

极值与最值

一、极值

1. 函数的极值

函数的极值：函数 $f(x)$ 在点 x_0 附近有定义，如果对 x_0 附近的所有点都有 $f(x) < f(x_0)$ ，则称 $f(x_0)$ 是函数的一个极大值，记作 $y_{\text{极大值}} = f(x_0)$ ；如果对 x_0 附近的所有点都有 $f(x) > f(x_0)$ ，则称 $f(x_0)$ 是函数的一个极小值，记作 $y_{\text{极小值}} = f(x_0)$ 。

极大值与极小值统称为极值，称 x_0 为极值点。

【教师备注】

(1) 极值是一个局部性的概念，必须在函数定义域内的连续点处取得，而且只能反映出极值点附近的函数值分布情况，那么完全可以产生下面的效果：存在某些函数，它的极大值反而小于极小值；

(2) 若函数在某区间内有极值，则它在此区间内必不单调；反过来，若函数在某区间内不单调，它也未必有极值（你能对此举出反例么？）

(3) 极值点包括不可导点

2. 函数极值的判断与求解

求函数 $y = f(x)$ 极值的方法：

- (1) 确定函数的定义域；
- (2) 求导数 $f'(x)$ ；
- (3) 解出方程 $f'(x) = 0$ 在定义域内的全部实根；
- (4) 检测每个实根左右两侧导函数的符号，进而判断：
 - ①如果在某实根附近导数符号为左负右正，则该实根为极小值点；
 - ②如果在某实根附近导数符号为左正右负，则该实根为极大值点；
 - ③如果在某实根附近导数符号保持不变，则该实根不是极值点。

【教师备注1】

结论一：对于函数 $f(x)$ ， $f'(x) = 0$ 的根不一定是函数的极值点；

结论二：函数的极值点 x_0 也不一定满足 $f'(x_0) = 0$ 。

【答案】结论一： $f(x) = x^3$ ；结论二： $f(x) = |x|$ 。

【教师备注2】

(1) 对于函数定义域内的某个点 x_0 来说, 该点为极值点的充分条件是函数在这点的两侧导数异号, 必要条件是 $f'(x_0) = 0$;

(2) 判断函数的极值点, 不能单单依赖于导数, 还需要考察定义域内的不可导点, 此时需要从极值的定义出发;

例1

1. 函数 $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \ln x$ 的极值点是().

A. $x = -1$

B. $x = -\frac{1}{2}$

C. $x = 1$

D. $x = \frac{1}{2}$

【答案】 C

【解析】 $f'(x) = -x + \frac{1}{x}$, 令 $f'(x) = 0$, 解得 $x = 1$ 或 $x = -1$ (舍去), 故选C.

【标注】 【知识点】 直接求函数的极值 (不含参)

2. 函数 $y = x^3 - 3x^2 - 9x$ ($-2 < x < 2$) 有().

A. 极大值5, 极小值-27

B. 极大值5, 极小值-11

C. 极大值5, 无极小值

D. 极小值-27, 无极大值

【答案】 C

【解析】 令 $y' = 3x^2 - 6x - 9 = 0$, 得 $x = -1$ 或 $x = 3$, 当 $x < -1$ 时, $y' > 0$; 当 $-1 < x < 3$ 时, $y' < 0$, 当 $x = -1$ 时, 函数 y 有极大值, $y = 5$; x 取不到3, 无极小值.

【标注】 【知识点】 直接求函数的单调性 (不含参)

3. 对于函数 $f(x) = e^x - \ln x$, 下列结论正确的一个是().

A. $f(x)$ 有极小值, 且极小值点 $x_0 \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$

B. $f(x)$ 有极大值, 且极大值点 $x_0 \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$

C. $f(x)$ 有极小值, 且极小值点 $x_0 \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$

D. $f(x)$ 有极大值, 且极大值点 $x_0 \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$

【答案】 C

【解析】 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, 且 $f'(x) = e^x - \frac{1}{x}$, $f'(x) = e^x + \frac{1}{x^2} > 0$

所以函数 $f'(x) = e^x - \frac{1}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

又因为 $f'\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{e} - 2 < 0$, $f'(1) = e - 1 > 0$

所以一定存在一个唯一的实数 $x_0 \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, 可以使得 $f'(x_0) = 0$

且当 $x \in (0, x_0)$ 时, $f'(x_0) < 0$, 当 $x \in (x_0, +\infty)$ 时, $f'(x_0) > 0$.

