

切线方程与单调性练习题

一、切线方程求法

1. 曲线 $f(x) = 2x^2 - 3x$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 _____ .

【答案】 $x - y - 2 = 0$

【解析】 由题意得, $f(1) = 2 - 3 = -1$,
且 $f'(x) = 4x - 3$, 则 $f'(1) = 4 - 3 = 1$,
 $\therefore$ 在点 $(1, -1)$ 处的切线方程为: $y + 1 = 1(x - 1)$,
即 $x - y - 2 = 0$,
故答案为: $x - y - 2 = 0$.

【标注】 【知识点】 求在某点处的切线方程; 导数的几何意义; 导数的几何意义的实际应用; 利用公式和四则运算法则求导

2. 曲线 $y = 2x - x^3$ 在点 $(1, 1)$ 的切线方程为 _____, 经过点 $(2, 4)$ 的切线方程为 _____ .

【答案】 $x + y - 2 = 0$; $2x - y = 0$ 或 $25x + y - 54 = 0$

【解析】 (1) $y = 2x - x^3$ 的导数为 $y' = 2 - 3x^2$.
即在点 $(1, 1)$ 处的切线斜率为 $k = y'|_{x=1} = -1$.
且切点坐标为 $(1, 1)$, 所以切线方程为 $y - 1 = -(x - 1)$,
即 $x + y - 2 = 0$.
(2) $(2, 4)$ 不是曲线上的点, 设切点坐标为 (x_0, y_0) .
则切线方程为 $y - (2x_0 - x_0^3) = (2 - 3x_0^2)(x - x_0)$.
将 $(2, 4)$ 代入得:
 $4 - (2x_0 - x_0^3) = (2 - 3x_0^2)(2 - x_0)$.
化简得 $2x_0^3 - 6x_0^2 = 0$, 解得 $x_0 = 0$ 或 $x_0 = 3$.
所以切点为 $(0, 0)$ 或 $(3, -21)$, 斜率分别对应为 $k = 2$ 或 -25 ,
所以切线方程为 $y = 2x$ 或 $y + 21 = -25(x - 3)$,
即 $2x - y = 0$ 或 $25x + y - 54 = 0$.

【标注】 【知识点】 导数的几何意义; 求过某点的切线方程; 求在某点处的切线方程

3. 已知曲线 $y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{4}{3}$.

(1) 求曲线在 $x = 2$ 处的切线方程 .

(2) 求曲线过点 $(2, 4)$ 的切线方程 .

【答案】 (1) $y = 4x - 4$.

(2) $y = x + 2$ 或 $y = 4x - 4$.

【解析】 (1) $y' = x^2$, $y'|_{x=2} = 4$, 且当 $x = 2$ 时, $y = 4$.

则曲线在 $x = 2$ 处的切线方程为 $y = 4x - 4$.

(2) 设切点为 $P(a, b)$.

则有 $\frac{b-4}{a-2} = y'|_{x=a} = a^2$, 而 $b = \frac{1}{3}a^3 + \frac{4}{3}$.

联立可得: $a^3 - 3a^2 + 4 = 0$.

即 $a^2(a-2) - (a^2-4) = (a-2)(a^2-a-2) = (a-2)^2(a+1) = 0$.

解得: $a = -1$ 或 2 .

当 $a = -1$ 时, $b = 1$, $y'|_{x=-1} = 1$. 此处的切线方程为 $y = x + 2$.

当 $a = 2$ 时, 切线方程为 $y = 4x - 4$.

即过点 $(2, 4)$ 的切线方程为 $y = x + 2$ 或 $y = 4x - 4$.

【标注】【知识点】求在某点处的切线方程; 求过某点的切线方程

4. 已知曲线 $y = ae^x + x \ln x$ 在点 $(1, ae)$ 处的切线方程为 $y = 2x + b$, 则 () .

A. $a = e$, $b = -1$

B. $a = e$, $b = 1$

C. $a = e^{-1}$, $b = 1$

D. $a = e^{-1}$, $b = -1$

【答案】 D

【解析】 曲线 $y = ae^x + x \ln x$ 在点 $(1, ae)$ 处的切线方程为 $y = 2x + b$,

$\therefore y' = ae^x + 1 + \ln x$,

$y'|_{x=1} = ae + 1$,

$\therefore \begin{cases} ae + 1 = 2 \\ ae = b + 2 \end{cases}$,

解得 $a = \frac{1}{e}$, $b = -1$.

故选 D .

【标注】【知识点】已知切线方程求参数

5. 若函数 $f(x) = ax^2 + 1$ 的图象在点 $(1, f(1))$ 处的切线平行于直线 $y = 2x + 1$, 则 $a = (\quad)$.
- A. -1 B. 0 C. $\frac{1}{4}$ D. 1

【答案】 D

【解析】 函数 $f(x) = ax^2 + 1$ 的导数为 $f'(x) = 2ax$,
 可得点 $(1, f(1))$ 处的切线的斜率为 $2a$,
 由函数 $f(x)$ 的图象在点 $(1, f(1))$ 处的切线平行于直线 $y = 2x + 1$,
 可得 $2a = 2$,
 解得 $a = 1$,
 故选 D .

