C. 9种

D. 6种

【答案】B

【解析】由题意可知, 这四个小球有两个小球放在一个盒子中, 将四个小球分组为如下情况:

当1号球与2号球放在同一盒子中时, 有2种不同的放法;

当1号球与3号球放在同一盒子中时, 有2种不同的放法;

当1号球与4号球放在同一盒子中时, 有2种不同的放法;

当2号球与3号球放在同一盒子中时, 有2种不同的放法;

当2号球与4号球放在同一盒子中时, 有2种不同的放法;

当3号球与4号球放在同一盒子中时, 有2种不同的放法.

综上, 不同的放球方法有12种, 故B正确.

故选B.

【标注】【知识点】错位法; 分类加法计数原理

7. 综合拓展

34. 书架上原来摆放着6本不同的书，现要再放3本不同的书，则不同放法的种数为（ ）.

- A. A_7^3
- B. A_4^4
- C. $9 \times 8 \times 7$
- D. $2A_3^3$

【答案】 C

【解析】3本书逐本放在书架上，第1本可放在原来6本书之间和两端的7个位置之一处，有7种放法。

第1本书放入后，书架上有7本书，所以第2本书有8种放法。

同样，第3本书有9种放法，所以放法总数为 $9 \times 8 \times 7$ ，故选C.

【标注】 **【知识点】** 分步乘法计数原理

35. 5个男生5个女生共10个同学排成一排，男生甲与男生乙之间有且只有2位女生，女生不能排在队伍的两端，则共有 _____ 种排法．

【答案】 57600

【解析】 先将2名女生放在男生甲和乙之间，
这4个人看成一个元素，和另外的3名男生选2名放两端，
剩下的元素全排列，
共有 $A_5^2 A_2^2 A_4^2 A_5^5 = 57600$ 种。
故答案为：57600。

【标注】 【知识点】 捆绑法

36. 六个人从左至右排成一行，最左端只能排甲或乙，最右端不能排甲，则不同的排法共有（ ）.

- A. 192种 B. 216种 C. 240种 D. 288种

【答案】 B

【解析】 最左端排甲，共有 $A_5^5 = 120$ 种，最左端只排乙，最右端不能排甲，有 $C_4^1 A_4^4 = 96$ 种，根据加法原理可得，共有 $120 + 96 = 216$ 种。
故**选B**。

【标注】【知识点】特殊元素优先法

37. 加工某种产品需要 A, B, C, D, E 五道工艺, 其中 A 必须在 D 的前面完成(不一定相邻), 其他工艺的顺序可以改变, 但不能同时进行. 为了节省加工时间, B 与 C 必须相邻, 那么完成加工该产品的不同工艺的排列顺序有 _____ 种.

【答案】 24

【解析】 由题意知, B 与 C 必须相邻, 利用捆绑法, 可得 $A_4^4 A_2^2 = 48$ (种)方法.

因为 A 必须在 D 的前面完成,

所以完成加工该产品的不同工艺的排列顺序有 $48 \div 2 = 24$ (种).

【标注】【知识点】分步乘法计数原理; 倍缩法