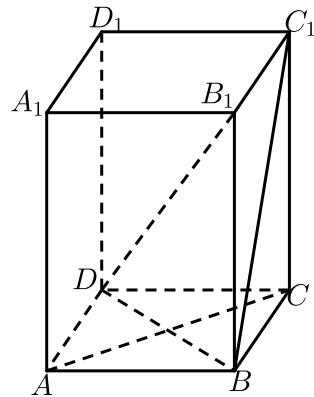


4线面垂直和面面垂直练习题

|| 线面垂直判定

1. 如图，四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的底面 $ABCD$ 为正方形， $CC_1 \perp$ 平面 $ABCD$ 。



求证： $BD \perp$ 平面 ACC_1A_1 ；

【答案】（1）证明见解析。

【解析】（1） $\because$ 四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的底面 $ABCD$ 为正方形，

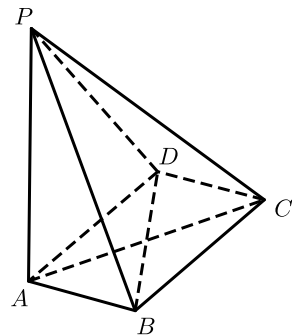
$$\therefore AC \perp BD,$$

$$\because CC_1 \perp \text{平面} ABCD, \therefore CC_1 \perp BD,$$

$$\because AC \cap CC_1 = C, \therefore BD \perp \text{平面} ACC_1A_1.$$

【标注】【知识点】线面垂直的证明问题；直线和平面垂直的判定；向量法解决异面直线所成角问题

2. 如图，在四棱锥 $P - ABCD$ 中， $PA \perp$ 平面 $ABCD$ ，底面 $ABCD$ 是菱形， $PA = AB = 2$ ， $\angle BAD = 60^\circ$ 。



求证：直线 $BD \perp$ 平面 PAC 。

【答案】 (1) 证明见解析 .

【解析】 (1) $\because$ 底面 $ABCD$ 是菱形 ,

$$\therefore AC \perp BD ,$$

$$\because PA \perp \text{平面 } ABCD , BD \subset \text{平面 } ABCD ,$$

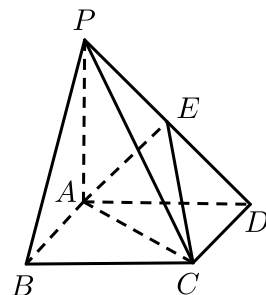
$$\therefore PA \perp BD ,$$

$$\text{又} \because AC \cap PA = A ,$$

$$\therefore BD \perp \text{平面 } PAC .$$

【标注】【知识点】直线和平面垂直的判定；线面垂直的证明问题；线面平行的证明问题；直线和平面平行的判定；几何法求空间角；点、直线、平面之间的位置关系；向量法解决空间中的平行问题；向量法解决线面角问题

3. 如图，四棱锥 $P-ABCD$ 的底面是边长为2的正方形， $PA \perp$ 底面 $ABCD$.



求证： $CD \perp$ 平面 PAD .

【答案】 (1) 证明见解析 .

【解析】 (1) $\because PA \perp$ 平面 $ABCD$,

$$\therefore \text{平面 } PAD \perp \text{平面 } ABCD ,$$

$$\text{又} \because AD = \text{平面 } PAB \cap \text{平面 } ABCD ,$$

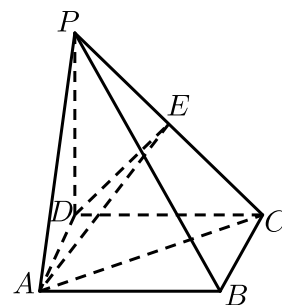
$$\text{又} \because \text{四边形 } ABCD \text{ 为正方形} ,$$

$$\therefore CD \perp AD ,$$

$$\therefore CD \perp \text{平面 } PAD .$$

【标注】【知识点】线面垂直的证明问题；直线和平面垂直的判定；组合体求体积、表面积问题；空间几何体的表面积

4. 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中， $PD \perp$ 平面 $ABCD$ ，底面 $ABCD$ 为矩形， $PD = DC = 4$ ， $AD = 2$ ， E 为 PC 的中点 .



求证： $DE \perp$ 平面 PBC .

【答案】 (1) 证明见解析 .