所以 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处取得极小值.

【标注】【知识点】导数与极值

4. 设函数 $f(x) = e^x(x-1)^2(x-2)$, 则 ().

A. $f(x)$ 有两个极大值点

B. $f(x)$ 有两个极小值点

C. $x = 1$ 是 $f(x)$ 的极大值点

D. $x = 1$ 是 $f(x)$ 的极小值点

【答案】 BC

【解析】 直接对 $f(x) = e^x(x-1)^2(x-2)$ 求导, 有

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^x \cdot 2(x-1)(x-2) + e^x \cdot (x-1)^2 + e^x(x-1)^2(x-2) \\ &= e^x(x-1)(x^2-3). \end{aligned}$$

故 $f(x)$ 在 $(-\infty, -\sqrt{3})$ 内单调递减, $(-\sqrt{3}, 1)$ 上单调递增, $(1, -\sqrt{3})$ 上单调递减, $(\sqrt{3}, +\infty)$ 上单调递增.

$\therefore f(x)$ 有 3 个极值点, $\pm\sqrt{3}$ 是极小值点, 1 是极大值点.

【标注】【知识点】导数

5. 已知函数 $f(x) = \frac{x}{4} + \frac{5}{4x} - \ln x - \frac{3}{2}$, 求函数 $f(x)$ 的极值.

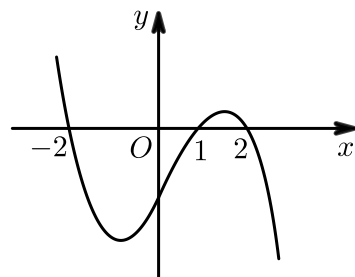
【答案】 函数 $f(x)$ 在 $x = 5$ 时取得极小值 $f(5) = -\ln 5$.

【解析】 略.

【标注】【素养】数学运算

【知识点】 直接求函数的极值 (不含参)

6. 设函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上可导, 其导函数为 $f'(x)$, 且函数 $y = (1-x)f'(x)$ 的图象如图所示, 则下列结论中一定成立的是 ().



- A. 函数 $f(x)$ 有极大值 $f(2)$ 和极小值 $f(1)$
- B. 函数 $f(x)$ 有极大值 $f(-2)$ 和极小值 $f(1)$
- C. 函数 $f(x)$ 有极大值 $f(-2)$ 和极小值 $f(2)$
- D. 函数 $f(x)$ 有极大值 $f(2)$ 和极小值 $f(-2)$

【答案】 C

【解析】 由图像可知： $x < -2$ 时， $f'(x) > 0$ ； $-2 < x < 1$ 时， $f'(x) < 0$ ； $1 < x < 2$ 时， $f'(x) < 0$ ； $x > 2$ 时， $f'(x) > 0$ 。即 $f(x)$ 在 $(-\infty, -2)$ ， $(2, +\infty)$ 上单调递增，在 $(-2, 2)$ 上单调递减。因此 $f(x)$ 有极大值 $f(-2)$ 和极小值 $f(2)$ 。

【标注】 【知识点】 求解函数极值

练1

7. 函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 5x + 9$ 的极大值点为 ()。

- A. 1
- B. 2
- C. 3
- D. 5

【答案】 A

【解析】 $f'(x) = x^2 - 6x + 5$ ，令 $f'(x) = 0$ ， $x_1 = 1$ ， $x_2 = 5$ ， $f(x)$ 在 $x = 1$ 处取极大值点。

【标注】 【知识点】 求解函数极值

8. $f(x) = (x^2 - 1)^3 + 1$ 的极值点为 _____。

【答案】 0

【解析】 $f'(x) = 6x(x^2 - 1)^2$ ，故极值点为0而不是1。

【标注】 【知识点】 直接求函数的极值（不含参）

二、最值

1. 最值的判断与求解

设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 求 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最大值与最小值的步骤如下:

(1) 求 $f(x)$ 在 (a, b) 内的极值;

(2) 将 $f(x)$ 的各极值与 $f(a)$, $f(b)$ 比较, 其中最大的一个是最大值, 最小的一个是最小值.

