

含参函数的单调性练习题

一、一次型问题

1. 已知函数 $f(x) = ax - 1 - \ln x$, $a \in \mathbf{R}$.

讨论函数 $f(x)$ 的单调区间.

【答案】 (1) ①当 $a \leq 0$ 时, $f(x)$ 的递减区间是 $(0, +\infty)$, 无递增区间;

②当 $a > 0$ 时, $f(x)$ 的递增区间是 $(\frac{1}{a}, +\infty)$, 递减区间是 $(0, \frac{1}{a})$.

【解析】 (1) 在区间 $(0, +\infty)$ 上, $f'(x) = a - \frac{1}{x} = \frac{ax - 1}{x}$.

①若 $a \leq 0$, 则 $f'(x) < 0$, $f(x)$ 是区间 $(0, +\infty)$ 上的减函数;

②若 $a > 0$, 令 $f'(x) = 0$ 得 $x = \frac{1}{a}$.

在区间 $(0, \frac{1}{a})$ 上, $f'(x) < 0$, 函数 $f(x)$ 是减函数;

在区间 $(\frac{1}{a}, +\infty)$ 上, $f'(x) > 0$, 函数 $f(x)$ 是增函数;

综上所述, ①当 $a \leq 0$ 时, $f(x)$ 的单调递减区间是 $(0, +\infty)$, 无单调递增区间;

②当 $a > 0$ 时, $f(x)$ 的单调递增区间是 $(\frac{1}{a}, +\infty)$, 单调递减区间是 $(0, \frac{1}{a})$.

【标注】 【知识点】利用导数解决不等式恒成立问题; 求函数单调区间 (含参一次型导函数)

【思想】 分类讨论思想

2. 已知 $a \in \mathbf{R}$, 函数 $f(x) = \frac{a}{x} + \ln x - 1$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的单调区间.

(2) 求 $f(x)$ 在区间 $(0, e]$ 上的最小值.

【答案】 (1) 当 $a \leq 0$ 时, $f(x)$ 的单调增区间为 $(0, +\infty)$, 无减区间,

当 $a > 0$ 时, $f(x)$ 的单调增区间为 $(a, +\infty)$,

单调减区间为 $(0, a)$.

(2) 当 $a \leq 0$ 时, $f(x)$ 无最小值;

当 $0 < a < e$ 时, $f(x)$ 的最小值为 $\ln a$;

当 $a \geq e$ 时, $f(x)$ 的最小值为 $\frac{a}{e}$.

【解析】 (1) $f'(x) = -\frac{a}{x^2} + \frac{1}{x} = \frac{x - a}{x^2}$,

当 $a \leq 0$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增.

当 $a > 0$ 时, 令 $f'(x) > 0$, 得 $x > a$,

令 $f'(x) < 0$, 得 $0 < x < a$.

$\therefore f(x)$ 在 $(0, a)$ 上单调递减,

在 $(a, +\infty)$ 上单调递增.

综上, 当 $a \leq 0$ 时, $f(x)$ 的单调增区间为 $(0, +\infty)$, 无减区间,

当 $a > 0$ 时, $f(x)$ 的单调增区间为 $(a, +\infty)$,

单调减区间为 $(0, a)$.

(2) 令 $f'(x) = 0$, 得 $x = a$,

当 $a \leq 0$ 时, $f(x)$ 在 $(0, e]$ 上单调递增, 无最小值;

当 $0 < a < e$ 时, $f(x)$ 在 $(0, a)$ 上单调递减,

在 (a, e) 上单调递增,

$f(x)$ 的最小值为 $f(a) = \ln a$;

当 $a \geq e$ 时, $f(x)$ 在 $(0, e]$ 上单调递减,

$f(x)$ 的最小值为 $f(e) = \frac{a}{e}$.

综上, 当 $a \leq 0$ 时, $f(x)$ 无最小值;

当 $0 < a < e$ 时, $f(x)$ 的最小值为 $\ln a$;

当 $a \geq e$ 时, $f(x)$ 的最小值为 $\frac{a}{e}$.

