

切线方程与单调性

一、切线方程求法

【重点1】 曲线 $y = f(x)$ “在点 $P(x_0, y_0)$ 处的切线”与“过点 $P(x_0, y_0)$ 的切线”的区别与联系：

① 曲线 $y = f(x)$ 在点 $P(x_0, y_0)$ 处的切线是指 P 为切点，切线斜率为 $k = f'(x_0)$ 的切线；

② 曲线 $y = f(x)$ 过点 $P(x_0, y_0)$ 的切线是指切线经过 P 点.点 P 可以是切点，也可以不是切点，而且这样的直线可能有多条.

【重点2】 利用导数求曲线 $y = f(x)$ 在点 (x_0, y_0) 处的切线方程的步骤：

① 求出 $y = f(x)$ 在 $x = x_0$ 处的导数 $f'(x_0)$ ；

② 利用直线方程的点斜式写出切线方程 $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$.

1. 在某点处的切线方程

例1

1. 曲线 $y = x(3 \ln x + 1)$ 在点 $(1, 1)$ 处的切线方程为 _____ .

A. $y = 3x - 4$

B. $y = 4x - 3$

C. $y = -4x - 3$

D. $y = 4x + 3$

【答案】 B

【解析】 求导函数，可得 $y' = 3 \ln x + 4$

当 $x = 1$ 时， $y' = 4$ ，

∴ 曲线 $y = x(3 \ln x + 1)$ 在点 $(1, 1)$ 处的切线方程为

$y - 1 = 4(x - 1)$ ，即 $y = 4x - 3$.

【标注】 【知识点】 函数的平均变化率、瞬时速度与瞬时变化率；求在某点处的切线方程

2. 曲线 $y = \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} - \frac{1}{2}$ 在点 $M\left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$ 处的切线的斜率为 () .

A. $-\frac{1}{2}$
C. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

B. $\frac{1}{2}$
D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

【答案】 B

【解析】 ∵ $y = \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} - \frac{1}{2}$,

$$\therefore y' = \frac{\cos x(\sin x + \cos x) - (\cos x - \sin x)\sin x}{(\sin x + \cos x)^2} = \frac{1}{(\sin x + \cos x)^2},$$

$$\therefore y'|_{x=\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{(\sin x + \cos x)^2}|_{x=\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}.$$

故选B.

【标注】【知识点】导数的几何意义

练1

3. 曲线 $f(x) = \frac{2}{x} + 3x$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 _____.

【答案】 $y = x + 4$

【解析】 函数的导数 $f'(x) = -\frac{2}{x^2} + 3$,

则 $f'(1) = -2 + 3 = 1$, 即切线斜率 $k = 1$,

$\therefore f(1) = 2 + 3 = 5$, $\therefore$ 切点坐标为 $(1, 5)$,

则切线方程为 $y - 5 = x - 1$, 即 $y = x + 4$,

故答案为: $y = x + 4$.

【标注】【知识点】求在某点处的切线方程; 导数的几何意义

2. 过某点处的切线方程

例2

4. $y = 2x^2 + 8$ 过点 $P(1, 2)$ 的切线方程是().

A. $y = -4x + 6$

B. $y = 12x - 10$

C. $y = -4x + 6$ 或 $y = 12x - 10$

D. $y = 4x + 6$ 或 $y = 12x - 10$

【答案】 C

【解析】 设切点坐标为 $(x_0, 2x_0^2 + 8)$, $y' = 4x$, $\therefore$ 切线斜率 $k = 4x_0$,

$$\text{则 } \frac{2x_0^2 + 8 - 2}{x_0 - 1} = 4x_0,$$

解得 $x_0 = -1$ 或 3 ,

$\therefore$ 所求切线方程为 $y = -4x + 6$ 或 $y = 12x - 10$.

【标注】【知识点】求过某点的切线方程; 导数的几何意义

5. 已知 P, Q 为抛物线 $x^2 = 2y$ 上两点, 点 P, Q 的横坐标分别为 $4, -2$, 过 P, Q 分别作抛物线的切线, 两切线交于点 A , 则点 A 的纵坐标为().
- A. 1 B. 3 C. -4 D. -8

【答案】 C

【解析】 因为 P, Q 两点的横坐标分别为 $4, -2$,

且 P, Q 两点都在抛物线 $y = \frac{1}{2}x^2$ 上, 所以 $P(4, 8), Q(-2, 2)$.