例1

9. 设函数 $f(x) = x \ln x$, $x \in [e^{-2}, e]$, 则 $f(x)$ 的最大值为 _____, 最小值为 _____.

【答案】 $e; -\frac{1}{e}$

【解析】 函数的定义域为: $(0, +\infty)$,

对函数求导可得 $f'(x) = \ln x + 1$,

令 $f'(x) > 0$ 可得 $x > \frac{1}{e}$,

$f'(x) < 0$ 可得 $0 < x < \frac{1}{e}$,

$\therefore f(x)$ 在 $x \in [e^{-2}, \frac{1}{e}]$ 单调递减, 在 $x \in [\frac{1}{e}, e]$ 单调递增,

$f(e^{-2}) = -2e^{-2}$, $f(e) = e$,

$\therefore f(x)$ 的最大值为 e ,

最小值为 $f\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e}$.

故答案为 $e; -\frac{1}{e}$.

【标注】 【知识点】直接求函数的最值 (不含参)

【素养】 数学运算

练1

10. 已知函数 $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$, 则 $f(x)$ 在闭区间 $[-1, 5]$ 上的最小值为 _____, 最大值为 _____.

【答案】 $-16; 20$

【解析】 $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x-1)(x-3)$, 令 $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 1, x = 3$,

列表:

x	-1	$(-1,1)$	1	$(1,3)$	3	$(3,5)$	5
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	-16	$\nearrow$	极大值4	$\searrow$	极小值0	$\nearrow$	20

【标注】【知识点】利用导数求函数的最值

11. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ 在区间 $[-1, 1]$ 上的最大值是 () .

- A. -2 B. 0 C. 2 D. 4

【答案】C

【解析】 $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$,

令 $f'(x) = 0$ 可得 $x = 0$ 或 2 (2 舍去) ,

当 $-1 < x < 0$ 时 , $f'(x) > 0$,

当 $0 < x < 1$ 时 , $f'(x) < 0$,

$\therefore$ 当 $x = 0$ 时 , $f(x)$ 取得最大值为 $f(0) = 2$.

故选 C .

【标注】【知识点】利用导数求函数的最值

12. 函数 $y = x^4 - 4x + 3$ 在区间 $[-2, 3]$ 上的最小值为 () .

- A. 72 B. 36 C. 12 D. 0

【答案】D

【解析】 $y' = 4x^3 - 4$, 令 $y' = 0$, 得 $4x^3 - 4 = 0$, $x = 1$, 当 $x < 1$ 时 , $y' < 0$; 当 $x > 1$ 时 ,

$y' > 0$, 得 $y = y|_{x=1} = 0$, 而端点的函数值 $y|_{x=-2} = 27$, $y|_{x=3} = 72$, 故 $y_{\min} = 0$.

【标注】【知识点】利用导数求函数的最值

2. 极值与最值的关系

【注意】极值和最值的区别与联系 :

- (1) 极值只是对一点附近而言 , 是局部最值 ; 而最值是对整个区间或是对所考察问题的整体而言 ;
- (2) 极值和最值都不一定存在 ;

(3) 函数在一个区间上若存在最大值或最小值, 则最大值或最小值只能各有一个, 具有唯一性, 而函数的极值可能不止一个, 也可能没有;

(4) 极值点不一定是最值点, 最值点也不一定是极值点, 但如果连续函数在开区间 (a, b) 内只有一个极值点, 那么极大值就是最大值, 极小值就是最小值, 此区间也可以是无穷区间.

例2

13. 下列结论正确的是 ().

- A. 若 x_0 是 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的极大值点, 则 $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最大值
- B. 若 x_0 是 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的极小值点, 则 $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最小值
- C. 若 x_0 是 $f(x)$ 在 (a, b) 上唯一的极大值点, 则 $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最大值
- D. 若 x_0 是 $f(x)$ 在 (a, b) 上唯一的极大值点, 且 $f(x_0)$ 在 (a, b) 上无极小值点, 则 $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 在 (a, b) 上的最大值

【答案】 D

【解析】 若 x_0 是 $f(x)$ 在 (a, b) 上唯一的极大值点, 且 $f(x_0)$ 在 (a, b) 上无极小值点, 则 $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 在 (a, b) 上的最大值

【标注】 【知识点】 最值与极值的辨析

14. 对于函数 $f(x) = (2x - x^2)e^x$

- (1) $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ 是 $f(x)$ 的单调递减区间;
- (2) $f(-\sqrt{2})$ 是 $f(x)$ 的极小值, $f(\sqrt{2})$ 是 $f(x)$ 的极大值;
- (3) $f(x)$ 有最大值, 没有最小值;
- (4) $f(x)$ 没有最大值, 也没有最小值.