【标注】 【知识点】 已知斜率求切线方程

6. 若曲线 $y = x^4$ 的一条切线 l 与直线 $x + 4y - 8 = 0$ 垂直 , 则 l 的方程为 () .
- A. $4x - y - 3 = 0$ B. $x + 4y - 5 = 0$ C. $4x - y + 3 = 0$ D. $x + 4y + 3 = 0$

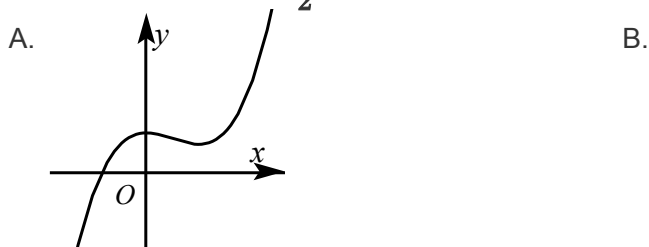
【答案】 A

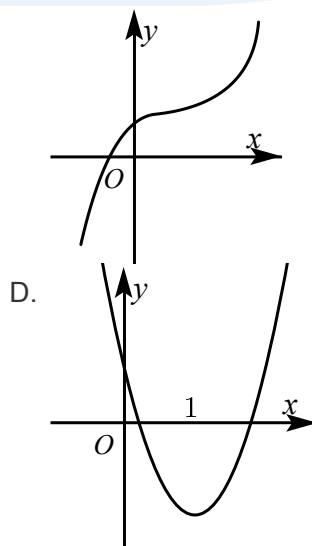
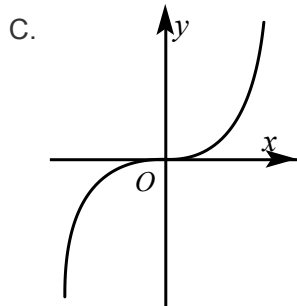
【解析】 设与直线 $x + 4y - 8 = 0$ 垂直的直线 l 为 : $4x - y + m = 0$,
 即曲线 $y = x^4$ 在某一点处的导数为 4 ,
 而 $y' = 4x^3$, $\therefore y = x^4$ 在 $(1, 1)$ 处导数为 4 ,
 将 $(1, 1)$ 代入 $4x - y + m = 0$, 得 $m = -3$,
 故 l 的方程为 $4x - y - 3 = 0$.
 故选 A .

【标注】 【知识点】 导数的几何意义

二、 利用导数判断函数单调性

7. 函数 $f(x) = x^3 - x^2 + \frac{1}{2}$ 的图象大致是 () .





【答案】 A

【解析】 由 $f'(x) = 3x^2 - 2x$ ，于是 $f(x)$ 在 $x = 0, \frac{2}{3}$ 点取得极值。仅A符合。

【标注】 【知识点】已知导函数确认原函数图象

8. 函数 $f(x) = x^2 - 2\ln x$ 的单调减区间是 ()。

- A. $(0, 1)$ B. $(1, +\infty)$ C. $(-\infty, 1)$ D. $(-1, 1)$

【答案】 A

【解析】 函数 $f(x) = x^2 - 2\ln x$ 的定义域为 $\{x|x > 0\}$ ，且导数为 $f'(x) = 2x - \frac{2}{x}$ ，

令 $f'(x) < 0$ ，解得 $0 < x < 1$ ，

故单调减区间为 $(0, 1)$ ，

故选A。

【标注】 【知识点】直接求函数的单调性（不含参）

9. 函数 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ 的单调递增区间为 _____。

【答案】 $(0, e)$

【解析】 $\because$ 函数 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ ，定义域为 $(0, +\infty)$ ，

$$\therefore f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}.$$

令 $f'(x) > 0$ ，即 $\frac{1 - \ln x}{x^2} > 0$ ，解得： $0 < x < e$ ，

$\therefore$ 函数 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ 的单调递增区间是 $(0, e)$,
故答案是 : $(0, e)$.

【标注】【知识点】直接求函数的单调性 (不含参)

10. 函数 $f(x) = x^2 \cdot e^x$ 的单调递减区间为 () .

A. $(-2, 0)$

B. $(-\infty, -2), (0, +\infty)$

C. $(0, 2)$

D. $(-\infty, 0), (2, +\infty)$

【答案】 A

【解析】 由 $f(x) = x^2 \cdot e^x$ 得 $f'(x) = x(x+2)e^x$,
令 $f'(x) = x(x+2)e^x < 0$, 解得 : $-2 < x < 0$,
 $\therefore$ 函数 $f(x) = x^2 \cdot e^x$ 的单调递减区间为 $(-2, 0)$.
故选 A .

【标注】【知识点】利用导数求函数的单调性、单调区间

三、 已知单调性求参数范围

11. 已知函数 $f(x) = -x^3 + ax$ 在区间 $(-1, 1)$ 上是增函数 , 则实数 a 的取值范围是 _____ .

【答案】 $a \geq 3$

【解析】 由题意应有 $f'(x) = -3x^2 + a \geq 0$ 在区间 $(-1, 1)$ 上恒成立 ,
则 $a \geq 3x^2$ 在 $x \in (-1, 1)$ 时恒成立 ,
故 $a \geq 3$.

【标注】【知识点】已知单调性求参数的取值范围

12. 若函数 $f(x) = a \ln x - x$ 在区间 $(1, 2)$ 上单调递增 , 则实数 a 的取值范围是 _____ .

【答案】 $[2, +\infty)$

【解析】 $\therefore f(x)$ 在 $(1, 2)$ 上单调递增 ,
 $\therefore f'(x) = \frac{a}{x} - 1 \geq 0$ 在 $(1, 2)$ 上恒成立 ,

$\therefore a \geq x$ 在 $(1, 2)$ 上恒成立 ,

$\therefore a \geq 2$.

【标注】 **【知识点】** 已知单调性求参数的取值范围