因为 $y' = x$, 所以 $k_{PA} = 4, k_{QA} = -2$,

则直线 PA, QA 的方程联立得 $\begin{cases} y - 8 = 4(x - 4) \\ y - 2 = -2(x + 2) \end{cases}$,

即 $\begin{cases} y = 4x - 8 \\ y = -2x - 2 \end{cases}$, 可得 A 点坐标为 $(1, -4)$.

【标注】【知识点】导数的几何意义的实际应用; 导数的几何意义

练2

6. 回答下列问题:

- (1) 求函数 $y = e^x$ 在 $x = e$ 处的切线的方程;
- (2) 过原点作曲线 $y = e^x$ 的切线, 求切线的方程.

【答案】 (1) $y = e^e x - e^{e+1} + e^e$

(2) $y = ex$

【解析】 (1) 因为切点为 (e, e^e) , 且 $y' = (e^x)' = e^x$, 所以 $k = e^e$, 由点斜式得

$$y - e^e = e^e(x - e), \text{ 即 } y = e^e x - e^{e+1} + e^e.$$

(2) 设切点为 (x_0, e^{x_0}) , $\therefore y' = (e^x)' = e^x$, $\therefore k = e^{x_0}$, 由点斜式得

$$y - e^{x_0} = e^{x_0}(x - x_0), \therefore \text{切线过原点}, \therefore 0 - e^{x_0} = e^{x_0}(0 - x_0) \therefore e^{x_0} > 0, \therefore$$

$$x_0 = 1, \therefore \text{切点为}(1, e), k = e. \text{ 由点斜式, 得: } y - e = e(x - 1), \text{ 即: } y = ex.$$

【标注】【知识点】函数的平均变化率、瞬时速度与瞬时变化率; 导数的几何意义

3. 根据切线方程求解参数值

例3

7. 直线 $y = kx + 1$ 与曲线 $y = x^3 + ax + b$ 相切于点 $A(1, 3)$, 则 $2a + b = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 1

【解析】 由题意得, $y' = 3x^2 + a$,

$$\therefore k = 3 + a \text{ ①},$$

$\therefore$ 切点为 $A(1, 3)$,

$$\therefore 3 = k + 1 \text{ ②},$$

$$3 = 1 + a + b \text{ ③},$$

由①②③解得, $a = -1$, $b = 3$,

$$\therefore 2a + b = 1.$$

【标注】 【知识点】 导数的几何意义

练3

8. 若曲线 $y = x^2 + ax + b$ 在点 $(0, b)$ 处的切线方程是 $x + y - 1 = 0$, 则 () .

A. $a = 1, b = 1$

B. $a = -1, b = 1$

C. $a = 1, b = -1$

D. $a = -1, b = -1$

【答案】 B

【解析】 $\because y = x^2 + ax + b$,

$$\therefore y' = 2x + a,$$

$$\therefore x = 0 \text{ 时}, y' = a,$$

$\therefore$ 曲线 $y = x^2 + ax + b$ 在点 $(0, b)$ 处的切线方程为 $y - b = ax$,

$$\text{即 } -ax + y - b = 0,$$

$\therefore$ 曲线 $y = x^2 + ax + b$ 在点 $(0, b)$ 处的切线方程是 $x + y - 1 = 0$,

$$\therefore a = -1, b = 1.$$

故选B.

【标注】 【知识点】 已知切线方程求参数

4. 切线的位置关系问题

例4

9. 曲线 $y = x \ln x$ 在点 (e, e) 处的切线与直线 $x + ay = 1$ 垂直, 则实数 a 的值为 () .

A. 2

B. -2

C. $\frac{1}{2}$

D. $-\frac{1}{2}$

【答案】 A

【解析】 $\because y = x \ln x, \therefore y' = 1 + \ln x,$

$\therefore$ 在 (e, e) 处切线斜率为 2 ,

$\therefore$ 在点 (e, e) 处的切线与直线 $x + ay = 1$ 垂直 ,

$\therefore -\frac{1}{a} \times 2 = -1$, 即 $a = 2$, 选 A.