其中判断正确的是 _____ .

【答案】 (2)、(3)

【标注】 【知识点】 利用导数求函数的最值; 利用导数求函数的单调性、单调区间; 求解函数极值

练2

15. 已知函数 $f(x) = \frac{x+1}{x^2+3}$.

- (1) 求函数 $f(x)$ 的极值.
- (2) 求函数 $f(x)$ 在 $[-3, +\infty)$ 上的最值.

【答案】(1) $f(x)_{\text{极小值}} = -\frac{1}{6}$; $f(x)_{\text{极大值}} = \frac{1}{2}$.

(2) $f(x)_{\text{max}} = f(1) = \frac{1}{2}$, $f(x)_{\text{min}} = f(-3) = -\frac{1}{6}$.

【解析】(1) 定义域为 $\mathbf{R}$, $f'(x) = \frac{-(x-1)(x+3)}{(x^2+3)^2}$,

令 $f'(x) = 0$, 解得 $x = 1$ 或 $x = -3$.

$f(x)$ 随着 x 的变化如下表

x	$(-\infty, -3)$	-3	$(-3, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	$\searrow$	$-\frac{1}{6}$	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$

函数 $f(x)$ 的增区间是 $(-3, 1)$, 减区间是 $(-\infty, -3)$, $(1, +\infty)$.

$f(x)_{\text{极小值}} = f(-3) = -\frac{1}{6}$; $f(x)_{\text{极大值}} = f(1) = \frac{1}{2}$.

(2) 由 (1) 得 $f(x)$ 是 $[-3, 1)$ 上的增函数, 是 $(1, +\infty)$ 上的减函数.

所以 $f(x)$ 在 $[-3, +\infty)$ 上 $f(x)_{\text{max}} = f(1) = \frac{1}{2}$,

又: 当 $x > 1$ 时, $f(x) = \frac{x+1}{x^2+3} > 0$,

$f(x)$ 在 $[-3, +\infty)$ 上 $f(x)_{\text{max}} = f(-3) = -\frac{1}{6}$.

【标注】【知识点】直接求函数的最值 (不含参)

三、含参函数的极值与最值 (不需要分类讨论)

1. 含参函数极值问题

例1

第一题【教师备注】

注意: 图像为函数导函数的图像!

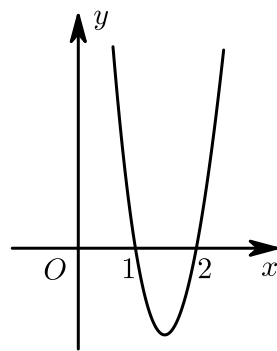
第一问: 由导函数图像可知函数的单调性, 从而确定函数在 $x=1$ 处取得极大值.

第二问: 此题可列三个等式——

由导函数图像可知分别为 $f'(1) = 0, f'(2) = 0$;

由极大值为 5 可知 $f(1) = 5$.

16. 已知函数 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ 在点 x_0 处取得极大值 5, 其导函数 $y = f'(x)$ 的图象经过点 $(1, 0)$, $(2, 0)$, 如图所示. 求:



(1) x_0 的值.

(2) a, b, c 的值.

【答案】 (1) $x_0 = 1$.

(2) $a = 2, b = -9, c = 12$.

【解析】 (1) 由图象可知, 在 $(-\infty, 1)$ 上 $f'(x) > 0$, 在 $(1, 2)$ 上 $f'(x) < 0$,
在 $(2, +\infty)$ 上 $f'(x) > 0$
故 $f(x)$ 在 $(-\infty, 1), (2, +\infty)$ 上递增, 在 $(1, 2)$ 上递减.
因此 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处取得极大值, 所以 $x_0 = 1$.