【标注】【知识点】求函数最值 (含参一次型导函数)

二、二次型问题

3. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{2}ax^2 - \ln x$, $a \in \mathbf{R}$.

(1) 当 $a = 2$ 时, 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程;

(2) 讨论 $f(x)$ 的单调性.

【答案】 (1) $x - y = 0$.

(2) (i) 当 $a \leq 0$ 时, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减.

(ii) 当 $a > 0$ 时, $f(x)$ 在 $(0, \sqrt{\frac{1}{a}})$ 上单调递减, 在 $(\sqrt{\frac{1}{a}}, +\infty)$ 上单调递增.

【解析】 (1) 当 $a = 2$ 时, $f(x) = x^2 - \ln x$,

$$f'(x) = 2x - \frac{1}{x} = \frac{2x^2 - 1}{x}.$$

则 $f'(1) = 1$, $f(1) = 1$,

曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 $l: y - f(1) = f'(1)(x - 1)$,

所以切线方程为 $l: x - y = 0$.

(2) 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$.

$$f'(x) = ax - \frac{1}{x} = \frac{ax^2 - 1}{x}.$$

(i) 若 $a \leq 0$, $f'(x) < 0$ 恒成立, 则 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减.

(ii) 若 $a > 0$, 令 $f'(x) = 0$, 则 $x = \sqrt{\frac{1}{a}}$.

当 x 变化时, $f'(x)$ 与 $f(x)$ 的变化情况如下表:

x	$(0, \sqrt{\frac{1}{a}})$	$\sqrt{\frac{1}{a}}$	$(\sqrt{\frac{1}{a}}, +\infty)$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	极小值	$\nearrow$

所以 $f(x)$ 在 $(0, \sqrt{\frac{1}{a}})$ 上单调递减, 在 $(\sqrt{\frac{1}{a}}, +\infty)$ 上单调递增.

【标注】【知识点】求函数单调区间 (含参二次型导函数)

4. 已知函数 $f(x) = 2\ln x + \frac{1}{2}ax^2 - (2a+1)x$ ($a > 0$), 讨论 $f(x)$ 的单调性.

【答案】 答案见解析

【解析】 $f'(x) = \frac{(x-2)(ax-1)}{x}$,

① 当 $0 < a < \frac{1}{2}$ 时, 由 $f'(x) > 0$ 得 $0 < x < 2$ 或 $x > \frac{1}{a}$,

所以 $f(x)$ 的单调增区间是 $(0, 2)$, $(\frac{1}{a}, +\infty)$,

由 $f'(x) < 0$ 得 $2 < x < \frac{1}{a}$, 所以 $f(x)$ 的单调减区间是 $(2, \frac{1}{a})$;

② $a = \frac{1}{2}$ 时, $f'(x) \geq 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立, 且当且仅当 $f'(2) = 0$,

$\therefore f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递增;

③ 当 $a > \frac{1}{2}$ 时, 由 $f'(x) > 0$ 得 $0 < x < \frac{1}{a}$ 或 $x > 2$, 所以 $f(x)$ 的单调增区间是 $(0, \frac{1}{a})$,

$(2, +\infty)$,

由 $f'(x) < 0$ 得 $\frac{1}{a} < x < 2$, 所以 $f(x)$ 的单调减区间是 $(\frac{1}{a}, 2)$.

【标注】【知识点】求函数单调区间 (含参二次型导函数)

5. 已知 $a > 0$, 函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1-a}{2}x^2 - ax - a$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性.

(2) 当 $a = 1$ 时, 设函数 $g(t)$ 表示 $f(x)$ 在区间 $[t, t+3]$ 上最大值与最小值的差, 求 $g(t)$ 在区间 $[-3, -1]$ 上的最小值.

【答案】 (1) $f(x)$ 在 $(-\infty, -1)$, $(a, +\infty)$ 上单调递增, 在 $(-1, a)$ 上单调递减.

(2) $\frac{4}{3}$.