【标注】 【知识点】 求在某点处的切线方程

10. 已知 $f(x) = -x^2 - 3, g(x) = 2x \ln x - ax$.

若函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $x = 1$ 处的切线平行 , 求函数 $g(x)$ 在 $(1, g(1))$ 处的切线方程 .

【答案】 (1) $2x + y + 2 = 0$.

【解析】 (1) $f'(x) = -2x$,

故 $k = f'(1) = -2$,

而 $g'(x) = 2(\ln x + 1) - a$, 故 $g'(1) = 2 - a$,

故 $2 - a = -2$, 解得 : $a = 4$,

故 $g(1) = -a = -4$,

故 $g(x)$ 的切线方程是 : $y + 4 = -2(x - 1)$,

即 $2x + y + 2 = 0$.

【标注】 【知识点】 利用导数解决不等式恒成立问题

练4

11. 若曲线 $y = x^2 - 1$ 与 $y = 1 - x^3$ 在 $x = x_0$ 处的切线互相垂直 , 则 x_0 等于 () .

A. $\frac{\sqrt[3]{36}}{6}$
C. $\frac{2}{3}$

B. $-\frac{\sqrt[3]{36}}{6}$
D. $\frac{2}{3}$ 或 0

【答案】 A

【解析】 方法一 : 曲线 $y = x^2 - 1$ 在 $x = x_0$ 处的切线斜率为 $y'(x_0) = 2x_0$;

曲线 $y = 1 - x^3$ 在 $x = x_0$ 处的切线的斜率为 $y'(x_0) = -3x_0^2$,

由题意有 : $2x_0 \cdot (-3x_0^2) = -1$,

解得 $x_0 = \sqrt[3]{\frac{1}{6}} = \frac{\sqrt[3]{36}}{6}$.

方法二：曲线 $y = x^2 - 1$ 在 $x = x_0$ 处的切线斜率为

$$y'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 2x_0 + \Delta x = 2x_0 ;$$

曲线 $y = 1 - x^3$ 在 $x = x_0$ 处的切线的斜率为

$$y'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[1 - (x_0 + \Delta x)^3] - [1 - (x_0)^3]}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} -3x_0^2 - 3x_0\Delta x - \Delta x^2 = -3x_0^2$$

$$, \text{由题意有: } 2x_0 \cdot (-3x_0^2) = -1, \text{解得 } x_0 = \sqrt[3]{\frac{1}{6}} = \frac{\sqrt[3]{36}}{6} .$$

【标注】【知识点】求在某点处的切线方程；导数的几何意义

12. 已知抛物线 $y = x^2 + bx + c$ 在 $(1, 2)$ 处的切线与直线 $y = x - 2$ 平行，则 $b = \underline{\hspace{1cm}}$ ， $c = \underline{\hspace{1cm}}$ 。

【答案】 $-1; 2$

【解析】 $\because y' = 2x + b$ ，抛物线 $y = x^2 + bx + c$ 在 $(1, 2)$ 处的切线与直线 $y = x - 2$ 平行，

$$\therefore \text{可得} \begin{cases} 1 + b + c = 2 \\ 2 + b = 1 \end{cases}, \text{解得 } b = -1, c = 2 .$$

【标注】【知识点】已知切线方程求参数

5. 公切线问题

例5

13. 若直线 $y = kx + b$ 是曲线 $y = \ln x + 2$ 的切线，也是曲线 $y = \ln(x + 1)$ 的切线，则 $b = \underline{\hspace{1cm}}$ 。

【答案】 $1 - \ln 2$

【解析】 方法一：设直线 $y = kx + b$ 与曲线 $y = \ln x + 2$ 和曲线 $y = \ln(x + 1)$ 的切点分别为

$(x_1, kx_1 + b)$ 和 $(x_2, kx_2 + b)$ 。

由导数的几何意义可得 $k = \frac{1}{x_1} = \frac{1}{x_2 + 1}$ ，即 $x_1 = x_2 + 1$ ，

由切点也在各自的曲线上，可得 $\begin{cases} kx_1 + b = \ln x_1 + 2 \\ kx_2 + b = \ln(x_2 + 1) \end{cases}$ ，

$$\text{解得} \begin{cases} k = 2 \\ x_1 = \frac{1}{2} \\ x_2 = -\frac{1}{2} \end{cases},$$

