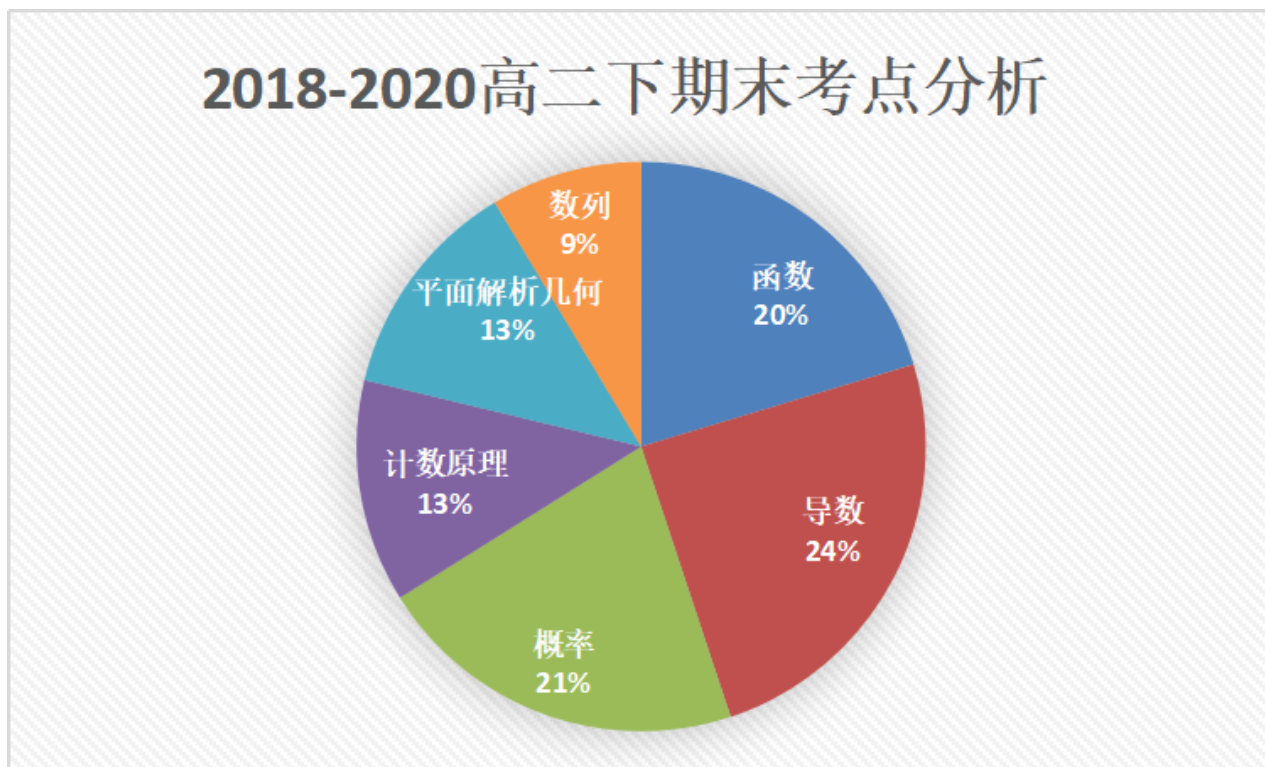


含参函数的单调性

1. 考点分析

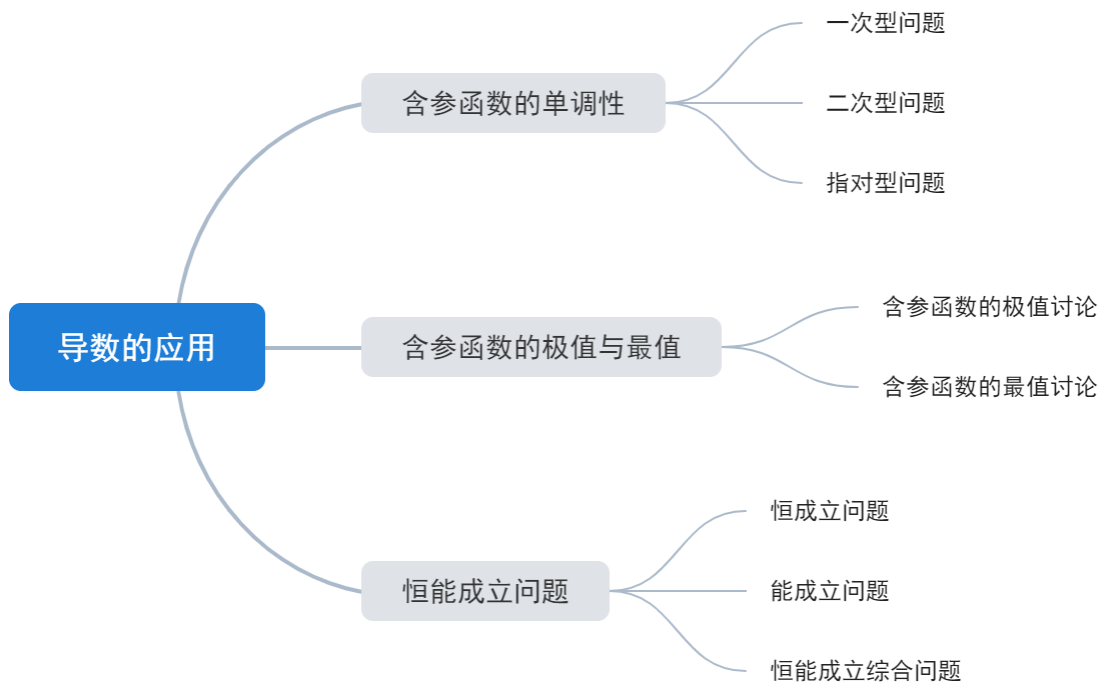
🔗 考点占比



🔗 考点分析

2018-2020期末考试考点频次分析		
模块	考点	考察频次
导数的基础	利用公式和四则运算法则求导	81
	复合函数的求导法则	3
	导数的几何意义	26
	函数的平均变化率与瞬时变化率	4
	导数的定义	2
导数的应用	导数与单调性	63
	导数与最值	35
	导数与极值	26

知识梳理



一、一次型问题

1. 参数在一次项系数上

如： $f(x) = e^x(ax + 1) > 0, x \in R, a \in R$:

(i) 当 $a = 0$ 时, $f'(x) = \underline{\hspace{2cm}}$, $f(x)$ 区间为 $\underline{\hspace{2cm}}$;

(ii) 当 $a > 0$ 时,

由 $f'(x) > 0$, 得 $\underline{\hspace{2cm}}$, $f(x)$ 增区间是 $\underline{\hspace{2cm}}$

由 $f'(x) < 0$, 得 $\underline{\hspace{2cm}}$, $f(x)$ 减区间是 $\underline{\hspace{2cm}}$

(iii) 当 $a < 0$ 时,

由 $f'(x) > 0$, 得 $\underline{\hspace{2cm}}$, $f(x)$ 增区间是 $\underline{\hspace{2cm}}$