【解析】 (1) $PD \perp$ 平面 $ABCD$,

$\therefore PD \perp BC$,

$\because ABCD$ 是矩形 ,

$\therefore BC \perp CD$,

$\because PD \cap CD = D$,

$\therefore BC \perp$ 平面 PDC ,

$\therefore BC \perp DE$.

又 $\because PD = DC$, E 为 PC 中点 ,

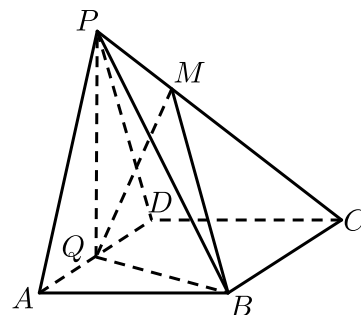
$\therefore DE \perp PC$,

$\because BC \cap PC = C$,

$\therefore DE \perp$ 平面 PBC .

【标注】【知识点】直线和平面平行的判定；直线和平面垂直的判定；线面垂直的证明问题；平行的探索性问题；空间几何体的体积；等体积法

5. 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为菱形， $\angle BAD = 60^\circ$ ， Q 为 AD 的中点， $PA = PD = AD = 2$.

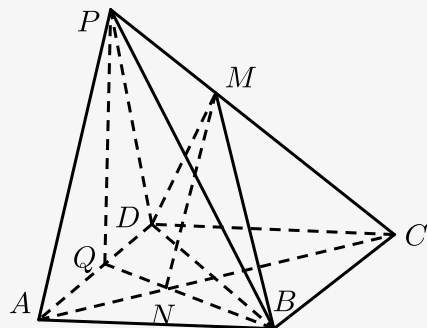


求证： $AD \perp$ 平面 PQB .

【答案】 (1) 证明见解析.

【解析】 (1) 证明：

连接 BD ,



因为四边 $ABCD$ 为菱形, $\angle BAD = 60^\circ$, 所以 $\triangle ABD$ 为正三角形.

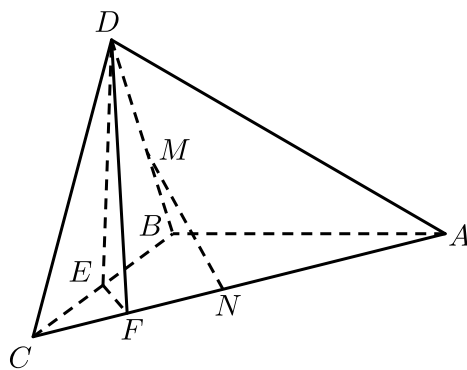
又 Q 为 AD 中点, $\therefore AD \perp BQ$.

$\because PA = PD$, Q 点为 AD 的中点, $\therefore AD \perp PQ$,

又 $BQ \cap PQ = Q$, $\therefore AD \perp$ 平面 PQB .

【标注】 【知识点】直线和平面平行的性质；线面平行的证明问题；线面垂直的证明问题；直线和平面垂直的判定；向量法解决二面角问题

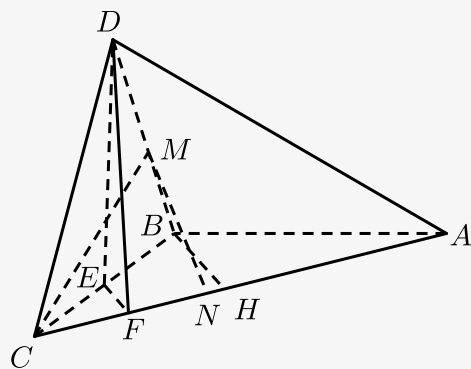
6. 如图, 在三棱锥 $D-ABC$ 中, 已知 $\triangle BCD$ 是正三角形, $AB \perp$ 平面 BCD , $AB = BC = a$, E 为 BC 的中点, F 在棱 AC 上, 且 $AF = 3FC$.



求证: $AC \perp$ 平面 DEF .

【答案】 (1) 证明见解析.

【解析】 (1) 在底面 ABC 中, 取 AC 的中点 H , 连接 BH ,



因为 $AB = BC$, 故 $BH \perp AC$.

因为 $AF = 3FC$, 故 F 为 CH 的中点 .

又 E 为 BC 的中点 , 故 $EF \parallel BH$,

故 $EF \perp AC$.

