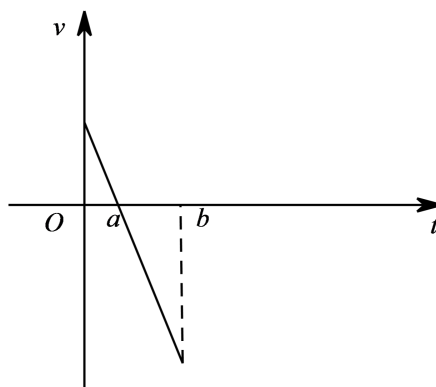
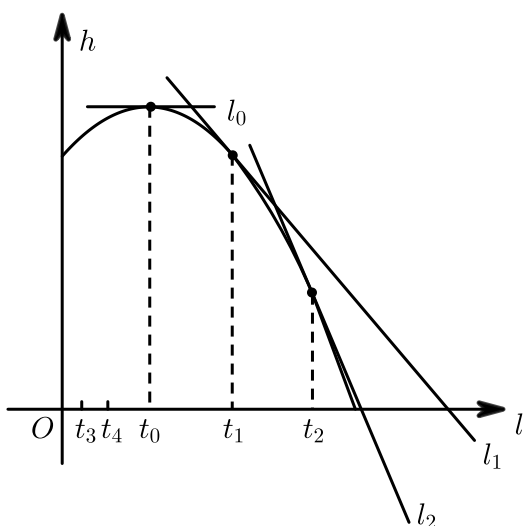


导数的定义与运算

【教师备注】知识模块：选修2-2第一章——导数及其应用

观察：图1表示高台跳水运动员的高度 h 随时间 t 变化的函数 $h(t) = -4.9t^2 + 6.5t + 10$ 的图像，图2表示高台跳水运动员的速度 v 随时间 t 变化的函数 $v(t) = h'(t) = -9.8t + 6.5$ 的图像．运动员从起跳到最高点，以及从最高点到入水这两段时间的运动状态有什么区别？



【导数一章课堂引入】

通过观察图像，我们可以发现：

(1) 运动员从起跳到最高点，离水面的高度 h 随时间 t 的增加而增加，即 $h(t)$ 是增函数．相应地， $v(t) = h'(t) > 0$ ．

(2) 从最高点到入水，运动员离水面的高度 h 随时间 t 的增加而减小，即 $h(t)$ 是减函数．相应地， $v(t) = h'(t) < 0$ ．

我们用曲线 $h(t)$ 在 t_0, t_1, t_2 处的切线, 刻画曲线 $h(t)$ 在上述三个时刻附近的变化情况.

(1) 当 $t = t_0$ 时, 曲线 $h(t)$ 在 t_0 处的切线 l_0 平行于 t 轴. 所以, 在 $t = t_0$ 附近曲线比较平坦, 几乎没有升降.

(2) 当 $t = t_1$ 时, 曲线 $h(t)$ 在 t_1 处的切线 l_1 的斜率 $h'(t_1) < 0$. 所以, 在 $t = t_1$ 附近曲线下降, 即函数 $h(t)$ 在 $t = t_1$ 附近单调递减.

(3) 当 $t = t_2$ 时, 曲线 $h(t)$ 在 t_2 处的切线 l_2 的斜率 $h'(t_2) < 0$. 所以, 在 $t = t_2$ 附近曲线下降, 即函数 $h(t)$ 在 $t = t_2$ 附近也单调递减.

从图中可以看出, 直线 l_1 的倾斜程度小于直线 l_2 的倾斜程度, 这说明曲线 $h(t)$ 在 t_1 附近比在 t_2 附近下降得缓慢.

一、导数概念与几何意义

1. 函数的平均变化率

(1) 平均变化率的概念

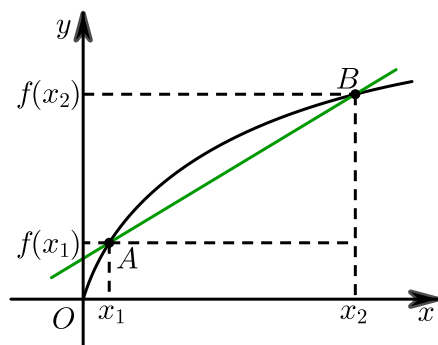
一般地, 对于函数 $y = f(x)$, x_1, x_2 是其定义域内不同的两点, 那么函数的变化率可用式子 $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ 表示, 我们把这个式子称为函数 $y = f(x)$ 从 x_1 到 x_2 的平均变化率, 习惯上用 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 表示, 即平均变化率为

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

上式中 $\Delta x, \Delta y$ 的值可正可负, 但 $\Delta x \neq 0$. $y = f(x)$ 为常数函数时, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$.

