

恒成立问题与能成立问题练习题

一、恒成立问题

1. 已知函数 $f(x) = (x + a)e^x$, 其中 a 为常数 .

(1) 若函数 $f(x)$ 是区间 $[-3, +\infty)$ 上的增函数 , 求实数 a 的取值范围 ;

(2) 若 $f(x) \geq e^2$ 在 $x \in [0, 2]$ 时恒成立 , 求实数 a 的取值范围 .

【答案】 (1) $a \geq 2$.

(2) $[e^2, +\infty)$.

【解析】 (1) $f'(x) = (x + a + 1)e^x$, $x \in \mathbf{R}$.

因为函数 $f(x)$ 是区间 $[-3, +\infty)$ 上的增函数 ,

所以 $f'(x) \geq 0$, 即 $x + a + 1 \geq 0$ 在 $[-3, +\infty)$ 上恒成立 .

因为 $y = x + a + 1$ 是增函数 ,

所以满足题意只需 $-3 + a + 1 \geq 0$, 即 $a \geq 2$.

(2) 令 $f'(x) = 0$, 解得 $x = -a - 1$

$f(x), f'(x)$ 的情况如下 :

x	$(-\infty, -a-1)$	$-a-1$	$(-a-1, +\infty)$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	极小值	$\nearrow$

① 当 $-a - 1 \leq 0$, 即 $a \geq -1$ 时 , $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上的最小值为 $f(0)$,

若满足题意只需 $f(0) \geq e^2$, 解得 $a \geq e^2$,

所以此时 , $a \geq e^2$;

② 当 $0 < -a - 1 < 2$, 即 $-3 < a < -1$ 时 , $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上的最小值为 $f(-a - 1)$

,

若满足题意只需 $f(-a - 1) \geq e^2$, 求解可得此不等式无解 ,

所以 a 不存在 ;

③ 当 $-a - 1 \geq 2$, 即 $a \leq -3$ 时 , $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上的最小值为 $f(2)$,

若满足题意只需 $f(2) \geq e^2$, 解得 $a \geq -1$,

所以此时 , a 不存在 .

综上所述 , 所求实数 a 的取值范围为 $[e^2, +\infty)$.

【标注】【知识点】利用导数解决不等式恒成立问题

2. 已知 $f(x) = \ln x - \frac{a}{x} (a \in \mathbf{R})$.

(1) 当 $a > 0$ 时, 判断 $f(x)$ 在定义域上的单调性.

(2) 若 $f(x)$ 在 $[1, e]$ 上的最小值为 $\frac{3}{2}$, 求 a 的值.

(3) 若 $f(x) < x^2$ 在 $(1, +\infty)$ 上恒成立, 试求 a 的取值范围.

【答案】(1) 单调递增.

(2) $a = -e^{\frac{1}{2}}$.

(3) $a \geq -1$.

【解析】(1) 由题意得 $x > 0$, 且 $f'(x) = \frac{1}{x} + \frac{a}{x^2}$,

显然, 当 $a > 0$ 时, $f'(x) > 0$ 恒成立, $f(x)$ 在定义域上单调递增.

(2) 当 $a > 0$ 时由 (1) 得 $f(x)$ 在定义域上单调递增,

所以 $f(x)$ 在 $[1, e]$ 上的最小值为 $f(1)$,

即 $f(1) = \frac{3}{2} \Rightarrow -a = \frac{3}{2} \Rightarrow a = -\frac{3}{2}$ (与 $a > 0$ 矛盾, 舍);

当 $a = 0$, $f(x) = \ln x$ 显然在 $[1, e]$ 上单调递增, 最小值为 0, 不合题意;

当 $a < 0$, $f'(x) = \frac{1}{x} + \frac{a}{x^2} = \frac{x+a}{x^2}$,

当 $x \in (0, -a)$, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减,

当 $x = -a$, $f'(x) = 0$,

当 $x \in (-a, +\infty)$, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增.

若 $-a \leq 1$, $f(x)_{\min} = f(1) = -a = \frac{3}{2} \Rightarrow a = -\frac{3}{2}$ (舍);

若 $1 < -a < e$, $f(x)_{\min} = f(-a) = 1 + \ln(-a) = \frac{3}{2} \Rightarrow a = -e^{\frac{1}{2}}$ (满足题意);

若 $-a \geq e$, $f(x)_{\min} = f(e) = 1 - \frac{a}{e} = \frac{3}{2} \Rightarrow a = -\frac{e}{2}$ (舍).

综上所述, $a = -e^{\frac{1}{2}}$.