由 $f'(x) < 0$, 得 $\underline{\hspace{2cm}}$, $f(x)$ 减区间是 $\underline{\hspace{2cm}}$

如： $f(x) = e^x(ax + 1) > 0, x \in R, a \in R$:

(i) 当 $a = 0$ 时, $f'(x) = e^x > 0$, $f(x)$ 增区间为 R ;

(ii) 当 $a > 0$ 时,

由 $f'(x) > 0$, 得 $x > -\frac{1}{a}$, $f(x)$ 增区间是 $(-\frac{1}{a}, +\infty)$

由 $f'(x) < 0$, 得 $x < -\frac{1}{a}$, $f(x)$ 减区间是 $(-\infty, -\frac{1}{a})$

(iii) 当 $a < 0$ 时,

由 $f'(x) > 0$, 得 $x < -\frac{1}{a}$, $f(x)$ 增区间是 $(-\infty, -\frac{1}{a})$
 由 $f'(x) < 0$, 得 $x > -\frac{1}{a}$, $f(x)$ 减区间是 $(-\frac{1}{a}, +\infty)$

例1

1. 已知函数 $f(x) = \ln(x-1) - k(x-1) + 1$.

求函数 $f(x)$ 的单调区间.

【答案】 (1) 当 $k \leq 0$ 时, $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增;

当 $k > 0$ 时, $f(x)$ 在 $(1, \frac{1}{k} + 1)$ 上单调递增, 在 $(\frac{1}{k} + 1, +\infty)$ 上单调递减.

【解析】 (1) $\because f(x) = \ln(x-1) - k(x-1) + 1$,

$$\therefore x > 1, f'(x) = \frac{1}{x-1} - k = \frac{k+1-kx}{x-1},$$

当 $k \leq 0$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上递增;

当 $k > 0$ 时, $f(x)$ 在 $(1, \frac{1}{k} + 1)$ 上单调递增, 在 $(\frac{1}{k} + 1, +\infty)$ 上单调递减.

【标注】【知识点】不等式中的恒成立与能成立问题; 通过构造函数证明不等式

2. 已知函数 $f(x) = (a+1)x - \ln x (a \in \mathbf{R})$.

(1) 求 $f(x)$ 的单调区间.

(2) 求 $f(x)$ 在区间 $(0, e]$ 上的最小值.

【答案】 (1) $a \leq -1$ 时, $f(x)$ 的递减区间为 $(0, +\infty)$;

$a > -1$ 时, $f(x)$ 的递减区间为 $(0, \frac{1}{a+1})$,

递增区间为 $(\frac{1}{a+1}, +\infty)$.

(2) $a \leq -1 + \frac{1}{e}$ 时, $f(x)_{\min} = f(e) = (a+1)e - 1$;

$a > -1 + \frac{1}{e}$ 时, $f(x)_{\min} = f(\frac{1}{a+1}) = 1 + \ln(a+1)$.

【解析】 (1) $x > 0$,

$$f'(x) = (a+1) - \frac{1}{x} = \frac{(a+1)x - 1}{x},$$

$$\text{令 } f'(x) = 0, (a+1)x - 1 = 0,$$

(1) 当 $a+1 = 0$ 时, $x > 0$ 时, $f'(x) = -\frac{1}{x} < 0$,

$f(x)$ 的递减区间为 $(0, +\infty)$.

(2) 当 $a+1 \neq 0$ 时, 由 $(a+1)x - 1 = 0$ 得 $x = \frac{1}{a+1}$,

① $\frac{1}{a+1} > 0$ 时, 得 $a > -1$,

当 x 变化时, $f'(x)$, $f(x)$ 的变化情况如下表:

x	$\left(0, \frac{1}{a+1}\right)$	$\frac{1}{a+1}$	$\left(\frac{1}{a+1}, +\infty\right)$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	极小值	$\nearrow$

$f(x)$ 的递减区间为 $\left(0, \frac{1}{a+1}\right)$, 递增区间为 $\left(\frac{1}{a+1}, +\infty\right)$.

② $\frac{1}{a+1} < 0$ 时, 得 $a < -1$.

$x > 0$ 时, $f'(x) < 0$,

$f(x)$ 的递减区间为 $(0, +\infty)$.

综上, $a \leq -1$ 时, $f(x)$ 的递减区间为 $(0, +\infty)$;

$a > -1$ 时, $f(x)$ 的递减区间为 $\left(0, \frac{1}{a+1}\right)$,

递增区间为 $\left(\frac{1}{a+1}, +\infty\right)$.

(2) 由 (1) 知,

(1) $a \leq -1$ 时, $f(x)$ 在 $(0, e]$ 上单调递减,

所以 $f(x)_{\min} = f(e) = (a+1)e - 1$.

(2) $a > -1$ 时,

① $\frac{1}{a+1} \geq e$ 时, 得 $-1 < a \leq -1 + \frac{1}{e}$, $f(x)$ 在 $(0, e]$ 上单调递减,

所以 $f(x)_{\min} = f(e) = (a+1)e - 1$.

② $\frac{1}{a+1} < e$ 时, 得 $a > -1 + \frac{1}{e}$.

当 x 变化时, $f'(x)$, $f(x)$ 的变化情况如下表:

x	$\left(0, \frac{1}{a+1}\right)$	$\frac{1}{a+1}$	$\left(\frac{1}{a+1}, +\infty\right)$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	极小值	$\nearrow$

$f(x)$ 在定义域内只有一个极小值, 所以它是最小值,

$f(x)_{\min} = f\left(\frac{1}{a+1}\right) = 1 + \ln(a+1)$.

综上 $a \leq -1 + \frac{1}{e}$ 时, $f(x)_{\min} = f(e) = (a+1)e - 1$;

$a > -1 + \frac{1}{e}$ 时, $f(x)_{\min} = f\left(\frac{1}{a+1}\right) = 1 + \ln(a+1)$.

【标注】【知识点】利用导数解决不等式恒成立问题; 求函数最值 (含参一次型导函数)

3. 已知函数 $f(x) = ax + \ln x (a \in \mathbf{R})$.

求 $f(x)$ 的单调区间;

【答案】 (1) ①当 $a \geq 0$ 时, $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0, +\infty)$.

②当 $a < 0$ 时, $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0, -\frac{1}{a})$; 单调递减区间为 $(-\frac{1}{a}, +\infty)$.

【解析】 (1) $f'(x) = a + \frac{1}{x} = \frac{ax+1}{x} (x > 0)$.

①当 $a \geq 0$ 时, 由于 $x > 0$, 故 $ax+1 > 0$, $f'(x) > 0$,

所以, $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0, +\infty)$.

②当 $a < 0$ 时, 由 $f'(x) = 0$, 得 $x = -\frac{1}{a}$.