(2) 平均变化率的几何意义

设 $A(x_1, f(x_1)), B(x_2, f(x_2))$ 是曲线 $y = f(x)$ 上任意不同的两点, 函数 $y = f(x)$ 的平均变化率 $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$ 为割线AB的斜率, 如图.



(3)注意自变量与函数值的对应关系，公式中若 $\Delta x = x_2 - x_1$ ，则_____；若

$\Delta x = x_1 - x_2$ ，则_____

【答案】

(1)平均变化率为

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}.$$

上式中 Δx ， Δy 的值可正可负，但 Δx 不为0. $y = f(x)$ 为常数函数时， $\Delta y = 0$.

(2)平均变化率的几何意义

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} \text{ 为割线AB的斜率}$$

(3)注意自变量与函数值的对应关系，公式中若 $\Delta x = x_2 - x_1$ ，则 $\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$ ；若

$\Delta x = x_1 - x_2$ ，则 $\Delta y = f(x_1) - f(x_2)$.

例1

1. 求函数 $f(x) = x^3 - 2x$ 在 $[1, 1 + \Delta x]$ 上的平均变化率.

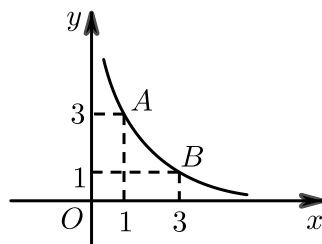
【答案】 $(\Delta x)^2 + 3\Delta x + 1$.

【解析】函数 $f(x)$ 在 $[1, 1 + \Delta x]$ 上的平均变化率为：

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(1 + \Delta x) - f(1)}{\Delta x} = \frac{(1 + \Delta x)^3 - 2(1 + \Delta x) - (1 - 2)}{\Delta x} = \frac{(\Delta x)^3 + 3(\Delta x)^2 + \Delta x}{\Delta x} = (\Delta x)^2 + 3\Delta x + 1$$

【标注】【知识点】函数的平均变化率、瞬时速度与瞬时变化率

2. 如图，函数 $y = f(x)$ 在 A, B 两点间的平均变化率是（ ）.



A. 1

B. -1

C. 2

D. -2

【答案】B

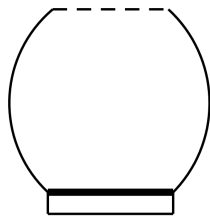
【解析】由图可知 $f(3) = 1$ ， $f(1) = 3$ ，所以 $f(3) - f(1) = 1 - 3 = -2$ ，

所以函数 $y = f(x)$ 在 A, B 两点间的平均变化率是 $\frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = -1$. 故选B.

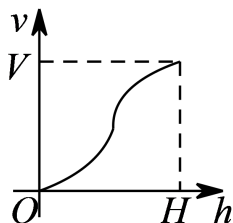
【标注】【知识点】求平均变化率

练1

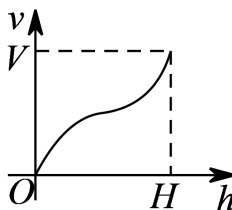
3. 一个高为 H 容积为 V 的鱼缸的轴截面如图所示. 现向空鱼缸内注水, 直到注满为止. 当鱼缸水深为 h 时, 水的体积记为 v . 函数 $v = f(h)$ 的大致图象可能是 ().



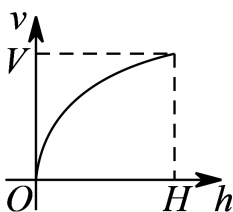
A.



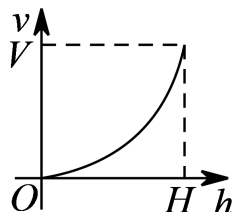
B.



C.



D.