(2) 解法一:

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \text{ 由 } f'(1) = 0, f'(2) = 0, f(1) = 5.$$

$$\text{得} \begin{cases} 3a + 2b + c = 0 \\ 12a + 4b + c = 0 \\ a + b + c = 5 \end{cases} \text{ 解得 } a = 2, b = -9, c = 12$$

解法二:

$$\text{设 } f'(x) = m(x-1)(x-2) = mx^2 - 3mx + 2m$$

$$\text{又 } f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \text{ 所以 } a = \frac{m}{3}, b = -\frac{3}{2}m, c = 2m$$

$$f(x) = \frac{m}{3}x^3 - \frac{3}{2}mx^2 + 2mx$$

$$\text{由 } f(1) = 5 \text{ 即 } \frac{m}{3} - \frac{3}{2}m + 2m = 5$$

$$\text{得 } m = 6, \text{ 所以 } a = 2, b = -9, c = 12.$$

【标注】【知识点】已知极值情况求函数解析式

第二题【教师备注】

切线问题第一步一定要确定切点, 此题题干表述: 在点 $(1, f(1))$ 处切线, 可知切点为 $(1, f(1))$ 。

确定切点后即可求出切线斜率, 继而利用点斜式求出切线方程。

17. 设 $f(x) = a(x-5)^2 + 6 \ln x$, 其中 $a \in \mathbf{R}$, 曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线与 y 轴相交于点 $(0, 6)$ 。

(1) 确定 a 的值.

(2) 求函数 $f(x)$ 的单调区间与极值.

【答案】 (1) $\frac{1}{2}$.

(2) $f(x)$ 在 $(0, 2)$, $(3, +\infty)$ 上为增函数;

$f(x)$ 在 $(2, 3)$ 上为减函数.

极大值 $\frac{9}{2} + 6\ln 2$, 极小值 $2 + 6\ln 3$.

【解析】 (1) 因 $f(x) = a(x-5)^2 + 6\ln x$, 故 $f'(x) = 2a(x-5) + \frac{6}{x}$

令 $x = 1$, 得 $f(1) = 16a$, $f'(1) = 6 - 8a$,

所以曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 $y - 16a = (6 - 8a)(x - 1)$,

由点 $(0, 6)$ 在切线上可得 $6 - 16a = 8a - 6$, 故 $a = \frac{1}{2}$.

(2) 由(1)知, $f(x) = \frac{1}{2}(x-5)^2 + 6\ln x$ ($x > 0$),

$f'(x) = x - 5 + \frac{6}{x} = \frac{(x-2)(x-3)}{x}$.

令 $f'(x) = 0$, 解得 $x_1 = 2$, $x_2 = 3$.

当 $0 < x < 2$ 或 $x > 3$ 时, $f'(x) > 0$, 故 $f(x)$ 在 $(0, 2)$, $(3, +\infty)$ 上为增函数;

当 $2 < x < 3$ 时, $f'(x) < 0$, 故 $f(x)$ 在 $(2, 3)$ 上为减函数.

由此可知 $f(x)$ 在 $x = 2$ 处取得极大值 $f(2) = \frac{9}{2} + 6\ln 2$, 在 $x = 3$ 处取得极小值

$f(3) = 2 + 6\ln 3$.

【标注】【知识点】直接求函数的单调性(不含参); 直接求函数的极值(不含参)

第三题【教师备注】

由题干 $g(x)$ 在 $x = 1$ 处取得极值-2可得到两个等式: $g'(1) = 0, g(1) = -2$

但是一定要注意检验由 $g'(1) = 0$ 得出的参数值是否符合在 $x = 1$ 处取得极值的要求, 因此, 求解后一般需要检验, 为了保证严谨, 最好在求完参数值后, 补充一句:

“经检验, 参数值_____符合要求”

18. 已知函数 $f(x) = 2x^2 + x - k$, $g(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$)是 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 当 $x = 1$ 时, $g(x)$ 取得极值-2.

求函数 $g(x)$ 的单调区间和极大值;

【答案】 (1) $g(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty, -1)$ 和 $(1, +\infty)$;

递减区间为 $(-1, 1)$, 极大值为 $g(-1) = 2$.

