

含参函数的极值与最值练习题

一、含参函数极值问题

1. 已知函数 $f(x) = x - 1 + \frac{a}{e^x}$ ($a \in \mathbf{R}$, e 为自然对数的底数) .

求函数 $f(x)$ 的极值 .

【答案】 (1) 当 $a \leq 0$ 时, 函数 $f(x)$ 无极小值 ,

当 $a > 0$, $f(x)$ 在 $x = \ln a$ 处取得极小值 $\ln a$, 无极大值 .

【解析】 (1) $f'(x) = 1 - \frac{a}{e^x}$,

① 当 $a \leq 0$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 为 $(-\infty, +\infty)$ 上的增函数 ,

所以函数 $f(x)$ 无极值 .

② 当 $a > 0$ 时, 令 $f'(x) = 0$, 得 $e^x = a$, $x = \ln a$.

$x \in (-\infty, \ln a)$, $f'(x) < 0$; $x \in (\ln a, +\infty)$, $f'(x) > 0$.

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, \ln a)$ 上单调递减 , 在 $(\ln a, +\infty)$ 上单调递增 ,

故 $f(x)$ 在 $x = \ln a$ 处取得极小值 , 且极小值为 $f(\ln a) = \ln a$, 无极大值 .

综上, 当 $a \leq 0$ 时, 函数 $f(x)$ 无极小值

当 $a > 0$, $f(x)$ 在 $x = \ln a$ 处取得极小值 $\ln a$, 无极大值 .

【标注】 【知识点】 已知零点或根情况求参数范围 ; 求函数极值 (含参指对型导函数)

2. 已知函数 $f(x) = (\ln x - k - 1)x$ ($k \in \mathbf{R}$)

当 $x > 1$ 时, 求 $f(x)$ 的单调区间和极值 .

【答案】 (1) ① 当 $k \leq 0$ 时, 函数 $f(x)$ 的单调增区间是 $(1, +\infty)$, 无单调减区间, 无极值 ;

② 当 $k > 0$ 时, 函数 $f(x)$ 的单调减区间是 $(1, e^k)$, 单调增区间是 $(e^k, +\infty)$,
在区间 $(1, +\infty)$ 上的极小值为 $-e^k$, 无极大值 .

【解析】 (1) $\because f(x) = (\ln x - k - 1)x$ ($k \in \mathbf{R}$) ,

$\therefore x > 0$, $f'(x) = \frac{1}{x} \cdot x + \ln x - k - 1 = \ln x - k$,

① 当 $k \leq 0$ 时, $\because x > 1$, $\therefore f'(x) = \ln x - k > 0$,

函数 $f(x)$ 的单调增区间是 $(1, +\infty)$, 无单调减区间, 无极值 ;

② 当 $k > 0$ 时, 令 $\ln x - k = 0$, 解得 $x = e^k$,

当 $1 < x < e^k$ 时, $f'(x) < 0$; 当 $x > e^k$, $f'(x) > 0$,

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 的单调减区间是 $(1, e^k)$, 单调增区间是 $(e^k, +\infty)$,

在区间 $(1, +\infty)$ 上的极小值为 $f(e^k) = (k - k - 1)e^k = -e^k$, 无极大值.

【标注】【知识点】导数与最值; 求解函数极值; 双变量问题; 利用导数证明不等式恒成立问题

二、含参函数最值问题

3. 求函数 $h(x) = \frac{1}{3}x^3 - x - 1$ 在区间 $[t, t+3]$ 上的最大值.

【答案】 答案见解析.

【解析】 $h(x) = \frac{1}{3}x^3 - x - 1$, 求导可知, 函数 $h(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty, -1), (1, +\infty)$; 单调递减区间为 $(-1, 1)$.

