

切线方程与单调性

一、切线方程求法

【重点1】曲线 $y = f(x)$ “在点 $P(x_0, y_0)$ 处的切线”与“过点 $P(x_0, y_0)$ 的切线”的区别与联系：

①曲线 $y = f(x)$ 在点 $P(x_0, y_0)$ 处的切线是指 P 为切点，切线斜率为 $k = f'(x_0)$ 的切线；

②曲线 $y = f(x)$ 过点 $P(x_0, y_0)$ 的切线是指切线经过 P 点.点 P 可以是切点，也可以不是切点，而且这样的直线可能有多条.

【重点2】利用导数求曲线 $y = f(x)$ 在点 (x_0, y_0) 处的切线方程的步骤：

①求出 $y = f(x)$ 在 $x = x_0$ 处的导数 $f'(x_0)$ ；

②利用直线方程的点斜式写出切线方程 $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$.

1. 在某点处的切线方程

例1

1. 曲线 $y = x(3 \ln x + 1)$ 在点 $(1, 1)$ 处的切线方程为 _____ .

- A. $y = 3x - 4$ B. $y = 4x - 3$ C. $y = -4x - 3$ D. $y = 4x + 3$

2. 曲线 $y = \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} - \frac{1}{2}$ 在点 $M\left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$ 处的切线的斜率为().

- A. $-\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{2}$
C. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

练1

3. 曲线 $f(x) = \frac{2}{x} + 3x$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 _____ .

2. 过某点处的切线方程

例2

4. $y = 2x^2 + 8$ 过点 $P(1, 2)$ 的切线方程是().

- A. $y = -4x + 6$ B. $y = 12x - 10$
C. $y = -4x + 6$ 或 $y = 12x - 10$ D. $y = 4x + 6$ 或 $y = 12x - 10$

5. 已知 P, Q 为抛物线 $x^2 = 2y$ 上两点，点 P, Q 的横坐标分别为4, -2，过 P, Q 分别作抛物线的切线，两切线交于点 A ，则点 A 的纵坐标为().

A. 1

B. 3

C. -4

D. -8

 练2

6. 回答下列问题：

- (1) 求函数 $y = e^x$ 在 $x = e$ 处的切线的方程；
(2) 过原点作曲线 $y = e^x$ 的切线，求切线的方程。

3. 根据切线方程求解参数值

 例3

7. 直线 $y = kx + 1$ 与曲线 $y = x^3 + ax + b$ 相切于点 $A(1, 3)$, 则 $2a + b =$ _____.

 练3

8. 若曲线 $y = x^2 + ax + b$ 在点 $(0, b)$ 处的切线方程是 $x + y - 1 = 0$, 则 ().

- A. $a = 1$, $b = 1$
B. $a = -1$, $b = 1$
C. $a = 1$, $b = -1$
D. $a = -1$, $b = -1$

4. 切线的位置关系问题

 例4

9. 曲线 $y = x \ln x$ 在点 (e, e) 处的切线与直线 $x + ay = 1$ 垂直, 则实数 a 的值为 ().

- A. 2 B. -2 C. $\frac{1}{2}$ D. $-\frac{1}{2}$

10. 已知 $f(x) = -x^2 - 3$, $g(x) = 2x \ln x - ax$.

若函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $x = 1$ 处的切线平行, 求函数 $g(x)$ 在 $(1, g(1))$ 处的切线方程.

 练4

11. 若曲线 $y = x^2 - 1$ 与 $y = 1 - x^3$ 在 $x = x_0$ 处的切线互相垂直, 则 x_0 等于().

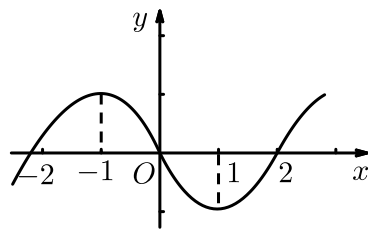
- A. $\frac{\sqrt[3]{36}}{6}$ B. $-\frac{\sqrt[3]{36}}{6}$
C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{2}{3}$ 或 0

12. 已知抛物线 $y = x^2 + bx + c$ 在 $(1, 2)$ 处的切线与直线 $y = x - 2$ 平行, 则 $b = \underline{\hspace{2cm}}$, $c = \underline{\hspace{2cm}}$.

5. 公切线问题

 例5

16. 已知 $\mathbf{R}$ 上的可导函数 $f(x)$ 的图象如图所示, 则不等式 $(x^2 - 2x - 3)f'(x) > 0$ 的解集为 ().



A. $(-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$

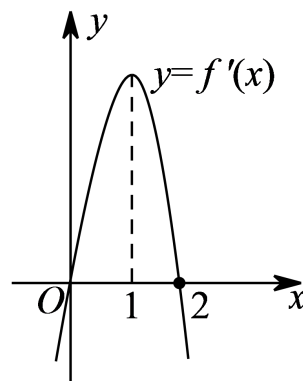
B. $(-\infty, -2) \cup (1, 2)$

C. $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (3, +\infty)$

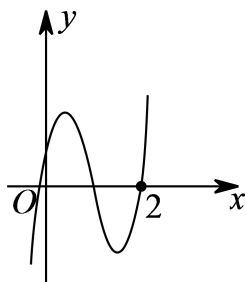
D. $(-\infty, -1) \cup (-1, 0) \cup (2, +\infty)$

🔗 练1

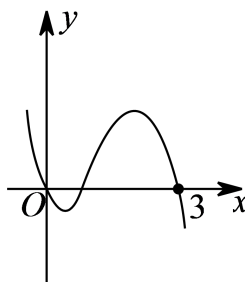
17. 已知 $f'(x)$ 是函数 $y = f(x)$ 的导函数, 且 $y = f'(x)$ 的图象如图所示, 则函数 $y = f(x)$ 的图象可能是 ().