在区间 $(0, -\frac{1}{a})$ 上, $f'(x) > 0$; 在区间 $(-\frac{1}{a}, +\infty)$ 上, $f'(x) < 0$,

所以, $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0, -\frac{1}{a})$; 单调递减区间为 $(-\frac{1}{a}, +\infty)$.

【标注】【知识点】利用导数解决不等式恒成立与能成立综合问题

2. 参数在常数项上

如: $f'(x) = e^x(x+a) > 0, x > 0, a \in \mathbf{R}$:

(i) 当 $a \geq 0$ 时, _____ 恒成立, $f(x)$ _____ 区间为 _____;

(ii) 当 $a < 0$ 时,

由 $f'(x) > 0$, 得 _____, $f(x)$ 增区间为 _____;

由 $f'(x) < 0$, 得 _____, $f(x)$ 增区间为 _____.

如: $f'(x) = e^x(x+a) > 0, x > 0, a \in \mathbf{R}$:

(i) 当 $a \geq 0$ 时, $f'(x) > 0$ 恒成立, $f(x)$ 增区间为 $(0, +\infty)$;

(ii) 当 $a < 0$ 时,

由 $f'(x) > 0$, 得 $x > -a$, $f(x)$ 增区间为 $(-a, +\infty)$;

由 $f'(x) < 0$, 得 $x < -a$, $f(x)$ 增区间为 $(0, -a)$.

例2

4. 已知函数 $f(x) = \ln x + \frac{a}{x}$.

(1) 当 $a < 0$ 时, 求函数 $f(x)$ 的单调区间.

(2) 若函数 $f(x)$ 在 $[1, e]$ 上的最小值是 $\frac{3}{2}$, 求 a 的值.

【答案】 (1) 在其定义域 $(0, +\infty)$ 上是单调递增的

(2) $\sqrt{e}$

【解析】(1) 函数 $f(x) = \ln x + \frac{a}{x}$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{a}{x^2} = \frac{x-a}{x^2}$.

$\because a < 0, \therefore f'(x) > 0$,

故函数在其定义域 $(0, +\infty)$ 上是单调递增的.

(2) 在 $[1, e]$ 上, 分如下情况讨论:

① 当 $a \leq 1$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $[1, e]$ 单调递增, 其最小值为 $f(1) = a < 1$, 这与函数在 $[1, e]$ 上的最小值是 $\frac{3}{2}$ 相矛盾.

② 当 $1 < a < e$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $[1, a]$ 上有 $f'(x) < 0$, 单调递减, 在 $(a, e]$ 上有 $f'(x) > 0$, 单调递增, 所以函数 $f(x)$ 满足最小值为 $f(a) = \ln a + 1$, 由 $\ln a + 1 = \frac{3}{2}$, 得 $a = \sqrt{e}$.

③ 当 $a \geq e$ 时, 显然函数 $f(x)$ 在 $[1, e]$ 上单调递减, 其最小值为 $f(e) = 1 + \frac{a}{e} > 2$, 与最小值是 $\frac{3}{2}$ 相矛盾; 综上所述, a 的值为 $\sqrt{e}$.

【标注】【知识点】利用导数求函数的单调性、单调区间; 利用导数求函数的最值

练2

5. 判断函数 $f(x) = x^2 + ax + 3$ 在 $(3, 4)$ 上的单调性.

【答案】答案见解析.

【解析】 $f'(x) = 2x + a, x = -\frac{a}{2}$

当 $-\frac{a}{2} \leq 3, a \geq -6$ 时, $(3, 4)$ 单增

当 $3 < -\frac{a}{2} < 4, -8 < a < -6, (3, -\frac{a}{2})$ 单减, $(-\frac{a}{2}, 4)$ 单增

当 $-\frac{a}{2} \geq 4, a \leq -8, (3, 4)$ 单减.

【标注】【知识点】求函数单调区间 (含参一次型导函数)

二、二次型问题

1. 参数在二次项系数上

能因式分解型

如: $f'(x) = a(x+1)(x-a) > 0, x \in R, a \in R$:

当 $a = 0$ 时, _____恒成立, $f(x)$ 为常函数;

当 $a > 0$ 时,

由 $f'(x) > 0$, 得_____, $f(x)$ 的增区间是_____;

由 $f'(x) < 0$, 得_____, $f(x)$ 的减区间为_____.

当 $a < 0$ 时,

(i) $a = -1$, _____, $f(x)$ _____区间为_____;

(ii) $a < -1$ 时,

由 $f'(x) > 0$, 得_____, $f(x)$ 的增区间是_____;

由 $f'(x) < 0$, 得_____, $f(x)$ 的减区间是_____.

(iii) $-1 < a < 0$ 时,

由 $f'(x) > 0$, 得_____, $f(x)$ 的增区间是_____;

由 $f'(x) < 0$, 得_____, $f(x)$ 的减区间是_____.

能因式分解型

如: $f'(x) = a(x+1)(x-a) > 0, x \in \mathbf{R}, a \in \mathbf{R}$:

当 $a = 0$ 时, $f'(x) = 0$ 恒成立, $f(x)$ 为常函数;

当 $a > 0$ 时,

由 $f'(x) > 0$, 得 $x < -1$ 或 $x > a$, $f(x)$ 的增区间是 $(-\infty, -1), (a, +\infty)$;

由 $f'(x) < 0$, 得 $-1 < x < a$, $f(x)$ 的减区间为 $(-1, a)$.

当 $a < 0$ 时,

(i) $a = -1, f'(x) = -(x+1)^2 \leq 0$ 且不恒为0, $f(x)$ 减区间为 $(-\infty, +\infty)$;

(ii) $a < -1$ 时,

由 $f'(x) > 0$, 得 $a < x < -1$, $f(x)$ 的增区间是 $(a, -1)$;

由 $f'(x) < 0$, 得 $x < a$ 或 $x > -1$, $f(x)$ 的减区间是 $(-\infty, a), (-1, +\infty)$.

(iii) $-1 < a < 0$ 时,

由 $f'(x) > 0$, 得 $-1 < x < a$, $f(x)$ 的增区间是 $(-1, a)$;

由 $f'(x) < 0$, 得 $x < -1$ 或 $x > a$, $f(x)$ 的减区间是 $(-\infty, -1), (a, +\infty)$.

(注: 分类要有层次感, 在大类下还可以再分小类, 这样逻辑比较清晰严谨, 不易混乱.)

例1

6. 已知函数 $f(x) = \ln x - ax + \frac{1-a}{x} - 1 (a \in \mathbf{R})$, 当 $a \leq \frac{1}{2}$ 时, 讨论 $f(x)$ 的单调性.

【答案】 当 $a \leq 0$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减; 函数 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增;

当 $a = \frac{1}{2}$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减;

当 $0 < a < \frac{1}{2}$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减; 函数 $f(x)$ 在 $(1, \frac{1}{a} - 1)$ 上单调递增; 函数 $f(x)$ 在 $(\frac{1}{a} - 1, +\infty)$ 上单调递减.