① 当 $t+3 < -1$ 时, 即 $t < -4$ 时, $h(x)$ 在区间 $[t, t+3]$ 上单调递增,

所以 $h(x)$ 在区间 $[t, t+3]$ 上的最大值为

$$h(t+3) = \frac{1}{3}(t+3)^3 - (t+3) - 1 = \frac{1}{3}t^3 + 3t^2 + 8t + 5;$$

② 当 $t < -1$ 且 $-1 \leq t+3 < 1$, 即 $-4 \leq t < -2$ 时, $h(x)$ 在区间 $[t, -1]$ 上单调递增, 在区间 $[-1, t+3]$ 上单调递减, 所以 $h(x)$ 在区间 $[t, t+3]$ 上的最大值为 $h(-1) = -\frac{1}{3}$;

当 $t < -1$ 且 $t+3 \geq 1$, 即 $-2 \leq t < -1$ 时, $t+3 < 2$ 且 $h(2) = h(-1)$,

所以 $h(x)$ 在区间 $[t, t+3]$ 上的最大值为 $h(-1) = -\frac{1}{3}$;

③ 当 $-1 \leq t < 1$ 时, $t+3 \geq 2 > 1$,

$h(x)$ 在区间 $[t, 1]$ 上单调递减, 在区间 $[1, t+3]$ 上单调递增,

而最大值为 $h(t)$ 与 $h(t+3)$ 中的较大者.

由 $h(t+3) - h(t) = 3(t+1)(t+2)$ 知, 当 $-1 \leq t < 1$ 时, $h(t+3) \geq h(t)$,

所以 $h(x)$ 在区间 $[t, t+3]$ 上的最大值为 $h(t+3) = \frac{1}{3}t^3 + 3t^2 + 8t + 5$;

④ 当 $t \geq 1$ 时, $h(x)$ 在区间 $[t, t+3]$ 上单调递增, 所以 $h(x)$ 在区间 $[t, t+3]$ 上的

最大值为 $h(t+3) = \frac{1}{3}t^3 + 3t^2 + 8t + 5$.

【标注】【素养】数学运算; 逻辑推理

【思想】 分类讨论思想

【知识点】 直接求函数的最值 (不含参)

4. 已知函数 $f(x) = x^3 - ax^2 - a^2x$, 其中 $a \geq 0$.

- (1) 若 $f'(0) = -4$, 求 a 的值, 并求此时曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程;
 (2) 求函数 $f(x)$ 在区间 $[0, 2]$ 上的最小值.

【答案】 (1) $5x + y = 0$.

- (2) 当 $0 \leq a < 2$ 时, 函数 $f(x)$ 的最小值为 $-a^3$,
 $a \geq 2$ 时, 函数 $f(x)$ 的最小值为 $8 - 4a - 2a^2$

【解析】 (1) 已知函数 $f(x) = x^3 - ax^2 - a^2x$,

$$\text{所以 } f'(x) = 3x^2 - 2ax - a^2, f'(0) = -a^2 = -4,$$

又 $a \geq 0$, 所以 $a = 2$.

$$\text{又 } f'(1) = -5, f(1) = -5,$$

所以曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 $5x + y = 0$.

$$(2) x \in [0, 2], f'(x) = 3x^2 - 2ax - a^2 = (x - a)(3x + a)$$

$$\text{令 } f'(x) = 0, \text{ 则 } x_1 = -\frac{a}{3}, x_2 = a.$$

(1) 当 $a = 0$ 时, $f'(x) = 3x^2 \geq 0$ 在 $[0, 2]$ 上恒成立,

所以函数 $f(x)$ 在区间 $[0, 2]$ 上单调递增, 所以 $f(x)_{\min} = f(0) = 0$;

(2) 当 $0 < a < 2$ 时, 在区间 $[0, a]$ 上, $f'(x) < 0$,

在区间 $(a, 2]$ 上, $f'(x) > 0$, 所以函数 $f(x)$ 在区间 $[0, a]$ 上单调递减,

在区间 $(a, 2]$ 上单调递增, 且 $x = a$ 是 $[0, 2]$ 上唯一极值点, 所以

$$f(x)_{\min} = f(a) = -a^3;$$

(3) 当 $a \geq 2$ 时, 在区间 $[0, 2]$ 上, $f'(x) \leq 0$ (仅有当 $a = 2$ 时 $f'(2) = 0$),

所以 $f(x)$ 在区间 $[0, 2]$ 上单调递减, 所以函数 $f(x)_{\min} = f(2) = 8 - 4a - 2a^2$.

