

导数的定义与运算练习题

一、导数概念与几何意义

1. 从 x_1 到 x_2 , 函数 $f(x) = 2x + 1$ 的平均变化率为() .

A. $2x_1 - 2x_2$

B. $2x_2 - 2x_1$

C. 2

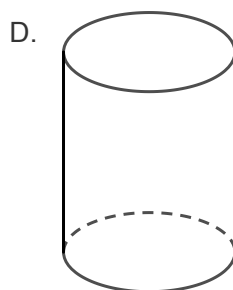
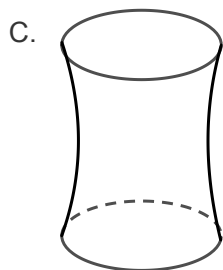
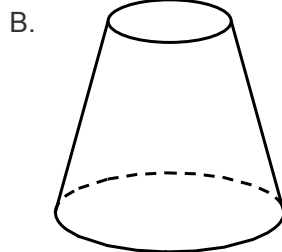
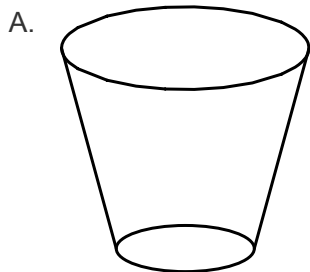
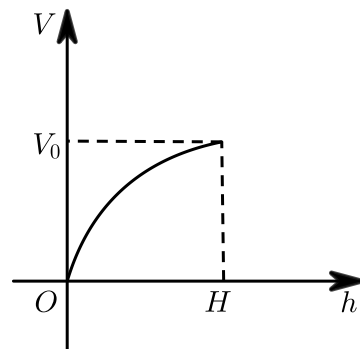
D. -2

【答案】 C

【解析】 从 x_1 到 x_2 , 函数 $f(x) = 2x + 1$ 的平均变化率为2 .

【标注】 【知识点】 函数的平均变化率、瞬时速度与瞬时变化率；导数的几何意义的实际应用

2. 向高为 H 的水瓶中注水, 注满为止, 如果注水量 V 与水深 h 的函数图象如图所示, 那么水瓶的形状是() .



函数在点 $(1, f(1))$ 和 $(2, f(2))$ 的切线斜率分别为 $f'(1)$ 和 $f'(2)$,

结合图象可知 $f'(1) < \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} < f'(2)$, 即 $f'(1) < a < f'(2)$.

【标注】【知识点】导数的几何意义

5. 已知曲线 $f(x) = \frac{ax^2}{x+1}$ 在点 $(1, f(1))$ 处切线的斜率为1, 则实数 a 的值为().
- A. $\frac{3}{2}$ B. $-\frac{3}{2}$ C. $-\frac{3}{4}$ D. $\frac{4}{3}$

【答案】 D

【解析】 $\because f'(x) = \frac{ax^2 + 2ax}{(x+1)^2}$, 曲线 $f(x) = \frac{ax^2}{x+1}$ 在点 $(1, f(1))$ 处切线的斜率为1,

$$\therefore f'(1) = \frac{3a}{4} = 1,$$

$$\text{计算得出 } a = \frac{4}{3}.$$

所以D选项是正确的.

【标注】【知识点】导数的几何意义; 导数的几何意义的实际应用

二、基本初等函数导数以及四则运算

6. 已知函数 $f(x) = \sin x$ 的导函数为 $f'(x)$, 则 $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 0

【解析】 $f(x) = \sin x$, $f'(x) = \cos x$,

$$\therefore f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

【标注】【知识点】利用公式和四则运算法则求导

7. 曲线 $y = x^n$ 在 $x = 2$ 处的导数为12, 则正整数 $n = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 3

【解析】 $y' = nx^{n-1}$,

$$\text{当 } x = 2 \text{ 时, } n \cdot 2^{n-1} = 12 = 2^2 \cdot 3,$$

$$\therefore n = 3.$$

【标注】【知识点】利用公式和四则运算法则求导

8. 已知 $f(x) = 3x^3 - 2f'(-1)x + 5$, 则 $f'(-2) =$ _____ .

【答案】 30

【解析】 求导得 $f'(x) = 9x^2 - 2f'(-1)$, 所以 $f'(-1) = 9 - 2f'(-1)$, $f'(-1) = 3$.

所以 $f'(x) = 9x^2 - 6$. 所以 $f'(-2) = 30$.

【标注】【素养】数学运算

9. 已知函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$, 且满足 $f(x) = 3x^2 + 2xf'(2)$, 则 $f'(5) =$ _____ .

【答案】 6

【解析】 对 $f(x) = 3x^2 + 2xf'(2)$ 求导 , 得 $f'(x) = 6x + 2f'(2)$.

令 $x = 2$, 得 $f'(2) = 12 + 2f'(2)$, 得 $f'(2) = -12$. 再令 $x = 5$, 得

$f'(5) = 6 \times 5 + 2f'(2) = 6$.

【标注】【知识点】利用公式和四则运算法则求导

三、 复合函数求导

10. 已知函数 $f(x) = \ln 2x$, 则 $f'(x) =$ () .

A. $\frac{1}{4x}$

B. $\frac{1}{2x}$

C. $\frac{2}{x}$

D. $\frac{1}{x}$

【答案】 D

【解析】 $f'(x) = (2x)' \cdot \frac{1}{2x} = 2 \cdot \frac{1}{2x} = \frac{1}{x}$, 故选 D .

【标注】【知识点】复合函数的求导法则

【素养】数学运算

11. 已知函数 $f(x) = \sin 2x$, 那么 $f'\left(\frac{\pi}{6}\right)$ 等于 () .

A. $\frac{1}{2}$

B. 1

C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

D. $\sqrt{3}$

【答案】 B

【解析】 由函数 $f(x) = \sin 2x$ 得 $f'(x) = 2 \cos 2x$,
则 $f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2 \cos \left(2 \times \frac{\pi}{6}\right) = 2 \cos \frac{\pi}{3} = 2 \times \frac{1}{2} = 1$.
故选B .

【标注】 【知识点】 利用公式和四则运算法则求导