【解析】 因为 $f(x) = \ln x - ax + \frac{1-a}{x} - 1$,

$$\text{所以 } f'(x) = \frac{1}{x} - a + \frac{a-1}{x^2} = -\frac{ax^2 - x + 1 - a}{x^2}, \quad x \in (0, +\infty),$$

$$\text{令 } h(x) = ax^2 - x + 1 - a, \quad x \in (0, +\infty),$$

$$(1) \text{ 当 } a = 0 \text{ 时, } h(x) = -x + 1, \quad x \in (0, +\infty),$$

所以, 当 $x \in (0, 1)$ 时, $h(x) > 0$ 此时, $f'(x) < 0$, 函数 $f(x)$ 单调递减;

当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $h(x) < 0$, 此时 $f'(x) > 0$, 函数 $f(x)$ 单调递增.

$$(2) \text{ 当 } a \neq 0 \text{ 时, 由 } f'(x) = 0, \text{ 即 } ax^2 - x + 1 - a = 0, \text{ 解得 } x_1 = 1, x_2 = \frac{1}{a} - 1,$$

当 $a = \frac{1}{2}$ 时, $x_1 = x_2$, $h(x) > 0$, 此时 $f'(x) \leq 0$, 函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减.

$$\text{当 } 0 < a < \frac{1}{2} \text{ 时, } \frac{1}{a} - 1 > 1 > 0,$$

$x \in (0, 1)$ 时, $h(x) > 0$, 此时 $f'(x) < 0$, 函数 $f(x)$ 单调递减;

$x \in (1, \frac{1}{a} - 1)$ 时, $h(x) < 0$, 此时 $f'(x) > 0$, 函数 $f(x)$ 单调递增;

$x \in (\frac{1}{a} - 1, +\infty)$ 时, $h(x) > 0$, 此时 $f'(x) < 0$, 函数 $f(x)$ 单调递减.

$$(3) \text{ 当 } a < 0 \text{ 时, 由于 } \frac{1}{a} - 1 < 0,$$

$x \in (0, 1)$ 时, $h(x) > 0$, 此时 $f'(x) < 0$, 函数 $f(x)$ 单调递减;

$x \in (1, +\infty)$ 时, $h(x) < 0$, 此时 $f'(x) > 0$, 函数 $f(x)$ 单调递增.

综上所述:

当 $a \leq 0$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减; 函数 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增;

当 $a = \frac{1}{2}$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减;

当 $0 < a < \frac{1}{2}$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减; 函数 $f(x)$ 在 $(1, \frac{1}{a} - 1)$ 上单调递增; 函数 $f(x)$ 在 $(\frac{1}{a} - 1, +\infty)$ 上单调递减.

【标注】 【知识点】利用导数求函数的单调性、单调区间

练1

$$7. \text{ 已知函数 } f(x) = \frac{1}{3}ax^3 - \frac{1}{2}(a-1)x^2 - x + \frac{11}{27}.$$

当 $a < 0$ 时, 求 $f(x)$ 的单调区间.

【答案】 (1) 当 $a = -1$ 时, $f(x)$ 的递减区间是 $(-\infty, +\infty)$, 无递增区间;

当 $a < -1$ 时, $f(x)$ 的单调递增区间是 $(-\frac{1}{a}, 1)$, 单调递减区间是 $(-\infty, -\frac{1}{a})$, $(1, +\infty)$;

当 $-1 < a < 0$ 时, $f(x)$ 的单调递增区间是 $\left(1, -\frac{1}{a}\right)$, 单调递减区间是 $(-\infty, 1)$, $\left(-\frac{1}{a}, +\infty\right)$.

【解析】(1) 由 $f(x) = \frac{1}{3}ax^3 - \frac{1}{2}(a-1)x^2 - x + \frac{11}{27}$, 得

$$f'(x) = ax^2 - (a-1)x - 1 = (x-1)(ax+1)$$

① 当 $a = -1$ 时, $f'(x) = -(x-1)^2 \leq 0$.

所以 $f(x)$ 的递减区间是 $(-\infty, +\infty)$.

② 当 $a < -1$ 时, $f'(x)$ 及 $f(x)$ 随 x 的变化情况如下表:

x	$(-\infty, -\frac{1}{a})$	$-\frac{1}{a}$	$(-\frac{1}{a}, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$

$\therefore f(x)$ 的单调递增区间是 $(-\frac{1}{a}, 1)$, 单调递减区间是 $(-\infty, -\frac{1}{a})$, $(1, +\infty)$.

③ 当 $-1 < a < 0$ 时, $f'(x)$ 及 $f(x)$ 随 x 的变化情况如下表:

x	$(-\infty, 1)$	1	$(1, -\frac{1}{a})$	$-\frac{1}{a}$	$(-\frac{1}{a}, +\infty)$
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 的单调递增区间是 $(1, -\frac{1}{a})$, 单调递减区间是 $(-\infty, 1)$, $(-\frac{1}{a}, +\infty)$.

【标注】【知识点】求函数单调区间(含参二次型导函数); 一个函数的自对称问题

不能因式分解型

如: $f'(x) = ax^2 + x + 1 > 0$, $x \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$:

当 $a = 0$ 时,

由 $f'(x) = x + 1 > 0$, 得 _____, $f(x)$ 的增区间是 _____;

由 $f'(x) = x + 1 < 0$, 得 _____, $f(x)$ 的减区间是 _____.

当 $a > 0$ 时, $\Delta = 1 - 4a$:

(i) 当 $\Delta \leq 0$ 时, 即 _____,

$f'(x) = ax^2 + x + 1 \geq 0$ 恒成立且不恒为 0, $f(x)$ 的增区间是 $(-\infty, +\infty)$.

(ii) 当 $\Delta > 0$ 时, 即 _____,

由 $f'(x) = ax^2 + x + 1 > 0$, 得 _____

$f(x)$ 的增区间是_____

由 $f'(x) = ax^2 + x + 1 < 0$, 得_____

$f(x)$ 的减区间是_____

当 $a < 0$ 时, $\Delta = 1 - 4a > 0$:

由 $f'(x) = ax^2 + x + 1 > 0$, 得_____

$f(x)$ 的增区间是_____

由 $f'(x) < 0$, 得_____

$f(x)$ 的减区间是_____

不能因式分解型

如: $f'(x) = ax^2 + x + 1 > 0, x \in \mathbf{R}, a \in \mathbf{R}$:

当 $a = 0$ 时,

由 $f'(x) = x + 1 > 0$, 得 $x > -1$, $f(x)$ 的增区间是 $(-1, +\infty)$;

由 $f'(x) = x + 1 < 0$, 得 $x < -1$, $f(x)$ 的减区间是 $(-\infty, -1)$.

当 $a > 0$ 时, $\Delta = 1 - 4a$:

(i) 当 $\Delta \leq 0$ 时, 即 $a \geq \frac{1}{4}$,

$f'(x) = ax^2 + x + 1 \geq 0$ 恒成立且不恒为0, $f(x)$ 的增区间是 $(-\infty, +\infty)$.