从而 $kx_1 + b = \ln x_1 + 2$ ，则 $b = \ln x_1 + 1 = 1 - \ln 2$ 。

方法二：由 $y = \ln x + 2$ ，得 $y' = \frac{1}{x}$ ，

由 $y = \ln(x + 1)$ ，得 $y' = \frac{1}{x + 1}$ 。

设直线 $y = kx + b$ 与曲线 $y = \ln x + 2$ 相切于点 $(x_1, \ln x_1 + 2)$,

$$\text{则 } k = \frac{1}{x_1} \text{ ①, } \ln x_1 + 2 = kx_1 + b \text{ ②,}$$

设直线 $y = kx + b$ 与曲线 $y = \ln(x + 1)$ 相切于点 $(x_2, \ln(x_2 + 1))$,

$$\text{则 } k = \frac{1}{x_2 + 1} \text{ ③, } \ln(x_2 + 1) = kx_2 + b \text{ ④,}$$

$$\text{由①得 } x_1 = \frac{1}{k}, \text{ 代入②得 } \ln \frac{1}{k} + 2 = k \cdot \frac{1}{k} + b, \text{ 即 } -\ln k + 1 = b \text{ ⑤,}$$

$$\text{由③得 } x_2 = \frac{1}{k} - 1, \text{ 代入④得 } \ln \frac{1}{k} = k \cdot \left(\frac{1}{k} - 1 \right) + b, \text{ 即 } -\ln k = 1 - k + b \text{ ⑥,}$$

$$\text{⑤-⑥得 } 1 = k - 1, k = 2,$$

$$\text{代入⑤得 } b = -\ln 2 + 1 = 1 - \ln 2,$$

故答案为 $1 - \ln 2$.

【标注】【知识点】求过某点的切线方程；导数的几何意义的实际应用；导数的几何意义

14. 若曲线 $f(x) = a \cos x$ 与曲线 $g(x) = x^2 + bx + 1$ 在交点 $(0, m)$ 处有公切线, 则 $a + b =$ _____.

【答案】 1

$$\text{【解析】} \because f(x) = a \cos x, g(x) = x^2 + bx + 1,$$

$$\therefore f'(x) = -a \sin x, g'(x) = 2x + b,$$

$$\because \text{曲线 } f(x) = a \cos x \text{ 与曲线 } g(x) = x^2 + bx + 1 \text{ 在交点 } (0, m) \text{ 处有公切线,}$$

$$\therefore f(0) = a = g(0) = 1 \text{ 且 } f'(0) = 0 = g'(0) = b,$$

$$\text{即 } a = 1, b = 0,$$

$$\therefore a + b = 1,$$

故答案为: 1.

【标注】【知识点】公切线的计算

练5

15. 若直线 $y = kx + b$ 是曲线 $y = e^x - 1$ 的切线, 也是曲线 $y = e^{x-2}$ 的切线, 则 $k =$ ().

A. e

B. $\frac{1}{e}$

C. $\frac{1}{2}$

D. 2

【答案】 C

$$\text{【解析】方法一: 设切线 } y = kx + b \text{ 与 } y = e^x - 1 \text{ 的交点为 } (x_1, y_1), \text{ 则 } y' = e^x,$$

$$\therefore k = e^{x_1}, x_1 = \ln k,$$

$$\text{由} \begin{cases} y_1 = kx_1 + b \\ y_1 = e^{x_1} - 1 \end{cases}, \text{得} kx_1 + b = e^{x_1} - 1, \text{即} k \ln k = b = k - 1 \text{①},$$

设切线 $y = kx + b$ 与 $y = e^{x-2}$ 的切点为 (x_2, y_2) ,

$$\text{则} y' = e^{x-2}, \therefore k = e^{x_2-2}, \therefore x_2 = \ln k + 2,$$

$$\text{由} \begin{cases} y_2 = kx_2 + b \\ y_2 = e^{x_2-2} \end{cases} \text{得} : k(\ln k + 2) = b = k \text{②},$$