综上所述, 当 $0 \leq a < 2$ 时, 函数 $f(x)$ 的最小值为 $-a^3$,

$a \geq 2$ 时, 函数 $f(x)$ 的最小值为 $8 - 4a - 2a^2$

【标注】【知识点】求函数最值 (含参二次型导函数)

三、含参极值最值问题

5. 已知函数 $f(x) = x^3 - 3ax^2 + 4$, 其中 $a \geq 0$.

- (1) 求函数 $f(x)$ 的极值.
 (2) 求函数 $f(x)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上的最小值.

【答案】 (1) $a = 0$ 时, $f(x)$ 无极值;

$a > 0$ 时, $f(x)$ 在 $x = 0$ 时取得极大值4, 在 $x = 2a$ 处取得极小值 $4 - 4a^3$
(2) $4 - 4a^3$.

【解析】 (1) $f'(x) = 3x^2 - 6ax = 3x(x - 2a)$

$a = 0$ 时, $f'(x) = 3x^2 \geq 0$, $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增, 无极值;

$a > 0$ 时, $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递增, $(0, 2a)$ 上单调递减, $(2a, +\infty)$ 单调递增,

所以 $f(x)$ 在 $x = 0$ 时取得极大值4, 在 $x = 2a$ 处取得极小值 $4 - 4a^3$

(2) 当 $a = 0$ 时, $f(x) = x^3 + 4$ 是 $\mathbf{R}$ 上的增函数,

在区间 $[0, +\infty)$ 上的最小值为 $f(0) = 4$.

当 $a > 0$ 时, $f'(x) = 3x(x - 2a)$.

在区间 $(0, 2a)$ 上 $f'(x) < 0$, $f(x)$ 是减函数, 在区间 $(2a, +\infty)$ 上 $f'(x) > 0$, $f(x)$ 是增函数.

所以, 在区间 $[0, +\infty)$ 上 $f(x)$ 的最小值为 $f(2a)$,

$$f(2a) = 8a^3 - 12a^3 + 4 = 4 - 4a^3.$$

综上, 函数 $f(x)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上的最小值为 $4 - 4a^3$.

【标注】【知识点】利用导数求函数的最值; 求解函数极值

6. 已知函数 $f(x) = x^3 - 3ax^2 + 4$, 其中 $a \geq 0$.

(1) 若 $a = 1$, 求函数 $f(x)$ 的极值点和极值.

(2) 求函数 $f(x)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上的最小值.

【答案】 (1) 函数 $f(x)$ 的极小值点为 $x = 2$, 极小值为 $f(2) = 0$; 极大值点为 $x = 0$, 极大值为 $f(0) = 4$.

(2) $4 - 4a^3$.

【解析】 (1) 当 $a = 1$ 时, $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$, $f'(x) = 3x^2 - 6x$.

令 $f'(x) = 0$, 得 $x = 0$ 或 $x = 2$.

所以, 在区间 $(-\infty, 0)$ 上, $f'(x) > 0$, 函数 $f(x)$ 是增函数;

在区间 $(0, 2)$ 上, $f'(x) < 0$, 函数 $f(x)$ 是减函数;

在区间 $(2, +\infty)$ 上, $f'(x) > 0$, 函数 $f(x)$ 是增函数.

所以, 函数 $f(x)$ 的极小值点为 $x = 2$, 极小值为 $f(2) = 0$; 极大值点为 $x = 0$, 极大值为 $f(0) = 4$.

(2) 当 $a = 0$ 时, $f(x) = x^3 + 4$ 是 $\mathbf{R}$ 上的增函数,

在区间 $[0, +\infty)$ 上的最小值为 $f(0) = 4$.

当 $a > 0$ 时, $f'(x) = 3x(x - 2a)$.

在区间 $(0, 2a)$ 上 $f'(x) < 0$, $f(x)$ 是减函数, 在区间 $(2a, +\infty)$ 上 $f'(x) > 0$, $f(x)$ 是增函数 .

所以, 在区间 $[0, +\infty)$ 上 $f(x)$ 的最小值为 $f(2a)$,

$$f(2a) = 8a^3 - 12a^3 + 4 = 4 - 4a^3 .$$

综上, 函数 $f(x)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上的最小值为 $4 - 4a^3$.

【标注】【知识点】求解函数极值；利用导数求函数的最值