【答案】A

【解析】因为水深 h 越大, 水的体积 v 就越大, 故函数 $v = f(h)$ 是个增函数.

每当 h 增加一个单位增量 Δh 时, 根据鱼缸形状可知,

函数 v 的变化, 开始其增量越来越大, 但经过中截面后则增量越来越小,

故 v 关于 h 的函数图象是先凹后凸的,

曲线A的点的切线斜率先是逐渐变大, 后又逐渐变小.

【标注】【知识点】函数图象的识别问题

4. 求函数 $f(x) = x^2$ 在区间 $[2, 2 + \Delta x]$ 和 $[3, 3 + \Delta x]$ 上的平均变化率.

【答案】 $4 + \Delta x$, $6 + \Delta x$.

【解析】 $f(x) = x^2$ 在区间 $[2, 2 + \Delta x]$ 上的平均变化率为

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(2 + \Delta x) - f(2)}{\Delta x} = \frac{(2 + \Delta x)^2 - 2^2}{\Delta x} = 4 + \Delta x ;$$

$f(x) = x^2$ 在区间 $[3, 3 + \Delta x]$ 上的平均变化率为

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(3 + \Delta x) - f(3)}{\Delta x} = \frac{(3 + \Delta x)^2 - 3^2}{\Delta x} = 6 + \Delta x .$$

【标注】【知识点】函数的平均变化率、瞬时速度与瞬时变化率

2. 函数的瞬时变化率、函数的导数

(1)瞬时变化率

如果当 Δx 趋近于0时, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ 无限趋近于某个常数, 我们把这个常数叫做函数 $y = f(x)$ 在 $x = x_0$ 处的瞬时变化率.

说明 对于任何具体函数或者实际问题, 瞬时变化率都是一个精确值, 而不是近似值.

(2)导数的概念

一般地, 函数 $y = f(x)$ 在 $x = x_0$ 处的瞬时变化率是 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$, 我们称它为函数 $y = f(x)$ 在 $x = x_0$ 处的导数, 记作 $f'(x_0)$ 或 $y'|_{x=x_0}$,

即 $f'(x_0) = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$

说明 $y'|_{x=x_0}$ 表示函数 y 关于自变量 x 在 x_0 处的导数.

温馨提示

(1)函数 $y = f(x)$ 在 $x = x_0$ 处存在导数时, 函数 $y = f(x)$ 应在 $x = x_0$ 及其附近有意义, 否则导数不存在.

(2)若极限 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ 不存在, 则称函数 $y = f(x)$ 在 $x = x_0$ 处不可导.

【答案】

记作 $f'(x_0)$ 或 $y'|_{x=x_0}$, 即 $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$.

说明 $y'|_{x=x_0}$ 表示函数 y 关于自变量 x 在 x_0 处的导数.

例2

5. 设 $f(x)$ 可导, 则 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1 + \Delta x) - f(1)}{3\Delta x}$ 等于 ().

A. $f'(1)$

B. $3f'(1)$

C. $\frac{1}{3}f'(1)$

D. $f'(3)$

【答案】 C

【解析】 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1 + \Delta x) - f(1)}{3\Delta x} = \frac{1}{3} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1 + \Delta x) - f(1)}{\Delta x} = \frac{1}{3} f'(1) .$

【标注】【知识点】函数的平均变化率、瞬时速度与瞬时变化率

6. 设 $f'(3) = 4$, 则 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3-h) - f(3)}{2h} = ()$.

A. -1

B. -2

C. -3

D. 1

【答案】B

【解析】 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3-h) - f(3)}{2h} = -\frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3-h) - f(3)}{-h} = -\frac{1}{2} f'(3) = -2$.

【标注】【素养】数学抽象

【素养】数学运算

【知识点】函数的平均变化率、瞬时速度与瞬时变化率

7. 若 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + 2\Delta x) - f(x_0)}{3\Delta x} = 1$, 则 $f'(x_0)$ 等于 ().

A. $\frac{2}{3}$

B. $\frac{3}{2}$

C. 3

D. 2

【答案】B

【解析】 $\because \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + 2\Delta x) - f(x_0)}{3\Delta x} = \frac{2}{3} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + 2\Delta x) - f(x_0)}{2\Delta x} = \frac{2}{3} f'(x_0) = 1, \therefore f'(x_0) = \frac{3}{2}$.