$$\text{联立①②得} : k = \frac{1}{2}.$$

$$\text{方法二} : y = e^x - 1, y' = e^x$$

$$y = e^{x-2}, y' = e^{x-2}$$

设直线 $y = kx + b$ 与曲线 $y = e^x - 1$ 切于点 $(x_1, e^{x_1} - 1)$

$$\text{则有} : k = e^{x_1} \text{①}, e^{x_1} - 1 = kx_1 + b \text{②}$$

设直线 $y = kx + b$ 与曲线 $y = e^{x-2}$ 切于点 (x_2, e^{x_2-2})

$$\text{则有} : k = e^{x_2-2} \text{③}, e^{x_2-2} = kx_2 + b \text{④}$$

$$\text{由①得} : x_1 = \ln k, \text{代入②} : k - 1 = k \ln k + b \text{⑤}$$

$$\text{由③得} : x_2 = \ln k + 2, \text{代入④} : k = k(\ln k + 2) + b, \text{即} 0 = k \ln k + k + b \text{⑥}$$

$$\text{⑤}-\text{⑥} : k - 1 = -k, k = \frac{1}{2}.$$

故选C.

【标注】【知识点】公切线的计算

二、利用导数判断函数单调性

1. 函数导数与单调性的关系

若函数 $y = f(x)$ 在区间 (a, b) 内可导

(1)如果在 (a, b) 内, $f'(x) > 0$, 则 $f(x)$ 在此区间是增函数, (a, b) 为 $f(x)$ 的单调增区间.

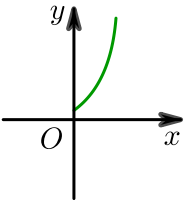
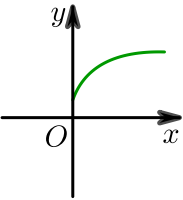
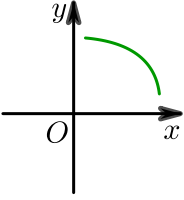
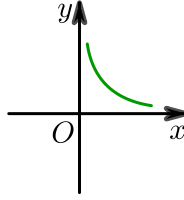
(2)如果在 (a, b) 内, $f'(x) < 0$, 则 $f(x)$ 在此区间是减函数, (a, b) 为 $f(x)$ 的单调减区间.

(3)如果在 (a, b) 内, $f'(x) = 0$ 恒成立, 则 $f(x)$ 在此区间是常函数, 不具有单调性.

【Tips】函数值变化快慢与导数的关系

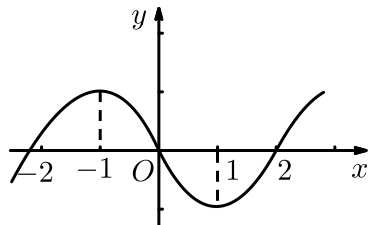
一般地, 如果一个函数在某一范围内导数的绝对值较大, 那么在这个范围内函数值变化得快, 这时, 函数的图象就比较“陡峭”(向上或向下); 如果一个函数在某一范围内导数的绝对值较小, 那么在这个范围内函数值变化得慢, 函数的图象就“平缓”一些.

常见的对应情况如下表所示.

图象				
$f'(x)$ 变化规律	$f'(x) > 0$ 且越来越大	$f'(x) > 0$ 且越来越小	$f'(x) < 0$ 且越来越小	$f'(x) < 0$ 且越来越大
函数值变化规律	函数值增加得越来越快	函数值增加得越来越慢	函数值减小得越来越快	函数值减小得越来越慢

例1

16. 已知 $\mathbf{R}$ 上的可导函数 $f(x)$ 的图象如图所示，则不等式 $(x^2 - 2x - 3)f'(x) > 0$ 的解集为（ ）.



- A. $(-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$ B. $(-\infty, -2) \cup (1, 2)$
C. $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (3, +\infty)$ D. $(-\infty, -1) \cup (-1, 0) \cup (2, +\infty)$