【解析】 (1) $\because g(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d (a \neq 0)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的奇函数,

$\therefore g(-x) = g(x)$, 可得 $b = d = 0$, 即 $g(x) = ax^3 + cx (a \neq 0)$,

又当 $x = 1$ 时, $g(x)$ 取得极值 -2 ,

$$\therefore \begin{cases} g'(1) = 0 \\ g(1) = -2 \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} 3a + c = 0 \\ a + c = -2 \end{cases},$$

解得 $\begin{cases} a = 1 \\ c = -3 \end{cases}$, 故函数 $g(x) = x^3 - 3x$,

导函数 $g'(x) = 3x^2 - 3$, 令 $3x^2 - 3 = 0$ 解得 $x = \pm 1$,

当 $x \in (-\infty, -1)$ 时, $g'(x) > 0$, $g(x)$ 单调递增,

当 $x \in (-1, 1)$ 时, $g'(x) < 0$, $g(x)$ 单调递减,

当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $g'(x) > 0$, $g(x)$ 单调递增,

故当 $x = -1$ 时, $g(x)$ 取到极大值 $g(-1) = 2$.

【标注】 【知识点】利用导数解决不等式恒成立问题

练1

19. 设函数 $f(x) = x - a \ln x + \frac{b}{x}$ 在 $x = 1$ 处取得极值.
求 a 与 b 满足的关系式.

【答案】 (1) $b = 1 - a$.

【解析】 (1) $f'(x) = 1 - \frac{a}{x} - \frac{b}{x^2}$,

由 $f'(1) = 0$, 得 $b = 1 - a$.

【标注】 【知识点】利用导数求函数的单调性、单调区间; 利用导数证明不等式能成立问题; 已知极值情况求函数解析式; 导数与最值

2. 含参函数最值问题

例2

20. 已知函数 $f(x) = ax^3 - 6ax^2 + b$, 试问是否存在实数 a, b , 使 $f(x)$ 在 $[-1, 2]$ 上取得最大值 3, 最小值 -29 , 若存在, 求出 a, b 的值, 若不存在, 请说明理由.

【答案】 存在 a, b 适合题设, 且 $a = 2, b = 3$ 或 $a = -2, b = -29$.

【解析】 依题意, 显然 $a \neq 0$,

$$\because f'(x) = 3ax^2 - 12ax = 3ax(x - 4)$$

令 $f'(x) = 0$, 解得 $x_1 = 0$, $x_2 = 4$ (舍)

(1)当 $a > 0$ 时 , 当 x 变化时 , $f'(x)$, $f(x)$ 的变化情况如下表 :

x	$[-1, 0)$	0	$(0, 2]$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$\nearrow$	极大值	$\searrow$

$\therefore$ 当 $x = 0$ 时 , $f(x)$ 取得最大值 ,

$$\therefore f(0) = b = 3 ,$$

$$\text{又 } f(2) = -16a + 3 , f(-1) = -7a + 3 , f(-1) > f(2)$$

$\therefore$ 当 $x = 2$ 时 , $f(x)$ 取得最小值 ,

$$\text{即 } -16a + 3 = -29 , a = 2$$

(2)当 $a < 0$ 时 , 当 x 变化时 , $f'(x)$, $f(x)$ 的变化情况如下表 :

x	$[-1, 0)$	0	$(0, 2]$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	极小值	$\nearrow$

$\therefore$ 当 $x = 0$ 时 , $f(x)$ 取得最小值 ,

$$\therefore f(0) = b = -29 ,$$

$$\text{又 } f(2) = -16a - 29 , f(-1) = -7a - 29 , f(2) > f(-1)$$

$\therefore$ 当 $x = 2$ 时 , $f(x)$ 取得最大值 ,

$$\text{即 } -16a - 29 = 3 , a = -2$$

故答案为:存在 a , b 适合题设 , 且 $a = 2$, $b = 3$ 或 $a = -2$, $b = -29$.

【标注】【知识点】利用导数求函数的最值

练2

21. 已知函数 $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 9x + a$.

(1) 求 $f(x)$ 的单调减区间 ;

(2) 若 $f(x)$ 在区间 $[-2, 2]$ 上的最大值为 20 , 求它在该区间上的最小值 .