因为 $AB \perp$ 平面 BCD , $AB \subset$ 平面 ABC ,

故平面 $ABC \perp$ 平面 BCD .

又 $\triangle BCD$ 是正三角形 , E 为 BC 的中点 ,

故 $DE \perp BC$,

故 $DE \perp$ 平面 ABC .

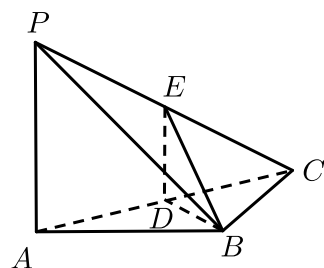
因为 $AC \subset$ 平面 ABC , 故 $DE \perp AC$.

又 $DE \cap EF = E$, 故 $AC \perp$ 平面 DEF .

【标注】【知识点】向量法解决空间中的平行问题；直线和平面垂直的判定；线面垂直的证明问题；空间几何体的体积；等体积法

|| 异面直线垂直判定

7. 如图 , 在三棱锥 $P-ABC$ 中 , $PA \perp AB$, $PA \perp BC$, $AB \perp BC$, $PA = AB = BC = 2$, D 为线段 AC 的中点 , E 为线段 PC 上一点 .



求证 : $PA \perp BD$.

【答案】 (1) 证明见解析 .

【解析】(1) $\because PA \perp AB, PA \perp BC, AB \cap BC = B, AB, BC \subset \text{平面} ABC$.

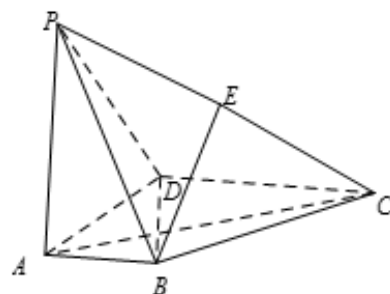
$\therefore PA \perp \text{平面} ABC$,

$\because BD \subset \text{平面} ABC$,

$\therefore PA \perp BD$.

【标注】【知识点】空间几何体的体积；平面和平面垂直的判定

8. 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中， $PA \perp \text{底面} ABCD$ ， $AD \perp AB$ ， $AB \parallel DC$ ， $AD = DC = AP = 2$ ， $AB = 1$ ，点 E 为棱 PC 的中点。



证明 $BE \perp DC$ ；

【答案】(1) 证明见解析；

【解析】(1) 如图，取 PD 中点 M ，连接 EM, AM 。

由于 E, M 分别为 PC, PD 的中点，故 $EM \parallel DC$ ，

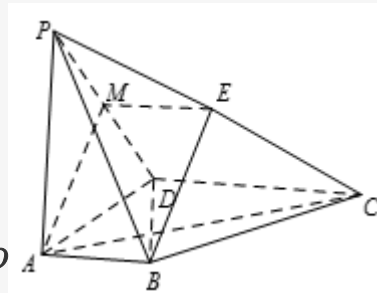
且 $EM = \frac{1}{2}DC$ ，又由已知，可得 $EM \parallel AB$ 且

$EM = AB$ ，故四边形 $ABEM$ 为平行四边形，所

以 $BE \parallel AM$ 。因为 $PA \perp \text{底面} ABCD$ ，故 $PA \perp CD$

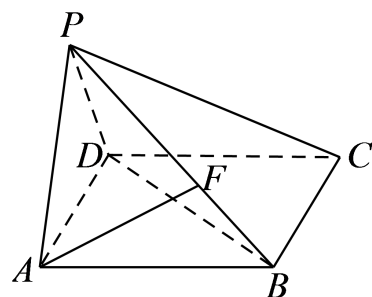
，而 $CD \perp DA$ ，从而 $CD \perp \text{平面} PAD$ ，因为 $AM \subset$

平面 PAD ，于是 $CD \perp AM$ ，又 $BE \parallel AM$ ，所以 $BE \perp CD$ 。



【标注】【知识点】向量法解决空间中的平行问题；向量法解决线面角问题；向量法解决二面角问题；直线和平面垂直的性质；线面垂直的证明问题

9. 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 的边长 2 是的是为正方形。 $PA = PD$ ， $PA \perp PD$ ， F 为 PB 上的点，且 $AF \perp \text{平面} PBD$ 。



求证： $PD \perp AB$.