(ii) 当 $\Delta > 0$ 时, 即 $0 < a < \frac{1}{4}$,

由 $f'(x) = ax^2 + x + 1 > 0$, 得 $x < \frac{-1 - \sqrt{1 - 4a}}{2a}$ 或 $x > \frac{-1 + \sqrt{1 - 4a}}{2a}$

$f(x)$ 的增区间是 $(-\infty, \frac{-1 - \sqrt{1 - 4a}}{2a}) \cup (\frac{-1 + \sqrt{1 - 4a}}{2a}, +\infty)$

由 $f'(x) = ax^2 + x + 1 < 0$, 得 $\frac{-1 - \sqrt{1 - 4a}}{2a} < x < \frac{-1 + \sqrt{1 - 4a}}{2a}$,

$f(x)$ 的减区间是 $(\frac{-1 - \sqrt{1 - 4a}}{2a}, \frac{-1 + \sqrt{1 - 4a}}{2a})$.

当 $a < 0$ 时, $\Delta = 1 - 4a > 0$:

由 $f'(x) = ax^2 + x + 1 > 0$, 得 $\frac{-1 + \sqrt{1 - 4a}}{2a} < x < \frac{-1 - \sqrt{1 - 4a}}{2a}$,

$f(x)$ 的增区间是 $(\frac{-1 + \sqrt{1 - 4a}}{2a}, \frac{-1 - \sqrt{1 - 4a}}{2a})$.

由 $f'(x) < 0$, 得 $x < \frac{-1 + \sqrt{1 - 4a}}{2a}$ 或 $x > \frac{-1 - \sqrt{1 - 4a}}{2a}$,

$f(x)$ 的减区间是 $(-\infty, \frac{-1 + \sqrt{1 - 4a}}{2a}) \cup (\frac{-1 - \sqrt{1 - 4a}}{2a}, +\infty)$

例2

8. 已知函数 $f(x) = \ln(x+1) + a(x^2 - x)$, 其中 $a \in \mathbf{R}$, 求函数 $f(x)$ 的单调区间.

【答案】 ① 当 $a = 0$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $(-1, +\infty)$ 上单调递增;

②当 $a > \frac{8}{9}$ 时, 当 $x \in (-1, x_1)$ 时, 函数 $f(x)$ 单调递增;

当 $x \in (x_1, x_2)$ 时, 函数 $f(x)$ 单调递减;

当 $x \in (x_2, +\infty)$ 时, 函数 $f(x)$ 单调递增.

③当 $0 < a \leq \frac{8}{9}$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $(-1, +\infty)$ 上单调递增.

④当 $a < 0$ 时, 当 $x \in (-1, x_2)$ 时, 函数 $f(x)$ 单调递增;

当 $x \in (x_2, +\infty)$ 时, 函数 $f(x)$ 单调递减.

【解析】 由题意知函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-1, +\infty)$.

$$f'(x) = \frac{1}{x+1} + a(2x-1) = \frac{2ax^2 + ax - a + 1}{x+1}.$$

令 $g(x) = 2ax^2 + ax - a + 1$, $x \in (-1, +\infty)$.

①当 $a = 0$ 时, $g(x) = 1$,

此时 $f'(x) > 0$, 函数 $f(x)$ 在 $(-1, +\infty)$ 上单调递增.

②当 $a > 0$ 时, $\Delta = a^2 - 8a(1-a) = a(9a-8)$.

a. 当 $0 < a \leq \frac{8}{9}$ 时, $\Delta \leq 0$, $g(x) \geq 0$,

$f'(x) \geq 0$, 函数 $f(x)$ 在 $(-1, +\infty)$ 上单调递增.

b. 当 $a > \frac{8}{9}$ 时, $\Delta > 0$,

设方程 $2ax^2 + ax - a + 1 = 0$ 的两根为 $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$.

因为 $x_1 + x_2 = -\frac{1}{2}$,

所以 $x_1 < -\frac{1}{4}$, $x_2 > -\frac{1}{4}$.

由 $g(-1) = 1 > 0$, 可得 $-1 < x_1 < -\frac{1}{4}$,

所以当 $x \in (-1, x_1)$ 时, $g(x) > 0$, $f'(x) > 0$, 函数 $f(x)$ 单调递增;

当 $x \in (x_1, x_2)$ 时, $g(x) < 0$, $f'(x) < 0$, 函数 $f(x)$ 单调递减;

当 $x \in (x_2, +\infty)$ 时, $g(x) > 0$, $f'(x) > 0$, 函数 $f(x)$ 单调递增.

③当 $a < 0$ 时, $\Delta > 0$,

当 $g(-1) = 1 > 0$ 时, 可得 $x_1 < -1$.

当 $x \in (-1, x_2)$ 时, $g(x) > 0$, $f'(x) > 0$, 函数 $f(x)$ 单调递增;

当 $x \in (x_2, +\infty)$ 时, $g(x) < 0$, $f'(x) < 0$, 函数 $f(x)$ 单调递减.

综上:

①当 $a = 0$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $(-1, +\infty)$ 上单调递增;

②当 $a > \frac{8}{9}$ 时, 当 $x \in (-1, x_1)$ 时, 函数 $f(x)$ 单调递增;

当 $x \in (x_1, x_2)$ 时, 函数 $f(x)$ 单调递减;

当 $x \in (x_2, +\infty)$ 时, 函数 $f(x)$ 单调递增.

③当 $0 < a \leq \frac{8}{9}$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $(-1, +\infty)$ 上单调递增.

④当 $a < 0$ 时, 当 $x \in (-1, x_2)$ 时, 函数 $f(x)$ 单调递增;

当 $x \in (x_2, +\infty)$ 时, 函数 $f(x)$ 单调递减.

【标注】【知识点】求函数单调区间(含参二次型导函数)

练2

9. 已知函数 $f(x) = ax - \frac{a}{x} - 2\ln x$, $a \in \mathbf{R}$, 讨论 $f(x)$ 的单调区间.

【答案】 当 $a \leq 0$, $(0, +\infty)$ 单减,

当 $0 < a < 1$, $\left(0, \frac{1 - \sqrt{1 - a^2}}{a}\right)$, $\left(\frac{1 + \sqrt{1 - a^2}}{a}, +\infty\right)$ 单增,
 $\left(\frac{1 - \sqrt{1 - a^2}}{a}, \frac{1 + \sqrt{1 - a^2}}{a}\right)$ 单减,

当 $a \geq 1$, $(0, +\infty)$ 单增.

【解析】 当 $a \leq 0$, $(0, +\infty)$ 单减,

当 $0 < a < 1$, $\left(0, \frac{1 - \sqrt{1 - a^2}}{a}\right)$, $\left(\frac{1 + \sqrt{1 - a^2}}{a}, +\infty\right)$ 单增,
 $\left(\frac{1 - \sqrt{1 - a^2}}{a}, \frac{1 + \sqrt{1 - a^2}}{a}\right)$ 单减,

当 $a \geq 1$, $(0, +\infty)$ 单增.