【答案】 (1) $(-\infty, -1)$, $(3, +\infty)$.

(2) -7

【解析】 (1) $f'(x) = -3x^2 + 6x + 9$.

令 $f'(x) < 0$, 解得 $x < -1$ 或 $x > 3$,

所以函数 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(-\infty, -1)$, $(3, +\infty)$.

(2) 因为 $f(-2) = 8 + 12 - 18 + a = 2 + a$,

$f(2) = -8 + 12 + 18 + a = 22 + a$, 所以 $f(2) > f(-2)$.

因为在 $(-1, 3)$ 上 $f'(x) > 0$, 所以 $f(x)$ 在 $[-1, 2]$ 单调递增, 又由于 $f(x)$ 在 $[-2, -1]$ 上单调递减, 因此 $f(2)$ 和 $f(-1)$ 分别是 $f(x)$ 在区间 $[-2, 2]$ 上的最大值和最小值.

于是有 $22 + a = 20$, 解得 $a = -2$. 故 $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 9x - 2$.

因此 $f(-1) = 1 + 3 - 9 - 2 = -7$.

即函数 $f(x)$ 在区间 $[-2, 2]$ 上的最小值为 -7 .

【标注】【知识点】导数与单调性

【知识点】导数与极值

【知识点】导数的运算

【知识点】函数的平均变化率、瞬时速度与瞬时变化率

3. 含参极值最值问题

例3

22. 已知函数 $y = ax^3 + bx^2$, 当 $x = 1$ 时, 有极大值3.

(1) 求 a, b 的值.

(2) 求函数的极小值.

(3) 求函数在 $[-1, 2]$ 的最值.

【答案】(1) $a = -6, b = 9$.

(2) 0.

(3) 最大值1, 最小值 -12 .

【解析】(1) $f(x) = ax^3 + bx^2, f'(x) = 3ax^2 + 2bx$,

$\because$ 当 $x = 1$ 时, $f(x)$ 有极大值3,

$\therefore \begin{cases} f(1) = 3 \\ f'(1) = 0 \end{cases}$ 即 $\begin{cases} a + b = 3 \\ 3a + 2b = 0 \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a = -6 \\ b = 9 \end{cases}$,

故 $a = -6, b = 9$.

(2) 由(1)知 $f(x) = -6x^3 + 9x^2, f'(x) = -18x^2 + 18x$,

令 $f'(x) > 0$, 解得 $0 < x < 1$,

令 $f'(x) < 0$, 解得 $x < 0$ 或 $x > 1$,

$\therefore f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 和 $(1, +\infty)$ 上是减函数, 在 $(0, 1)$ 上是增函数,

$\therefore f(x)$ 在 $x = 0$ 取得极小值,

故 $f(x)_{\text{极小}} = f(0) = 0$.

(3) 由(2)可知, $f(x)$ 在 $[-1, 0]$ 和 $[1, 2]$ 上是减函数, 在 $[0, 1]$ 上是增函数,

又 $f(-1) = 6 + 9 = 15$, $f(1) = 3$, $f(0) = 0$, $f(2) = -6 \times 8 + 9 \times 4 = -12$,

故当 $x = -1$ 时, $f(x)_{\text{max}} = f(-1) = 15$,

当 $x = 2$ 时, $f(x)_{\text{min}} = f(2) = -12$.

【标注】【知识点】直接求函数的最值(不含参)

23. 已知函数 $f(x) = ax^3 + bx + c$ 在点 $x = 2$ 处取得极值 $c - 16$.

(1) 求 a, b 的值;

(2) 若 $f(x)$ 有极大值28, 求 $f(x)$ 在 $[-3, 3]$ 上的最小值.

【答案】(1) $a = 1, b = -12$.

(2) -4 .

【解析】(1) 因 $f(x) = ax^3 + bx + c$, 故 $f'(x) = 3ax^2 + b$,

由于 $f(x)$ 在点 $x = 2$ 处取得极值 $c - 16$,

故有 $\begin{cases} f'(2) = 0 \\ f(2) = c - 16 \end{cases}$, 即 $\begin{cases} 12a + b = 0 \\ 8a + 2b + c = c - 16 \end{cases}$

化简得 $\begin{cases} 12a + b = 0 \\ 4a + b = -8 \end{cases}$, 解得 $a = 1, b = -12$.