【解析】 (1) $f'(x) = x^2 + (1-a)x - a = (x+1)(x-a)$,

$\because a > 0$,

$\therefore$ 当 $x < -1$ 或 $x > a$ 时, $f'(x) > 0$,

当 $-1 < x < a$ 时, $f'(x) < 0$,

$\therefore f(x)$ 在 $(-\infty, -1)$, $(a, +\infty)$ 上单调递增, 在 $(-1, a)$ 上单调递减.

(2) 当 $a = 1$ 时, 由 (1) 知 $f(x)$ 在区间 $[-3, -1]$ 上单调递增,

在区间 $[-1, 1]$ 上单调递减, 在区间 $[1, 2]$ 上单调递增,

当 $t \in [-3, -2]$ 时, $t+3 \in [0, 1]$, $f(x)$ 在区间 $[t, -1]$ 上单调递增,

在区间 $[-1, t+3]$ 上单调递减,

$f(t+3) - f(t) = 3(t+1)(t+2) \geq 0$,

因此 $f(x)$ 在区间 $[t, t+3]$ 上最大值为 $f(-1)$, 最小值为 $f(t)$,

$\therefore g(t) = f(-1) - f(t) = -\frac{1}{3} - f(t)$,

$\because f(t)$ 在区间 $[-3, -2]$ 上单调递增,

$\therefore g(t)_{\min} = -\frac{1}{3} - f(-2) = \frac{4}{3}$,

当 $t \in [-2, -1]$ 时, $t+3 \in [1, 2]$, $f(x)$ 在 $[-2, -1]$; $[1, 2]$ 上单调递增,

$\therefore f(-2) \leq f(t) \leq f(-1)$, $f(1) \leq f(t+3) \leq f(2)$,

$\therefore g(t)_{\min} = -\frac{1}{3} - f(1) = \frac{4}{3}$,

综上所述, $g(t)$ 在区间 $[-3, 1]$ 上的最小值是 $\frac{4}{3}$.

【标注】【知识点】求函数单调区间 (含参二次型导函数); 利用单调性求函数最值

三、指数型问题

6. 已知函数 $f(x) = e^x - 2ax + a + 1$.

试讨论 $f(x)$ 的单调性.

【答案】 (1) $a \leq 0$, $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,

$a > 0$, $(-\infty, \ln 2a)$ 单调递减, $(\ln 2a, +\infty)$ 单调递增.

【解析】(1) 略.

【标注】【知识点】求函数单调区间(含参指对型导函数)

四、对数型问题

7. 已知函数 $f(x) = (ax^2 - x) \ln x - \frac{1}{2}ax^2 + x$, $a \in R$, 求函数 $f(x)$ 的单调区间.

【答案】答案见解析

【解析】函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$

$$f'(x) = (ax^2 - x) \frac{1}{x} + (2ax - 1) \ln x - ax + 1 = (2ax - 1) \ln x,$$

① 当 $a \leq 0$ 时, $2ax - 1 < 0$, 在 $(0, 1)$ 上 $f'(x) > 0$, 在 $(1, +\infty)$ 上 $f'(x) < 0$

所以 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增, 在 $(1, +\infty)$ 上递减;

② 当 $0 < a < \frac{1}{2}$ 时, 在 $(0, 1)$ 和 $(\frac{1}{2a}, +\infty)$ 上 $f'(x) > 0$, 在 $(1, \frac{1}{2a})$ 上 $f'(x) < 0$

所以 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 和 $(\frac{1}{2a}, +\infty)$ 上单调递增, 在 $(1, \frac{1}{2a})$ 上递减;

③ 当 $a = \frac{1}{2}$ 时, 在 $(0, +\infty)$ 上 $f'(x) \geq 0$ 且仅有 $f'(1) = 0$,

所以 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增;

④ 当 $a > \frac{1}{2}$ 时, 在 $(0, \frac{1}{2a})$ 和 $(1, +\infty)$ 上 $f'(x) > 0$, 在 $(\frac{1}{2a}, 1)$ 上 $f'(x) < 0$

所以 $f(x)$ 在 $(0, \frac{1}{2a})$ 和 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 在 $(\frac{1}{2a}, 1)$ 上递减.

【标注】【知识点】导数的运算

【知识点】导数与单调性

【知识点】函数的平均变化率、瞬时速度与瞬时变化率