【答案】 C

【解析】 由已知中函数 $f(x)$ 的图象可得：

当 $x < -1$ 时，函数为增函数，此时 $f'(x) > 0$ ， $x^2 - 2x - 3 > 0$ ，

$(x^2 - 2x - 3)f'(x) > 0$ ；

当 $-1 < x < 1$ 时，函数为减函数，此时 $f'(x) < 0$ ， $x^2 - 2x - 3 < 0$ ，

$(x^2 - 2x - 3)f'(x) > 0$ ；

当 $x > 1$ 时，函数为增函数，此时 $f'(x) > 0$ ；

当 $1 < x < 3$ 时， $x^2 - 2x - 3 < 0$ ， $(x^2 - 2x - 3)f'(x) < 0$ ，

当 $x > 3$ 时， $x^2 - 2x - 3 > 0$ ， $(x^2 - 2x - 3)f'(x) > 0$ ；

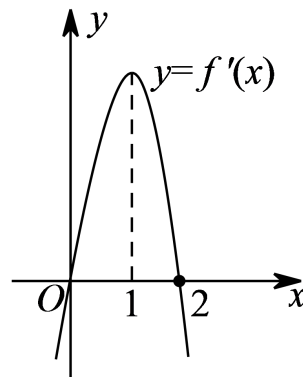
综上所述：不等式 $(x^2 - 2x - 3)f'(x) > 0$ 的解集为 $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (3, +\infty)$ 。

故选C。

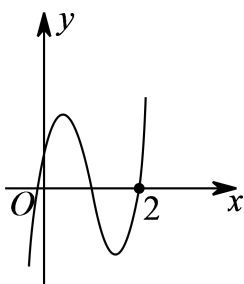
【标注】【知识点】利用导数求函数的单调性、单调区间

练1

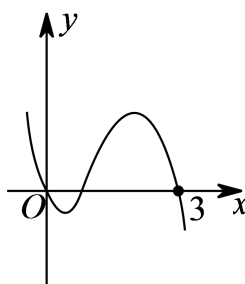
17. 已知 $f'(x)$ 是函数 $y = f(x)$ 的导函数，且 $y = f'(x)$ 的图象如图所示，则函数 $y = f(x)$ 的图象可能是 () .



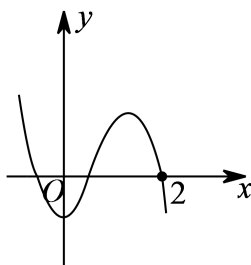
A.



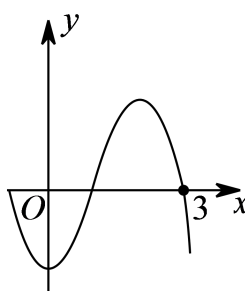
B.



C.



D.



【答案】 D

【解析】 $f'(x)$ 在 $(0, 2)$ 上恒大于零，在 $(-\infty, 0)$ 和 $(2, +\infty)$ 上恒负，
故 $f(x)$ 在 $(0, 2)$ 上单增，在 $(-\infty, 0)$ 和 $(2, +\infty)$ 上单减。
故选D。

【标注】【知识点】函数图象的识别问题；图象法

2. 求可导函数单调区间的一般步骤

(1)确定函数的定义域；

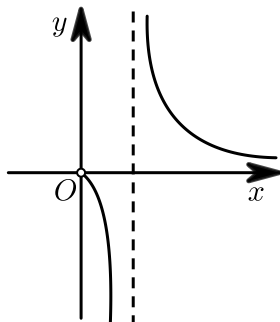
(2)求导数 $f'(x)$ ，并对导数进行整理（常用方法：通分、因式分解）；

(3)由 $f'(x) > 0$ （或 $f'(x) < 0$ ）解出相应的 x 的取值范围．当 $f'(x) > 0$ 时， $f(x)$ 在相应的区间内是单调增函数；当 $f'(x) < 0$ 时， $f(x)$ 在相应的区间内是单调减函数．

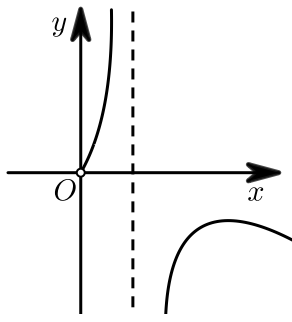
例2

18. 函数 $y = \frac{2x}{\ln x}$ 的图象大致为（ ）．

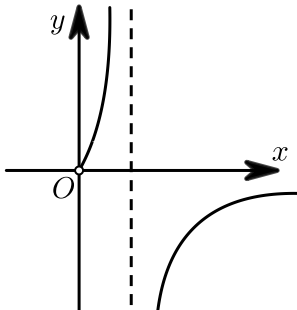
A.