【标注】【知识点】函数的平均变化率、瞬时速度与瞬时变化率；导数的定义

🔗 练2

8. 函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处的导数为 ().

A. $f'(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$

B. $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)]$

C. $f'(x_0) = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$

D. $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$

【答案】D

【解析】由导数的定义知D正确. 故应选D.

【标注】【知识点】导数的定义

🔗 可导与导函数

如果函数 $f(x)$ 在开区间内 (a, b) 每一点都是可导的, 则 $f(x)$ 称在区间 (a, b) 可导

3. 导数的几何意义

函数 $y = f(x)$ 在 $x = x_0$ 处的导数 $f'(x_0)$ 的几何意义:

曲线 $y = f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线的斜率.

【重点1】当 $f'(x) > 0$ 时, 切线向上方向与 x 轴正向的夹角为锐角; 当 $f'(x) < 0$ 时, 切线向上方向与 x 轴正向的夹角为钝角; 当 $f'(x_0) = 0$ 时, 切线与 x 轴平行(或重合); 当 $f'(x_0)$ 不存在且切线存在时, 切线与 y 轴平行(或重合).

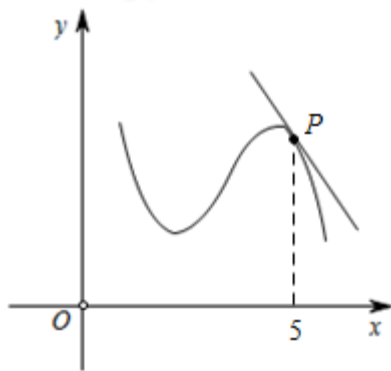
【重点2】若函数 $y = f(x)$ 在 $x = x_0$ 处可导, 则图象在 $(x_0, f(x_0))$ 处一定有切线, 但若函数在 $x = x_0$ 处不可导, 则图象在 $(x_0, f(x_0))$ 处也可能有切线, 如函数 $y = \sqrt[3]{x}$ 在 $x = 0$ 处不可导, 但其函数图象在 $x = 0$ 处的切线是 y 轴, 即若函数 $y = f(x)$ 在 $x = x_0$ 处的导数不存在, 但图象在点 $(x_0, f(x_0))$ 处有切线, 则切线与 x 轴垂直.

【教师备注】主要应用于求函数的切线方程, 此处做简单应用, 主要是熟悉如何求切线斜率. 不深入讲解, 重点讲解与练习放在下一讲

🔗 图像

🔗 例3

9. 如图, 函数 $y = f(x)$ 的图像在点 P 处的切线方程是 $y = -x + 8$, 则 $f(5) + f'(5) = \underline{\hspace{2cm}}$.



【答案】2

【解析】函数 $y = f(x)$ 的图像在点 P 处的切线方程是 $y = -x + 8$,

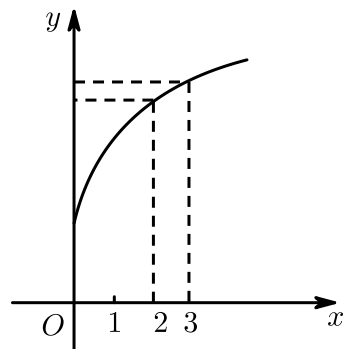
$$\therefore f'(5) = -1, f(5) = -5 + 8 = 3,$$

所以 $f(5) + f'(5) = 2$.

故答案为2 .

【标注】【知识点】求在某点处的切线方程；导数的几何意义的实际应用；导数的几何意义

10. 函数 $f(x)$ 的图象如图所示，下列数值排序正确的是 ()



- A. $0 < f'(2) < f'(3) < f(3) - f(2)$
- B. $0 < f'(3) < f(3) - f(2) < f'(2)$
- C. $0 < f'(3) < f'(2) < f(3) - f(2)$
- D. $0 < f(3) - f(2) < f'(2) < f'(3)$

【答案】 B

【解析】 由图可知，函数 $f(x)$ 的斜率为正，且逐渐变小，

根据函数的几何意义知， $f'(2) > f'(3) > 0$ ，

而 $f(3) - f(2) = \frac{f(3) - f(2)}{3 - 2}$ ，代表点 $A(2, f(2))$ ， $B(3, f(3))$ 割线斜率，

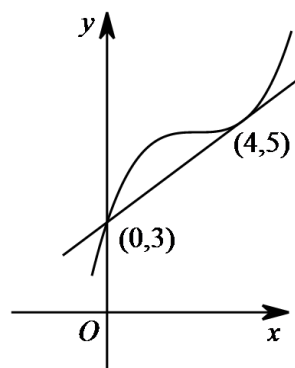
即 A 、 B 两点间的平均变化率，故有 $0 < f'(3) < f(3) - f(2) < f'(2)$.