(3) 若 $f(x) < x^2$ 在 $(1, +\infty)$ 上恒成立, 即在 $(1, +\infty)$ 上 $x^2 + \frac{a}{x} - \ln x > 0$ 恒成立,
(分离参数求解),

等价于 $a > x \ln x - x^3$ 在 $(1, +\infty)$ 上恒成立,

令 $g(x) = x \ln x - x^3, (x > 1)$, 则 $g'(x) = 1 + \ln x - 3x^2, (x > 1)$;

令 $h(x) = g'(x) = 1 + \ln x - 3x^2, (x > 1)$, 则 $h'(x) = \frac{1}{x} - 6x = \frac{1-6x^2}{x}$,

显然当 $x > 1$ 时 $h'(x) < 0$, $h(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减,

$h(x)_{\max} < h(1) = -2 < 0$,

即 $g'(x) < 0$ 恒成立, 说明 $g(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 单调递减, $g(x)_{\max} < g(1) = -1$,
所以 $a \geq -1$.

【标注】【知识点】 利用导数解决不等式恒成立问题; 已知最值情况求参数范围

3. 已知 $a > 0$, 函数 $f(x) = \frac{ax}{x^2 + 1} + 2a$, $g(x) = a \ln x - x + a$, 求证: 对于任意的 $x_1, x_2 \in (0, e)$, 都有 $f(x_1) > g(x_2)$.

【答案】 答案见解析.

【解析】 函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, $f'(x) = \frac{a(1+x)(1-x)}{(x^2+1)^2}$

因为 $a > 0$, 所以, 当 $x < -1$, 或 $x > 1$ 时, $f'(x) < 0$;

当 $-1 < x < 1$ 时, $f'(x) > 0$.

所以, $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-1, 1)$, 单调递减区间为 $(-\infty, -1), (1, +\infty)$.

因此 $f(x)$ 在区间 $(0, 1)$ 上单调递增, 在区间 $(1, e)$ 上单调递减,

又 $f(0) = 2a$, $f(e) = \frac{ea}{e^2+1} + 2a > 2a$, 所以, 当 $x \in (0, e)$ 时, $f(x) > 2a$.

由 $g(x) = a \ln x - x + a$, 可得 $g'(x) = \frac{a}{x} - 1 = \frac{a-x}{x}$.

所以当 $a \geq e$ 时, 函数 $g(x)$ 在区间 $(0, e)$ 上是增函数,

所以, 当 $x \in (0, e)$ 时, $g(x) < g(e) = 2a - e < 2a$.

所以, 当 $x \in (0, e)$ 时,

对于任意的 $x_1, x_2 \in (0, e)$, 都有 $f(x_1) > 2a$, $g(x_2) < 2a$, 所以 $f(x_1) > g(x_2)$.

当 $0 < a < e$ 时, 函数 $g(x)$ 在区间 $(0, a)$ 上是增函数, 在区间 (a, e) 上是减函数,

所以, 当 $x \in (0, e)$ 时, $g(x) \leq g(a) = a \ln a < 2a$.

所以, 当 $x \in (0, e)$ 时, 对于任意的 $x_1, x_2 \in (0, e)$, 都有 $f(x_1) > 2a$, $g(x_2) < 2a$, 所以 $f(x_1) > g(x_2)$.

综上, 对于任意的 $x_1, x_2 \in (0, e)$, 都有 $f(x_1) > g(x_2)$.

【标注】【知识点】 利用导数证明不等式恒成立问题; 导数与单调性

二、能成立问题

4. 已知函数 $f(x) = ax - (2a+1) \ln x - \frac{2}{x}$, $g(x) = -2a \ln x - \frac{2}{x}$, 其中 $a \in \mathbf{R}$.

(1) 当 $a = 2$ 时, 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程;

(2) 当 $a > 0$ 时, 求 $f(x)$ 的单调区间;

(3) 若存在 $x \in [\frac{1}{e}, e^2]$, 使得不等式 $f(x) \geq g(x)$ 成立, 求 a 的取值范围.

【答案】 (1) 切线方程为 $x + y - 1 = 0$.

(2) 答案见解析.

(3) a 的取值范围是 $[-e, +\infty)$.

【解析】 (1) 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, $f'(x) = \frac{(ax-1)(x-2)}{x^2}$.

当 $a = 2$ 时, $f'(1) = -1$, $f(1) = 0$.

所以曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 $x + y - 1 = 0$.

(2) $f'(x) = \frac{(ax-1)(x-2)}{x^2}$, $x \in (0, +\infty)$.

当 $0 < a < \frac{1}{2}$ 时, 由 $f'(x) = \frac{(ax-1)(x-2)}{x^2} = 0$, 得 $x_1 = 2$, $x_2 = \frac{1}{a} > 2$.

所以在区间 $(0, 2)$ 和 $(\frac{1}{a}, +\infty)$ 上, $f'(x) > 0$; 在区间 $(2, \frac{1}{a})$ 上, $f'(x) < 0$.

故 $f(x)$ 的单调递增区间是 $(0, 2)$ 和 $(\frac{1}{a}, +\infty)$, 单调递减区间是 $(2, \frac{1}{a})$.

当 $a = \frac{1}{2}$ 时, $f'(x) = \frac{(x-2)^2}{2x^2}$, 故 $f(x)$ 的单调递增区间是 $(0, +\infty)$.