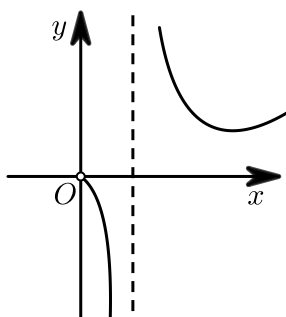
B.



C.



D.



【答案】 D

【解析】 方法一：当 $0 < x < 1$ 时， $\ln x < 0$ ，所以 $y < 0$ ，排除B，C；

$$\text{函数的导数 } f'(x) = \frac{2 \ln x - 2x \cdot \frac{1}{x}}{(\ln x)^2} = \frac{2 \ln x - 2}{(\ln x)^2}.$$

由 $f'(x) > 0$ ，得 $\ln x > 1$ ，即 $x > e$ ，此时函数单调递增；

由 $f'(x) < 0$ ，得 $\ln x < 1$ 且 $x \neq 1$ ，即 $0 < x < 1$ 或 $1 < x < e$ ，此时函数单调递减．

故选D．

方法二：利用特殊点法：当 $x = \frac{1}{e}$ 时， $y = -\frac{2}{e} < 0$ ，排除B，C；

当 $x_1 = e$ ， $x_2 = e^2$ 时， $y_1 = 2e$ ， $y_2 = e^2$ ．

易知 $y_1 < y_2$ ，排除A．

故选D．

【标注】【知识点】利用导数确定函数的图象

【素养】数学运算

19. 函数 $f(x) = 3 + x \ln x$ 的单调递减区间为 () .

A. $\left(0, \frac{1}{e}\right)$
C. $\left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$

B. $\left(-\infty, \frac{1}{e}\right)$
D. $\left(\frac{1}{e}, e\right)$

【答案】 A

【解析】 $f'(x) = \ln x + 1$,

令 $f'(x) < 0$, 则 $\ln x + 1 < 0$,

解得 $0 < x < \frac{1}{e}$,

所以函数 $f(x) = 3 + x \ln x$ 的单调递减区间是 $\left(0, \frac{1}{e}\right)$.

故选 A .

【标注】 【素养】 数学运算

【知识点】 直接求函数的单调性 (不含参)

20. 若 $x \in [0, 2\pi]$, 则函数 $y = \sin x - x \cos x$ 的单调递增区间是 _____ .

【答案】 $[0, \pi]$

【解析】 方法一 : $f'(x) = \cos x - \cos x + x \sin x = x \sin x > 0$, $x \in [0, 2\pi]$, 解得 $x \in [0, \pi]$, 故答案为 $x \in [0, \pi]$.

方法二 : $y' = \cos x - \cos x + x \sin x = x \sin x$, $x \in [0, 2\pi]$ 时 , $y' > 0 \Leftrightarrow x \in (0, \pi)$.

【标注】 【知识点】 利用导数求函数的单调性、单调区间

21. 函数 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \ln x$ 的单调递减区间是 () .

A. $(-\infty, -1)$

B. $(1, +\infty)$

C. $(-1, 1)$

D. $(0, 1)$

【答案】 D

【解析】 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, 且 $f'(x) = x - \frac{1}{x} = \frac{x^2 - 1}{x}$,

令 $f'(x) < 0$, 得 $\begin{cases} x > 0 \\ x^2 - 1 < 0 \end{cases}$,

解得 $0 < x < 1$,

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 的单调递减区间是 $(0, 1)$.

故选 D .

【标注】【知识点】利用导数求函数的单调性、单调区间

22. 函数 $f(x) = x \cdot e^{-x}$ 的一个单调递增区间是 () .

- A. $[-1, 0]$ B. $[2, 8]$ C. $[1, 2]$ D. $[0, 2]$

【答案】 A

【解析】 由题意知, $f'(x) = e^{-x} + x \cdot (-1)e^{-x} = (1-x)e^{-x}$.

当 $x \leq 1$ 时, $f'(x) \geq 0$, $f(x)$ 单调递增 .

故选: A .

【标注】【素养】数学运算

【知识点】直接求函数的单调性 (不含参)

 练2

23. 函数 $f(x) = -x^3 - x^2 + x$ 的单调减区间是 () .