故选B .

【标注】【知识点】函数的平均变化率、瞬时速度与瞬时变化率；导数的几何意义的实际应用

练3

11. 如图，直线 l 是曲线 $y = f(x)$ 在 $x = 4$ 处的切线，则 $f'(4) = \underline{\hspace{2cm}}$.



【答案】 $\frac{1}{2}$

【解析】 直线 l 的斜率为 $k = \frac{5-3}{4-0} = \frac{1}{2}$ ，所以 $f'(4) = k = \frac{1}{2}$ 。

【标注】 【知识点】 导数的几何意义；导数的几何意义的实际应用

🔔 切线斜率计算

🔔 例4

12. 函数 $f(x) = ax^2 + bx (a > 0, b > 0)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线斜率为 2，则 $\frac{8a+b}{ab}$ 的最小值是 ()
- A. 10 B. 9 C. 8 D. $3\sqrt{2}$

【答案】 B

【解析】 由 $f(x) = ax^2 + bx$ ，得 $f'(x) = 2ax + b$ ，

又 $f(x) = ax^2 + bx (a > 0, b > 0)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线斜率为 2，

所以 $f'(1) = 2a + b = 2$ ，即 $a + \frac{b}{2} = 1$ ，

则 $\frac{8a+b}{ab} = \frac{8}{b} + \frac{1}{a} = \left(a + \frac{b}{2}\right) \left(\frac{8}{b} + \frac{1}{a}\right)$

$= \frac{8a}{b} + \frac{b}{2a} + 5 \geq 2\sqrt{\frac{8a}{b} \cdot \frac{b}{2a}} + 5 = 9$ ，

当且仅当 $\begin{cases} 2a + b = 2 \\ \frac{8a}{b} = \frac{b}{2a} \end{cases}$ ，即 $\begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ b = \frac{4}{3} \end{cases}$ 时“=”成立，

所以 $\frac{8a+b}{ab}$ 的最小值是 9。

故选 B。

【标注】 【知识点】 利用基本不等式求最值；已知切线方程求参数

 练4

13. 已知曲线 $y = \frac{x^2}{4} - 3\ln x + 1$ 的一条切线的斜率为 $\frac{1}{2}$ ，则切点的横坐标为 () .
- A. 3 B. 2 C. 1 D. $\frac{1}{2}$

【答案】 A

【解析】 函数的定义域为 $(0, +\infty)$,

则函数的导数 $f'(x) = \frac{x}{2} - \frac{3}{x}$,

由 $f'(x) = \frac{x}{2} - \frac{3}{x} = \frac{1}{2}$,

即 $x^2 - x - 6 = 0$,

解得 $x = 3$ 或 $x = -2$ (舍) ,

故切点的横坐标为 3 ,

故选 : A .

【标注】 【知识点】 导数的几何意义

二、 基本初等函数导数

1. 导数公式表

基本初等函数的导数公式

函数	导数
$f(x) = c$ (c 为常数)	
$f(x) = x^\alpha$ (α 为常数)	
$f(x) = a^x$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$)	
$f(x) = e^x$	
$f(x) = \log_a x$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$, $x > 0$)	
$f(x) = \ln x$ ($x > 0$)	
$f(x) = \sin x$	
$f(x) = \cos x$	

基本初等函数的导数公式

函数	导数
$f(x) = c$ (c 为常数)	$f'(x) = c' = 0$
$f(x) = x^\alpha$ (α 为常数)	$f'(x) = (x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$
$f(x) = a^x$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$)	$f'(x) = (a^x)' = a^x \ln a$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = (e^x)' = e^x$
$f(x) = \log_a x$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$, $x > 0$)	$f'(x) = (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$
$f(x) = \ln x$ ($x > 0$)	$f'(x) = (\ln x)' = \frac{1}{x}$
$f(x) = \sin x$	$f'(x) = (\sin x)' = \cos x$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = (\cos x)' = -\sin x$