【标注】【素养】数学运算; 逻辑推理

【知识点】求函数单调区间(含参指对型导函数)

【思想】分类讨论思想

2. 参数不在二次项系数上

能因式分解型

如: $f'(x) = (x - 1)(x - a) > 0$, $x \in \mathbf{R}$, $a \in \mathbf{R}$:

当 $a = 1$ 时,

$f'(x)$ _____ 恒成立且不恒为0, $f(x)$ _____ 区间为 _____.

当 $a > 1$ 时,

由 $f'(x) > 0$, 得 _____, $f(x)$ 增区间为 _____

由 $f'(x) < 0$, 得 _____, $f(x)$ 减区间为 _____

当 $a < 1$ 时,

由 $f'(x) > 0$, 得 _____, $f(x)$ 增区间为 _____

由 $f'(x) < 0$, 得 _____ , $f(x)$ 减区间为 _____

能因式分解型

如 : $f'(x) = (x-1)(x-a) > 0$, $x \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$:

当 $a = 1$ 时 ,

$f'(x) = (x-1)^2 \geq 0$ 恒成立且不恒为 0 , $f(x)$ 增区间为 $(-\infty, +\infty)$.

当 $a > 1$ 时 ,

由 $f'(x) > 0$, 得 $x < 1$ 或 $x > a$, $f(x)$ 增区间为 $(-\infty, 1)$, $(a, +\infty)$;

由 $f'(x) < 0$, 得 $1 < x < a$, $f(x)$ 减区间为 $(1, a)$.

当 $a < 1$ 时 ,

由 $f'(x) > 0$, 得 $x < a$ 或 $x > 1$, $f(x)$ 增区间为 $(-\infty, a)$, $(1, +\infty)$;

由 $f'(x) < 0$, 得 $a < x < 1$, $f(x)$ 减区间为 $(a, 1)$.

例3

10. 已知函数 $f(x) = a \ln(x+1) + \frac{1}{2}x^2 - ax + 1 (a > 0)$, 求函数 $y = f(x)$ 的单调区间和极值 .

【答案】 答案见解析

【解析】 函数的定义域为 $(-1, +\infty)$

令 $f'(x) = 0$, 得 $\frac{x(x-a+1)}{x+1} = 0$ 解得 : $x = 0, x = a-1$

当 $a > 1$ 时 ,

列表 :

x	$(-1, 0)$	0	$(0, a-1)$	$a-1$	$(a-1, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	极大	↘	极小	↗

可知 $f(x)$ 的单调减区间是 $(0, a-1)$, 增区间是 $(-1, 0)$ 和 $(a-1, +\infty)$;

极大值为 $f(0) = 1$, 极小值为 $f(a-1) = a \ln a - \frac{1}{2}a^2 + \frac{3}{2}$.

当 $0 < a < 1$ 时 ,

列表 :

x	$(-1, a-1)$	$a-1$	$(a-1, 0)$	0	$(0, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	极大	↘	极小	↗

可知 $f(x)$ 的单调减区间是 $(a-1, 0)$, 增区间是 $(-1, a-1)$ 和 $(0, +\infty)$;

极大值为 $f(a-1) = a \ln a - \frac{1}{2}a^2 + \frac{3}{2}$, 极小值为 $f(0) = 1$.

当 $a = 1$ 时, $f'(x) \geq 0$ 可知函数 $f(x)$ 在 $(-1, +\infty)$ 上单增, 无极值.

【标注】【知识点】求函数极值 (含参指对型导函数)

练3

11. 已知函数 $f(x) = x^3 - 6ax^2$, 其中 $a \geq 0$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性.

(2) 求 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上的最小值.

【答案】 (1) 当 $a = 0$ 时, $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增;

当 $a > 0$ 时, $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 和 $(4a, +\infty)$ 内单调递增,
在 $(0, 4a)$ 内单调递减.

(2) $f(x)_{\min} = 1 - 6a$.

【解析】 (1) $f'(x) = 3x^2 - 12ax$,

令 $f'(x) = 0$, 得 $x_1 = 0$, $x_2 = 4a$.

①当 $a = 0$ 时, $f'(x) = 3x^2 \geq 0$,

故 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上为增函数.

②当 $4a > 0$, 即 $a > 0$ 时, 列表分析如下:

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 4a)$	$4a$	$(4a, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 和 $(4a, +\infty)$ 内单调递增,
在 $(0, 4a)$ 内单调递减.

综上, 当 $a = 0$ 时, $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增;

当 $a > 0$ 时, $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 和 $(4a, +\infty)$ 内单调递增,
在 $(0, 4a)$ 内单调递减.

(2) ①当 $a = 0$ 时, $f(x)$ 在区间 $(0, 1)$ 内为增函数,

$\therefore f(x)_{\min} = f(0) = 0$.

②当 $0 < 4a < 1$ 时, 即 $0 < a < \frac{1}{4}$ 时,

$f(x)$ 在区间 $(0, 4a)$ 内为减函数,

在 $(4a, 1)$ 内为增函数,

$\therefore f(x)_{\min} = f(4a) = -32a^3$.

③当 $4a \geq 1$ 时, 即 $a \geq \frac{1}{4}$ 时,

$f(x)$ 在区间 $(0, 1)$ 内为减函数,

$$\therefore f(x)_{\min} = f(1) = 1 - 6a.$$

综上, 当 $0 \leq a < \frac{1}{4}$ 时, $f(x)_{\min} = -32a^3$;

当 $a \geq \frac{1}{4}$ 时, $f(x)_{\min} = 1 - 6a$.

【标注】【知识点】求函数最值(含参二次型导函数)

不能因式分解型

如: $f'(x) = x^2 + ax + 1 > 0, x \in R, a \in R$:

当 $\Delta = a^2 - 4 \leq 0$, 即_____时,

_____恒成立且不恒为0, $f(x)$ _____区间是_____.

当 $\Delta = a^2 - 4 > 0$, 即_____时,

由 $f'(x) = x^2 + ax + 1 > 0$, 得_____

$f(x)$ 增区间是_____

由 $f'(x) < 0$, 得_____

$f(x)$ 减区间是_____

不能因式分解型

如: $f'(x) = x^2 + ax + 1 > 0, x \in R, a \in R$:

$$\Delta = a^2 - 4,$$

当 $\Delta = a^2 - 4 \leq 0$, 即 $-2 \leq a \leq 2$ 时,

$f(x) = x^2 + ax + 1 \geq 0$ 恒成立且不恒为0, $f(x)$ 增区间是 $(-\infty, +\infty)$.