(2) 由(1)知 $f(x) = x^3 - 12x + c$;

$f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x - 2)(x + 2)$.

令 $f'(x) = 0$, 得 $x_1 = -2, x_2 = 2$.

当 $x \in (-\infty, -2)$ 时, $f'(x) > 0$, 故 $f(x)$ 在 $(-\infty, -2)$ 上为增函数;

当 $x \in (-2, 2)$ 时, $f'(x) < 0$, 故 $f(x)$ 在 $(-2, 2)$ 上为减函数;

当 $x \in (2, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, 故 $f(x)$ 在 $(2, +\infty)$ 上为增函数.

由此可知 $f(x)$ 在 $x_1 = -2$ 处取得极大值 $f(-2) = 16 + c$,

$f(x)$ 在 $x_2 = 2$ 处取得极小值 $f(2) = c - 16$.

由题设条件知 $16 + c = 28$, 得 $c = 12$,

$f(x)$ 在 $[-3, 3]$ 上的最小值为 -4 .

【标注】【知识点】求函数最值(含参一次型导函数)

24. 已知函数 $f(x) = ax^3 + 3x + 2 (a \in \mathbf{R})$ 的一个极值点是1 .

求函数 $f(x)$ 在 $[-2, 3]$ 上的最大值和最小值 .

【答案】 (1) 函数 $f(x)$ 在 $[-2, 3]$ 上的最大值为4 , 最小值为-16 .

【解析】 (1) 由 (I) 知 : $f'(x) = -3x^2 + 3$.

令 $f'(x) = 0$, 得 $x_1 = -1$, $x_2 = 1$.

当 x 在 $[-2, 3]$ 上变化时 , $f'(x)$, $f(x)$ 的变化情况如下表

x	-2	$(-2, -1)$	-1	$(-1, 1)$	1	$(1, 3)$	3
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	-16

所以 函数 $f(x)$ 在 $[-2, 3]$ 上的最大值为4 , 最小值为-16 .

【标注】【知识点】求在某点处的切线方程 ; 直接求函数的最值 (不含参) ; 已知极值情况求参数
值

25. 函数 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, 过曲线 $y = f(x)$ 上的点 $P(1, f(1))$ 的切线方程为 $y = 3x + 1$.

(1) 若 $y = f(x)$ 在 $x = -2$ 时有极值 , 求 $f(x)$ 的表达式 .

(2) 在 (1) 的条件下 , 求 $y = f(x)$ 在 $[-3, 1]$ 上的最大值 .

【答案】 (1) $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x + 5$.

(2) 13

【解析】 (1) 对 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ 求导得 : $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$.

过 $P(1, f(1))$ 的切线方程为 : $y = f(1) = f'(1)(x - 1)$,

即 $y - (a + b + c + 1) = (3 + 2a + b)(x - 1)$.

$$\therefore \begin{cases} 3 + 2a + b = 3 \\ a + b + c - 2 = 1 \end{cases}$$

$$\text{即} \begin{cases} 2a + b = 0 \\ a + b + c = 3 \end{cases}$$

$\therefore$ 有 $y = f(x)$ 在 $x = -2$ 时有极值 , 故 $f(-2) = 0$,

$$\therefore -4a + b = -12 .$$

由①②③式可得 : $a = 2$, $b = -4$, $c = 5$,

$$\text{故} f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x + 5 .$$

(2) 由 (1) 得 $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x + 5$,

$$\therefore f'(x) = 3x^2 + 4x - 4 = (3x - 2)(x + 2) .$$

故可得到 $f(x)$ 与 $f'(x)$ 的变化情况 .

x	-3	$(-3, -2)$	-2	$\left(-2, \frac{2}{3}\right)$	$\frac{2}{3}$	$\left(\frac{2}{3}, 1\right)$	1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	8	$\nearrow$	极大 13	$\searrow$	极小	$\nearrow$	4

$$\therefore f(x)_{\text{极大}} = f(-2) = 4 ,$$

$\therefore f(x)$ 在 $[-3, 1]$ 上最大值为 13 .

【标注】【知识点】直接求函数的最值（不含参）