例1

14. 如果函数 $f(x) = \cos x$, 那么 $f(\frac{\pi}{6}) + f'(\frac{\pi}{6}) = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$

【解析】由题意可知 $f(x) = \cos x$,

$$\therefore f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$f'(x) = -\sin x,$$

$$\therefore f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\sin \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}.$$

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) + f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

$$\text{故答案为: } \frac{\sqrt{3}-1}{2}.$$

【标注】【知识点】利用公式和四则运算法则求导；计算任意角的三角函数值

练1

15. 下列结论正确的是 () .

A. 若 $y = \cos x$, $y' = \sin x$

B. 若 $y = e^x$, 则 $y' = xe^{x-1}$

C. 若 $y = \frac{1}{x}$, 则 $y' = -\frac{1}{x^2}$

D. 若 $y = \sqrt{x}$, 则 $y' = \frac{1}{2}\sqrt{x}$

【答案】C

【解析】A. 若 $y = \cos x$, 则 $y' = -\sin x$, 故A项错误；

B. 若 $y = e^x$, 则 $y' = e^x$, 故B项错误；

C. 若 $y = \frac{1}{x}$, 则 $y' = -\frac{1}{x^2}$, 故C项正确；

D. 若 $y = \sqrt{x}$, 则 $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, 故D项错误.

故选C.

【标注】【知识点】利用公式和四则运算法则求导

三、四则运算

1. 导数四则运算法则

设两个函数分别为 $f(x)$ 和 $g(x)$, 则有:

两个函数的和的导数	
两个函数的差的导数	
两个函数的积的导数	
两个函数的商的导数	

设两个函数分别为 $f(x)$ 和 $g(x)$ ，则有：

两个函数的和的导数	$[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$
两个函数的差的导数	$[f(x) - g(x)]' = f'(x) - g'(x)$
两个函数的积的导数	$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
两个函数的商的导数	$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} (g(x) \neq 0)$

2. 公式求解

例1

16. 下列函数求导运算正确的个数为 () .

$$\begin{aligned} \text{①} (3^x)' &= 3^x \log_3 e & \text{②} (\log_2 x)' &= \frac{1}{x \ln 2} & \text{③} (e^x)' &= e^x \\ \text{④} \left(\frac{1}{\ln x}\right)' &= x & \text{⑤} (x \cdot e^x)' &= e^x + 1 \end{aligned}$$

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

【答案】B

【解析】①： $(3^x)' = 3^x \ln 3$ ，故①错，
 ②： $(\log_2 x)' = \frac{1}{x \ln 2}$ ，故②对，
 ③： $(e^x)' = e^x$ ，故③对，
 ④： $\left(\frac{1}{\ln x}\right)' = -\frac{1}{x \ln^2 x}$ ，故④错，
 ⑤： $(xe^x)' = e^x + xe^x$ ，故⑤错，
 $\therefore$ 正确的个数为2个，即②③，故选B.

【标注】【知识点】利用公式和四则运算法则求导

17. 求下列各函数的导数：

$$(1) y = 3x^2 - x + 5;$$

$$(2) y = 2\sqrt{x} - \frac{1}{x} + 4\sqrt{3};$$

$$(3) y = \frac{x^2}{2} + \frac{2}{x^3};$$

$$(4) y = \frac{1-x^3}{\sqrt{x}};$$

$$(5) y = (\sqrt{x} + 1)\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 1\right);$$

【答案】(1) $6x - 1$

$$(2) \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2}$$

$$(3) x - \frac{4}{x^3}$$

$$(4) -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} - \frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}}$$

$$(5) -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$

【解析】(1) $y' = 6x - 1$.

$$(2) y' = \frac{2}{2\sqrt{x}} - \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2}$$

$$(3) y' = \frac{1}{2} \times (2x) + 2 \times (-2) \times x^{-3} = x - \frac{4}{x^3}.$$

$$(4) y = \frac{1-x^3}{\sqrt{x}} = x^{-\frac{1}{2}} - x^{\frac{5}{2}}, y' = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} - \frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}}.$$

$$(5) y = (\sqrt{x} + 1)\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 1\right) = \frac{1}{\sqrt{x}} - \sqrt{x}, y' = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}.$$