当 $\Delta = a^2 - 4 > 0$, 即 $a > 2$ 或 $a < -2$ 时,

由 $f'(x) = x^2 + ax + 1 > 0$, 得 $x < \frac{-a - \sqrt{a^2 - 4}}{2}$ 或 $x > \frac{-a + \sqrt{a^2 - 4}}{2}$,

$f(x)$ 增区间是 $(-\infty, \frac{-a - \sqrt{a^2 - 4}}{2})$, $(\frac{-a + \sqrt{a^2 - 4}}{2}, +\infty)$

由 $f'(x) < 0$, 得 $\frac{-a - \sqrt{a^2 - 4}}{2} < x < \frac{-a + \sqrt{a^2 - 4}}{2}$

$f(x)$ 减区间是 $(\frac{-a - \sqrt{a^2 - 4}}{2}, \frac{-a + \sqrt{a^2 - 4}}{2})$.

例4

12. 已知函数 $f(x) = x^3 + ax^2 + x + 1, a \in R$.

(1) 讨论函数 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 设函数 $f(x)$ 在区间 $(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3})$ 内是减函数, 求 a 的取值范围.

【答案】(1) 答案见解析.

(2) $[2, +\infty)$.

【解析】(1) $f(x) = x^3 + ax^2 + x + 1$, $f'(x) = 3x^2 + 2ax + 1$.

当 $\Delta = (2a)^2 - 4 \times 3 \times 1 = 4a^2 - 12 \leq 0$, 即 $-\sqrt{3} \leq a \leq \sqrt{3}$ 时, $f'(x) \geq 0$ 恒成立, 此时函数 $f(x)$ 为单调递增函数, 单调区间为 $(-\infty, +\infty)$.

当 $\Delta = (2a)^2 - 3 \times 4 = 4a^2 - 12 > 0$, 即 $a < -\sqrt{3}$ 或 $a > \sqrt{3}$ 时, 函数 $f'(x)$ 存在零点, $f'(x) = 0$ 的两个根为 $x = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 3}}{3}$,

当 $x < \frac{-a - \sqrt{a^2 - 3}}{3}$ 时, $f'(x) > 0$, 函数 $f(x)$ 为单调增函数;

当 $x > \frac{-a + \sqrt{a^2 - 3}}{3}$ 时, $f'(x) > 0$, 函数 $f(x)$ 为单调增函数;

当 $\frac{-a - \sqrt{a^2 - 3}}{3} < x < \frac{-a + \sqrt{a^2 - 3}}{3}$ 时, $f'(x) < 0$, 函数 $f(x)$ 为单调减函数.

此时, 函数 $f(x)$ 的单调增区间为 $(-\infty, \frac{-a - \sqrt{a^2 - 3}}{3})$ 和 $(\frac{-a + \sqrt{a^2 - 3}}{3}, +\infty)$, 单调减区间为 $(\frac{-a - \sqrt{a^2 - 3}}{3}, \frac{-a + \sqrt{a^2 - 3}}{3})$.

(2) 若函数在区间 $(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3})$ 内是减函数,

则 $f'(-\frac{2}{3}) \leq 0$ 且 $f'(-\frac{1}{3}) \leq 0$,

由此可以解得 $a \geq 2$.

因此 a 的取值范围是 $[2, +\infty)$.

【标注】【知识点】求函数单调区间(含参二次型导函数); 区间上恒单调

练4

13. 求函数 $f(x) = x + \frac{2}{x} + a \ln x (a \in \mathbf{R})$ 的单调区间.

【答案】当 $a \in [-2\sqrt{2}, +\infty)$ 时, 函数的单调增区间为 $(0, +\infty)$, 无单调减区间;

当 $a \in (-\infty, -2\sqrt{2})$ 时, 函数的单调增区间为 $(0, \frac{-a - \sqrt{a^2 - 8}}{2})$ 和

$(\frac{-a + \sqrt{a^2 - 8}}{2}, +\infty)$;

单调减区间为 $(\frac{-a - \sqrt{a^2 - 8}}{2}, \frac{-a + \sqrt{a^2 - 8}}{2})$.

【解析】易知函数的定义域为 $(0, +\infty)$, 求导得 $f'(x) = 1 + \frac{2}{x^2} + \frac{a}{x} = \frac{x^2 + ax + 2}{x^2}$, 即导函数的正负变化情况由分子二次函数决定, 且 $\Delta = a^2 - 8$ 未知正负, 故有如下情况:

① 若 $\Delta \leq 0 \Rightarrow a \in [-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}]$ 时, $f'(x) \geq 0$ 在定义域内恒成立, 故此情况下, 函数的单调增区间为 $(0, +\infty)$;

② 若 $\Delta > 0 \Rightarrow a > 2\sqrt{2}$ 或 $a < -2\sqrt{2}$ 时, 方程 $x^2 + ax + 2 = 0$ 有两个同号 ($x_1 x_2 = 2 > 0$) 的实数根, 下面即是讨论 $x_1 = \frac{-a - \sqrt{a^2 - 8}}{2}$, $x_2 = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 8}}{2}$ 与 0 的大小关系, 知:

若 $a > 2\sqrt{2}$ 时, $x_1, x_2 < 0$, 故在 $(0, +\infty)$ 上 $f'(x) > 0$, 即函数的单调增区间为 $(0, +\infty)$;

若 $a < -2\sqrt{2}$ 时, $0 < x_1 < x_2$, 令

$f'(x) > 0 \Rightarrow x \in \left(0, \frac{-a - \sqrt{a^2 - 8}}{2}\right) \cup \left(\frac{-a + \sqrt{a^2 - 8}}{2}, +\infty\right)$, 即函数的单调增区间为 $\left(0, \frac{-a - \sqrt{a^2 - 8}}{2}\right)$ 和 $\left(\frac{-a + \sqrt{a^2 - 8}}{2}, +\infty\right)$; 令 $f'(x) < 0 \Rightarrow x \in (x_1, x_2)$, 即函数的单调减区间为 $\left(\frac{-a - \sqrt{a^2 - 8}}{2}, \frac{-a + \sqrt{a^2 - 8}}{2}\right)$;

故综上所述, 当 $a \in [-2\sqrt{2}, +\infty)$ 时, 函数的单调增区间为 $(0, +\infty)$, 无单调减区间;

当 $a \in (-\infty, -2\sqrt{2})$ 时, 函数的单调增区间为 $\left(0, \frac{-a - \sqrt{a^2 - 8}}{2}\right)$ 和

$\left(\frac{-a + \sqrt{a^2 - 8}}{2}, +\infty\right)$;

单调减区间为 $\left(\frac{-a - \sqrt{a^2 - 8}}{2}, \frac{-a + \sqrt{a^2 - 8}}{2}\right)$.

【标注】【知识点】利用导数求函数的单调性、单调区间

三、指数型问题

指数不等式型:

如: $f'(x) = e^x + a > 0, x \in R, a \in R$,

当 $a \geq 0$ 时, $f'(x) > 0$ 恒成立, $f(x)$ 区间为 _____

当 $a < 0$ 时,

由 $f'(x) = e^x + a > 0$, 得 _____, $f(x)$ 增区间为 _____;

由 $f'(x) < 0$, 得 _____, $f(x)$ 减区间为 _____.