- A. $(-\infty, -1)$ B. $(\frac{1}{3}, +\infty)$
C. $(-\infty, -1)$ 或 $(\frac{1}{3}, +\infty)$ D. $(-1, \frac{1}{3})$

【答案】 C

【解析】 令 $f'(x) = -3x^2 - 2x + 1 < 0$, 所以 $x > \frac{1}{3}$ 或 $x < -1$, 故选C

【标注】【知识点】利用导数求函数的单调性、单调区间

24. 函数 $y = x \ln x$ 在 $(0, 5)$ 上是 () .

- A. 单调增函数
B. 在 $(0, \frac{1}{e})$ 上单调递增, 在 $(\frac{1}{e}, 5)$ 上单调递减 .
C. 单调减函数
D. 在 $(0, \frac{1}{e})$ 上单调递减, 在 $(\frac{1}{e}, 5)$ 上单调递增 .

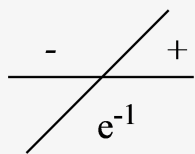
【答案】 D

【解析】 $y' = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1$.

令 $y' = 0$.

即 $\ln x + 1 = 0$.

得 $x = e^{-1}$.



$\therefore$ 在 $(0, \frac{1}{e})$ 上单调递增 .

在 $(\frac{1}{e}, 5)$ 上单调递减 .

故选 D .

【标注】【知识点】利用导数求函数的单调性、单调区间

三、已知单调性求参数范围

【重点】 $f(x)$ 在某个区间内单调递增 (减) 的充要条件是 $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$) , 且对于该区间的任一子区间导函数都不恒为 0 .

【教师备注1】 形象一点儿的解释就是函数的图像不许出现平台 . 也就是说 , 在区间内的个别点处有 $f'(x) = 0$ 并不影响函数 $f(x)$ 在该区间内的单调性 .

【教师备注2】 一定要强调函数单增或者单减时 , 求解的导数不等式应当是 $f'(x) \geq 0$ 或 $f'(x) \leq 0$, 很多学生会错写成 $>$ 或 $<$.

例1

25. 若函数 $f(x) = a \ln x - x$ 在区间 $(0, 2)$ 上单调递增 , 则实数 a 的取值范围是 _____ .

【答案】 $[2, +\infty)$

【解析】 $\because f(x) = a \ln x - x, x \in (0, 2)$,

$$\therefore f'(x) = \frac{a}{x} - 1 = \frac{a-x}{x} .$$

$$\text{令 } f'(x) \geq 0, \therefore a \geq x, \therefore a \geq 2 .$$

【标注】【知识点】区间上恒单调

26. 已知函数 $f(x) = x^2 e^x$, 若 $f(x)$ 在 $[t, t+1]$ 上不单调 , 则实数 t 的取值范围是 () .

A. $(-\infty, -3) \cup (0, +\infty)$

- B. $(-3, -2) \cup (-1, 0)$
 C. $(-2, -1)$
 D. $(-\infty, -2) \cup (-1, +\infty)$

【答案】 B

【解析】 由 $f(x) = x^2 e^x$ 得 $f'(x) = x(x+2)e^x$,
 $\therefore f(x)$ 在 $(-\infty, -2)$ 和 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 则 $(-2, 0)$ 上单调递减,
 $\therefore 0$ 或 -2 是函数的极值点,
 若函数 $f(x) = x^2 e^x$ 在区间 $[t, t+1]$ 上不单调,
 则函数 $f(x) = x^2 e^x$ 在区间 $(t, t+1)$ 上存在极值点,
 $\therefore t < -2 < t+1$ 或 $t < 0 < t+1$,
 解得 $-3 < t < -2$ 或 $-1 < t < 0$,
 即实数 t 的取值范围是 $(-3, -2) \cup (-1, 0)$.
 故选 B .

【标注】 【知识点】 区间上不单调

练1

27. 三次函数 $f(x) = ax^3 + x$ 在 $x \in (-\infty, +\infty)$ 内是增函数, 则 () .

- A. $a > 0$ B. $a < 0$ C. $a = 1$ D. $a = \frac{1}{3}$

【答案】 A

【解析】 由题意有 $f'(x) = 3ax^2 + 1 \geq 0$ 恒成立,
 易得 $a \geq 0$, 又 $f(x)$ 为三次函数, 故 $a \neq 0$,
 故 $a > 0$.

【标注】 【知识点】 区间上恒单调