【标注】【素养】数学运算

【知识点】利用公式和四则运算法则求导

练1

18. 下列求导运算正确的是 ().

$$A. \left(x + \frac{1}{x}\right)' = 1 + \frac{1}{x^2}$$

$$B. (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$C. (x^2 \cos x)' = -2x \sin x$$

$$D. \left(\frac{e^x}{x}\right)' = \frac{xe^x + e^x}{x^2}$$

【答案】B

【解析】

$$A\left(x + \frac{1}{x}\right)' = 1 + \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 1 - \frac{1}{x^2}, \text{ 错误.}$$

$$B(\ln x)' = \frac{1}{x}, \text{ 正确.}$$

$$C(x^2 \cos x)' = 2x \cdot \cos x + x^2 \cdot (-\sin x).$$

$$= 2x \cos x - x^2 \sin x, \text{ 错误.}$$

$$D\left(\frac{e^x}{x}\right)' = \frac{e^x \cdot x - e^x}{x^2}, \text{ 错误.}$$

故选B.

【标注】【知识点】利用公式和四则运算法则求导

3. 赋值运算

例2

19. 已知函数 $f(x) = f'\left(\frac{\pi}{4}\right) \cos x + \sin x$, 则 $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$ 的值为 ____.

【答案】 1

【解析】 方法一: $f(x) = f'\left(\frac{\pi}{4}\right) \cos x + \sin x$, $f'(x) = -f'\left(\frac{\pi}{4}\right) \sin x + \cos x$,

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -f'\left(\frac{\pi}{4}\right) \sin \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{4},$$

$$\text{即: } \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}, f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}(2 - \sqrt{2})}{2} = \sqrt{2} - 1,$$

$$f(x) = (\sqrt{2} - 1) \cos x + \sin x,$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = (\sqrt{2} - 1) \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = 1 - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = 1.$$

方法二: $f'(x) = f'\left(\frac{\pi}{4}\right)(-\sin x) + \cos x$,

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = f'\left(\frac{\pi}{4}\right)(-\sin \frac{\pi}{4}) + \cos \frac{\pi}{4},$$

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} - 1,$$

$$\therefore f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{2} - 1) + \frac{\sqrt{2}}{2} = 1.$$

【标注】【知识点】利用公式和四则运算法则求导

20. 已知 $f(x) = x^2 + 2xf'(1)$, 则 $f'(0)$ 的值为 ().

A. 0

B. -2

C. 2

D. -4

【答案】 D

【解析】 $\because f'(x) = 2x + 2f'(1)$, $\therefore f'(1) = 2 + 2f'(1)$, 则 $f'(1) = -2$, $\therefore f'(0) = -4$.

【标注】【知识点】利用公式和四则运算法则求导

21. 已知函数 $f(x) = x^3 + x^2 f'(1) + 3x f'(-1)$ ，则 $f(1)$ 的值为 _____ .

【答案】 -2

【解析】 $\because f'(x) = 3x^2 + 2f'(1)x + 3f'(-1)$

$$\therefore f'(-1) = 3(-1)^2 + 2f'(1)(-1) + 3f'(-1)$$

$$f'(1) = 3 + 2f'(1) + 3f'(-1)$$

$$\text{解得 } f'(-1) = -\frac{9}{8}, f'(1) = \frac{3}{8}$$

$$\therefore f(1) = 1 + \frac{3}{8} - \frac{27}{8} = -2.$$

【标注】【素养】数学运算

【知识点】利用公式和四则运算法则求导

练2

22. 已知函数 $f(x) = \sin x + 2x f'(\frac{\pi}{3})$ ，则 $f'(\frac{\pi}{3}) = ()$.

A. $\frac{1}{2}$

B. 0

C. $-\frac{1}{2}$

D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

【答案】 C

【解析】 $\because f'(x) = \cos x + 2f'(\frac{\pi}{3})$ ， $\therefore f'(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2} + 2f'(\frac{\pi}{3}) \Rightarrow f'(\frac{\pi}{3}) = -\frac{1}{2}$.