指数不等式型:

如: $f'(x) = e^x + a > 0, x \in R, a \in R$,

当 $a \geq 0$ 时, $f'(x) > 0$ 恒成立, $f(x)$ 增区间为 $(-\infty, +\infty)$.

当 $a < 0$ 时,

由 $f'(x) = e^x + a > 0$, 得 $x > \ln(-a)$, $f(x)$ 增区间为 $(\ln(-a), +\infty)$;

由 $f'(x) < 0$, 得 $x < \ln(-a)$, $f(x)$ 减区间为 $(-\infty, \ln(-a))$,

例1

14. 已知函数 $f(x) = e^x(e^x - a) - a^2x$.

讨论 $f(x)$ 的单调性.

【答案】 (1) ①当 $a = 0$ 时, $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增.

②当 $a < 0$ 时, $f(x)$ 在 $(\ln(-\frac{a}{2}), +\infty)$ 上单调递增, 在 $(-\infty, \ln(-\frac{a}{2}))$ 上单调递减.

③当 $a > 0$ 时, $f(x)$ 在 $(\ln a, +\infty)$ 上单调递增, 在 $(-\infty, \ln a)$ 上单调递减.

【解析】 (1) $f'(x) = 2e^{2x} - ae^x - a^2 = (e^x - a)(2e^x + a)$,

①当 $a = 0$ 时, $f'(x) = 2e^{2x} > 0$, $\therefore f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增.

②当 $a < 0$ 时, 由 $f'(x) > 0$ 得 $x > \ln(-\frac{a}{2})$, 由 $f'(x) < 0$ 得 $x < \ln(-\frac{a}{2})$,
 $\therefore f(x)$ 在 $(\ln(-\frac{a}{2}), +\infty)$ 上单调递增, 在 $(-\infty, \ln(-\frac{a}{2}))$ 上单调递减.

③当 $a > 0$ 时, 由 $f'(x) > 0$ 得 $x > \ln a$, 由 $f'(x) < 0$ 得 $x < \ln a$,
 $\therefore f(x)$ 在 $(\ln a, +\infty)$ 上单调递增, 在 $(-\infty, \ln a)$ 上单调递减.

【标注】【知识点】求函数单调区间(含参指对型导函数); 利用导数解决不等式恒成立问题

练1

15. 已知函数 $f(x) = \frac{e^x}{x} - a(x - \ln x)$.

(1) 当 $a = 1$ 时, 试求 $f(x)$ 在 $(1, f(1))$ 处的切线方程.

(2) 当 $a \leq 0$ 时, 试求 $f(x)$ 的单调区间.

【答案】 (1) $y = e - 1$.

(2) 单调增区间为 $(1, +\infty)$, 单调减区间为 $(0, 1)$.

【解析】 (1) 当 $a = 1$ 时, $f'(x) = \frac{e^x(x-1)}{x^2} - 1 + \frac{1}{x}$, $f'(1) = 0$, $f(1) = e - 1$.

方程为 $y = e - 1$.

(2) $f'(x) = \frac{e^x(x-1)}{x^2} - a(1 - \frac{1}{x})$
 $= \frac{e^x(x-1) - ax(x-1)}{x^2},$

$$= \frac{(e^x - ax)(x - 1)}{x^2}.$$

当 $a \leq 0$ 时, 对于 $\forall x \in (0, +\infty)$, $e^x - ax > 0$ 恒成立,

所以 $f'(x) > 0 \Rightarrow x > 1$; $f'(x) < 0 \Rightarrow 0 < x < 1$.

所以单调增区间为 $(1, +\infty)$, 单调减区间为 $(0, 1)$.

【标注】【知识点】已知极值情况求参数范围; 求函数单调区间(含参指对型导函数); 二阶导问题

四、对数型问题

对数不等式型:

如: $f'(x) = \ln x + a > 0$, $x > 0$, $a \in \mathbb{R}$,

由 $f'(x) > 0$, 得 _____, $f(x)$ 增区间是 _____

由 $f'(x) < 0$, 得 _____, $f(x)$ 减区间是 _____

对数不等式型:

如: $f'(x) = \ln x + a > 0$, $x > 0$, $a \in \mathbb{R}$,

由 $f'(x) > 0$, 得 $x > e^{-a}$, $f(x)$ 增区间是 $(e^{-a}, +\infty)$;

由 $f'(x) < 0$, 得 $0 < x < e^{-a}$, $f(x)$ 减区间是 $(0, e^{-a})$.

例1

16. 已知函数 $f(x) = ax \ln x$, ($a \neq 0$).

求 $f(x)$ 的单调区间;

【答案】 (1) ①当 $a > 0$ 时, 在 $(0, \frac{1}{e})$ 上单调递减, 在 $(\frac{1}{e}, +\infty)$ 上单调递增.

②当 $a < 0$ 时, 在 $(0, \frac{1}{e})$ 上单调递增, 在 $(\frac{1}{e}, +\infty)$ 上单调递减.

【解析】 (1) 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$.

因为 $f'(x) = a \ln x + a = a(\ln x + 1)$,

令 $f'(x) = 0$, 解得 $x = \frac{1}{e}$.

①当 $a > 0$ 时, 随着 x 变化时, $f(x)$ 和 $f'(x)$ 的变化情况如下:

x	$\left(0, \frac{1}{e}\right)$	$\frac{1}{e}$	$\left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	极小值	$\nearrow$

即函数 $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{1}{e}\right)$ 上单调递减, 在 $\left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$ 上单调递增.

②当 $a < 0$ 时, 随着 x 变化时, $f(x)$ 和 $f'(x)$ 的变化情况如下:

x	$\left(0, \frac{1}{e}\right)$	$\frac{1}{e}$	$\left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$\nearrow$	极大值	$\searrow$

即函数 $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{1}{e}\right)$ 上单调递增, 在 $\left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$ 上单调递减.

【标注】【知识点】利用导数解决不等式恒成立问题

🔗 练1

17. 已知函数 $f(x) = \frac{\ln x + a}{x} (a \in \mathbf{R})$.

求 $f(x)$ 的极值.

【答案】 (1) $f(x)_{\text{极大值}} = e^{a-1}$, 无极小值.

【解析】 (1) $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$,

$$f'(x) = \frac{1 - (\ln x + a)}{x^2}, \text{ 令 } f'(x) = 0, \text{ 解得: } x = e^{1-a},$$

当 $f'(x) > 0$ 时, $x < e^{1-a}$, $f(x)$ 在 $(0, e^{1-a})$ 是增函数,

当 $f'(x) < 0$ 时, $x > e^{1-a}$, $f(x)$ 在 $(e^{1-a}, +\infty)$ 是减函数,

$\therefore f(x)$ 在 $x = e^{1-a}$ 处取得极大值, $f(x)_{\text{极大值}} = f(e^{1-a}) = e^{a-1}$, 无极小值.

【标注】【知识点】放缩法证明数列不等式; 数列与函数综合