当 $a > \frac{1}{2}$ 时, 由 $f'(x) = \frac{(ax-1)(x-2)}{x^2} = 0$, 得 $x_1 = \frac{1}{a}$, $x_2 = 2 > \frac{1}{a}$.

所以在区间 $(0, \frac{1}{a})$ 和 $(2, +\infty)$ 上, $f'(x) > 0$; 在区间 $(\frac{1}{a}, 2)$ 上, $f'(x) < 0$.

故 $f(x)$ 的单调递增区间是 $(0, \frac{1}{a})$ 和 $(2, +\infty)$, 单调递减区间是 $(\frac{1}{a}, 2)$.

(3) 由题意存在 $x \in [\frac{1}{e}, e^2]$ 使不等式 $ax - (2a-1)\ln x - \frac{2}{x} \geq -2a\ln x - \frac{2}{x}$ 成立,

即存在 $x \in [\frac{1}{e}, e^2]$,

使 $a \geq \frac{\ln x}{x}$ 成立, 只需 a 大于或等于 $\frac{\ln x}{x}$ 在区间 $[\frac{1}{e}, e^2]$ 上的最小值.

令 $h(x) = \frac{\ln x}{x}$, $h'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$.

在区间 $(\frac{1}{e}, e)$ 上, $h'(x) > 0$, $h(x)$ 为增函数;

在区间 (e, e^2) 上, $h'(x) < 0$, $h(x)$ 为减函数;

所以 $h(x)$ 在 $[\frac{1}{e}, e^2]$ 上的最小值是 $h(\frac{1}{e})$ 与 $h(e^2)$ 中的较小者.

$h(\frac{1}{e}) = -e$, $h(e^2) = \frac{2}{e^2}$, 所以 $h(x)$ 在 $[\frac{1}{e}, e^2]$ 上的最小值是 $h(\frac{1}{e}) = -e$.

, 所以 $a \geq -e$.

故 a 的取值范围是 $[-e, +\infty)$.

【标注】【知识点】求函数单调区间 (含参二次型导函数); 利用导数解决不等式能成立问题

已知函数 $f(x) = x - a \ln x$, $g(x) = -\frac{1+a}{x}$, 若在 $[1, e]$ ($e = 2.718\dots$) 上存在一点 x_0 , 使得 $f(x_0) < g(x_0)$ 成立, 求 a 的取值范围.

【答案】 $a > \frac{e^2 + 1}{e - 1}$ 或 $a < -2$.

【解析】 构造 $h(x) = f(x) - g(x)$, 在 $[1, e]$ 上存在一点 x_0 , 使得 $f(x_0) < g(x_0)$ 成立, 即

在 $[1, e]$ 上存在一点 x_0 , 使得 $h(x_0) < 0$, 即

函数 $h(x) = x + \frac{1+a}{x} - a \ln x$ 在 $[1, e]$ 上的最小值小于零.

$$h'(x) = 1 - \frac{1+a}{x^2} - \frac{a}{x} = \frac{x^2 - ax - (1+a)}{x^2} = \frac{(x+1)[x - (1+a)]}{x^2}$$

(1) 当 $1+a > 0$ 时, 即 $a > -1$ 时, 在 $(0, 1+a)$ 上 $h'(x) < 0$, 在 $(1+a, +\infty)$ 上

$h'(x) > 0$,

所以 $h(x)$ 在 $(0, 1+a)$ 上单调递减, $(1+a, +\infty)$ 上单调递增;

(2) 当 $1+a \leq 0$, 即 $a \leq -1$ 时, 在 $(0, +\infty)$ 上 $h'(x) > 0$, 所以, 函数 $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增.

据此做如下分类讨论:

① 即 $1+a \geq e$, 即 $a \geq e-1$ 时, $h(x)$ 在 $[1, e]$ 上单调递减,

所以 $h(x)$ 的最小值为 $h(e)$, 由 $h(e) = e + \frac{1+a}{e} - a < 0$ 可得 $a > \frac{e^2 + 1}{e - 1}$,

因为 $\frac{e^2 + 1}{e - 1} > e - 1$, 所以 $a > \frac{e^2 + 1}{e - 1}$;

② 当 $1+a \leq 1$, 即 $a \leq 0$ 时, $h(x)$ 在 $[1, e]$ 上单调递增,

所以 $h(x)$ 最小值为 $h(1)$, 由 $h(1) = 1 + 1 + a < 0$ 可得 $a < -2$;

③ 当 $1 < 1+a < e$, 即 $0 < a < e-1$ 时, 可得 $h(x)$ 最小值为 $h(1+a)$,

因为 $0 < \ln(a+1) < 1$, 所以, $0 < a \ln(a+1) < a$

故 $h(1+a) = 2 + a - a \ln(1+a) > 2$, 此时, $h(1+a) < 0$ 不成立.

综上所述可得所求 a 的范围是: $a > \frac{e^2 + 1}{e - 1}$ 或 $a < -2$.

【标注】 【知识点】利用导数证明不等式能成立问题