【标注】【知识点】利用公式和四则运算法则求导

23. 已知函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$ ，且满足 $f(x) = 2x f'(e) + \ln x$ ，则 $f'(e) = ()$.

A. e

B. -1

C. $-e^{-1}$

D. -e

【答案】 C

【解析】 因为 $f'(x) = 2f'(e) + \frac{1}{x}$ ，所以 $f'(e) = 2f'(e) + \frac{1}{e}$. 解得 $f'(e) = -\frac{1}{e} = -e^{-1}$ ，故选C .

【标注】【知识点】利用公式和四则运算法则求导

24. 已知函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$ ，且满足 $f(x) = 2x \cdot f'(1) + \ln x$ ，则 $f'(1) = ()$.

- A. $-e$ B. -1 C. 1 D. e

【答案】B

【解析】 $f'(x) = 2f'(1) + \frac{1}{x}$ ，令 $x = 1$ ，即 $f'(1) = 2f'(1) + 1$ ，解得 $f'(1) = -1$.

【标注】【知识点】利用公式和四则运算法则求导

四、复合函数求导

1. 复合函数求导法则

复合函数 $y = f(g(x))$ 的导数和函数 $y = f(u)$ ， $u = g(x)$ 的导数间的关系为 $y'_x = y'_u \cdot u'_x$.

例1

25. 求下列函数的导数：

- (1) $y = (2x + 3)^2$
 (2) $y = e^{1-2x}$
 (3) $y = \sin(\omega x + \varphi)$

【答案】(1) $y = 8x + 12$.

(2) $y = -2e^{1-2x}$.

(3) $y = \omega \cos(\omega x + \varphi)$.

【解析】(1) 令 $u = 2x + 3$ ， $y = u^2$ ， $y'_x = y'_u \cdot u'_x = (u^2)' \cdot (2x + 3)' = 4u = 8x + 12$ ；

(2) 令 $u = 1 - 2x$ ， $y = e^u$ ， $y'_x = y'_u \cdot u'_x = (e^u)' \cdot (1 - 2x)' = -2e^u = -2e^{1-2x}$ ；

(3) 令 $u = \omega x + \varphi$ ， $y = \sin u$ ，

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x = (\sin u)' \cdot (\omega x + \varphi)' = \omega \cos u = \omega \cos(\omega x + \varphi) .$$

【标注】【知识点】导数

26. 求下列函数的导数

① $y = e^{2x} \cos(4x - 1)$; ② $y = (2 - 3x) \sin 6x$; ③ $y = e^{-x} \ln(2x + 1)$.

【答案】 ① $y' = 2e^{2x} \cos(4x - 1) - 4e^{2x} \sin(4x - 1)$;

② $y' = -3 \sin 6x + 6(2 - 3x) \cos 6x$;

③ $y' = -e^{-x} \ln(2x + 1) + \frac{2e^{-x}}{2x + 1}$.

【解析】 ① $y' = 2e^{2x} \cos(4x - 1) - 4e^{2x} \sin(4x - 1)$;

② $y' = -3 \sin 6x + 6(2 - 3x) \cos 6x$;

③ $y' = -e^{-x} \ln(2x + 1) + \frac{2e^{-x}}{2x + 1}$.

【标注】 【知识点】 复合函数的求导法则；利用公式和四则运算法则求导

练1

27. 已知函数 $f(x) = \sqrt{2x - 1}$, 则 $f'(2) =$ _____ .

【答案】 $\frac{\sqrt{3}}{3}$

【解析】 $\because f(x) = \sqrt{2x - 1} = (2x - 1)^{\frac{1}{2}}$,

$\therefore f'(x) = \frac{1}{2}(2x - 1)^{-\frac{1}{2}} \times 2 = \frac{1}{\sqrt{2x - 1}}$,

$f'(2) = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

【标注】 【知识点】 利用公式和四则运算法则求导；复合函数的求导法则

28. 函数 $f(x) = \sin^2 x$ 的导数是 () .

A. $2 \sin x$

B. $2 \sin^2 x$

C. $2 \cos x$

D. $\sin 2x$

【答案】 D

【解析】 根据复合函数求导法则 ,

故选 : D .

【标注】 【知识点】 复合函数的求导法则