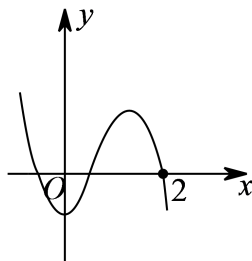
A.



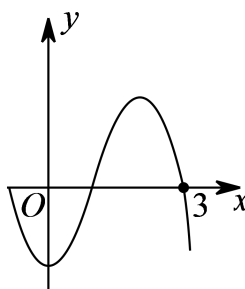
B.



C.



D.



2. 求可导函数单调区间的一般步骤

(1) 确定函数的定义域;

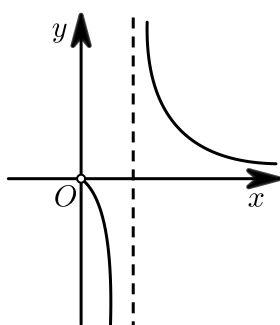
(2)求导数 $f'(x)$ ，并对导数进行整理（常用方法：通分、因式分解）；

(3)由 $f'(x) > 0$ （或 $f'(x) < 0$ ）解出相应的 x 的取值范围．当 $f'(x) > 0$ 时， $f(x)$ 在相应的区间内是单调增函数；当 $f'(x) < 0$ 时， $f(x)$ 在相应的区间内是单调减函数．

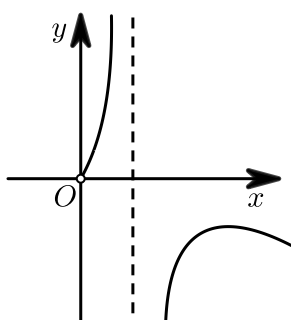
例2

18. 函数 $y = \frac{2x}{\ln x}$ 的图象大致为（ ）．

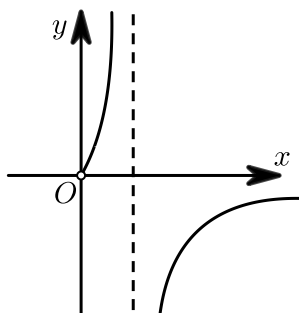
A.



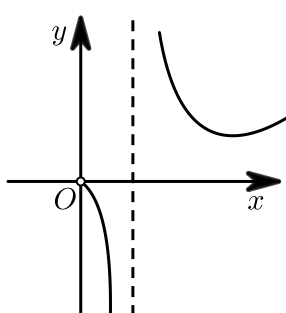
B.



C.



D.



19. 函数 $f(x) = 3 + x \ln x$ 的单调递减区间为（ ）．

A. $\left(0, \frac{1}{e}\right)$

B. $\left(-\infty, \frac{1}{e}\right)$

C. $\left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$

D. $\left(\frac{1}{e}, e\right)$

20. 若 $x \in [0, 2\pi]$ ，则函数 $y = \sin x - x \cos x$ 的单调递增区间是 _____ ．

21. 函数 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \ln x$ 的单调递减区间是（ ）．

A. $(-\infty, -1)$

B. $(1, +\infty)$

C. $(-1, 1)$

D. $(0, 1)$

22. 函数 $f(x) = x \cdot e^{-x}$ 的一个单调递增区间是（ ）．

A. $[-1, 0]$

B. $[2, 8]$

C. $[1, 2]$

D. $[0, 2]$

练2

23. 函数 $f(x) = -x^3 - x^2 + x$ 的单调减区间是（ ）．

A. $(-\infty, -1)$

B. $\left(\frac{1}{3}, +\infty\right)$

C. $(-\infty, -1)$ 或 $\left(\frac{1}{3}, +\infty\right)$

D. $\left(-1, \frac{1}{3}\right)$

24. 函数 $y = x \ln x$ 在 $(0, 5)$ 上是 () .

A. 单调增函数

B. 在 $(0, \frac{1}{e})$ 上单调递增, 在 $(\frac{1}{e}, 5)$ 上单调递减 .

C. 单调减函数

D. 在 $(0, \frac{1}{e})$ 上单调递减, 在 $(\frac{1}{e}, 5)$ 上单调递增 .

三、已知单调性求参数范围

【重点】 $f(x)$ 在某个区间内单调递增 (减) 的充要条件是 $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$) , 且对于该区间的任一子区间导函数都不恒为0。

例1

25. 若函数 $f(x) = a \ln x - x$ 在区间 $(0, 2)$ 上单调递增, 则实数 a 的取值范围是 _____ .

26. 已知函数 $f(x) = x^2 e^x$, 若 $f(x)$ 在 $[t, t+1]$ 上不单调, 则实数 t 的取值范围是 () .

A. $(-\infty, -3) \cup (0, +\infty)$

B. $(-3, -2) \cup (-1, 0)$

C. $(-2, -1)$

D. $(-\infty, -2) \cup (-1, +\infty)$

练1

27. 三次函数 $f(x) = ax^3 + x$ 在 $x \in (-\infty, +\infty)$ 内是增函数, 则 () .

A. $a > 0$

B. $a < 0$

C. $a = 1$

D. $a = \frac{1}{3}$