【答案】 (1) 证明见解析 .

【解析】 (1) $\because AF \perp$ 平面 PBD , $PD \subset$ 平面 PBD .

$\therefore PD \perp AF$.

$\because PA \perp PD$, $PA \cap AF = A$.

$\therefore PD \perp$ 平面 PAB .

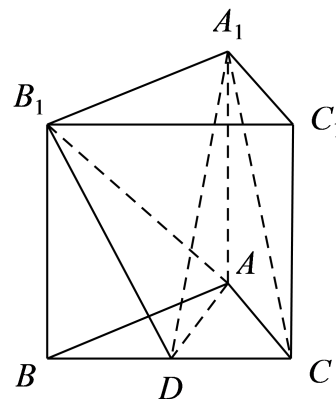
$\because AB \subset$ 平面 PAB .

$\therefore PD \perp AB$.

【标注】 【知识点】几何法求空间角；线线垂直的证明问题；直线和平面垂直的性质；直线和平面垂直的判定；平面和平面垂直的判定；面面垂直的证明问题

|| 面面垂直判定

10. 如图，在三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中，底面 ABC 为正三角形，侧棱 $AA_1 \perp$ 底面 ABC . 已知 D 是 BC 的中点， $AB = AA_1 = 2$.



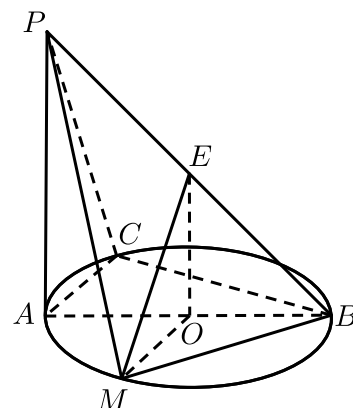
求证：平面 $AB_1D \perp$ 平面 BB_1C_1C .

【答案】 (1) 证明见解析 .

【解析】 (1) 证明：由已知 $\triangle ABC$ 为正三角形，且 D 是 BC 的中点，
 所以 $AD \perp BC$ ．因为侧棱 $AA_1 \perp$ 底面 ABC ， $AA_1 // BB_1$ ，
 所以 $BB_1 \perp$ 底面 ABC ．又因为 $AD \subset$ 底面 ABC ，所以 $BB_1 \perp AD$ ．而
 $B_1B \cap BC = B$ ，
 所以 $AD \perp$ 平面 BB_1C_1C ．
 因为 $AD \subset$ 平面 AB_1D ，所以平面 $AB_1D \perp$ 平面 BB_1C_1C ．

【标注】【知识点】线面平行的证明问题；直线和平面平行的判定；面面垂直的证明问题；平面和平面垂直的判定；等体积法；空间几何体的体积

11. 如图所示， $PA \perp$ 平面 ABC ，点 C 在以 AB 为直径的 $\odot O$ 上， $\angle CBA = 30^\circ$ ， $PA = AB = 2$ ，点 E 为线段 PB 的中点，点 M 在 $\widehat{AB}$ 上，且 $OM // AC$ ．



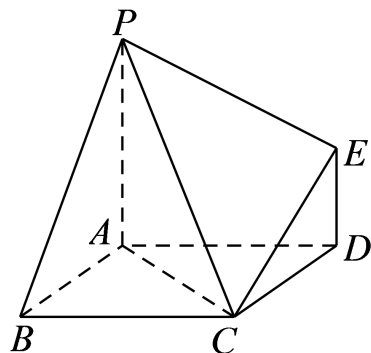
求证：平面 $PAC \perp$ 平面 PCB ；

【答案】 (1) 证明见解析．

【解析】 (1) 因为点 C 在以 AB 为直径的 $\odot O$ 上，
 所以 $\angle ACB = 90^\circ$ ，即 $BC \perp AC$ ．
 因为 $PA \perp$ 平面 ABC ， $BC \subset$ 平面 ABC ，
 所以 $PA \perp BC$ ．
 因为 $AC \subset$ 平面 PAC ， $PA \subset$ 平面 PAC ， $PA \cap AC = A$ ，
 所以 $BC \perp$ 平面 PAC ．
 因为 $BC \subset$ 平面 PBC ，
 所以平面 $PAC \perp$ 平面 PCB ．

【标注】【知识点】向量法解决二面角问题；平面和平面垂直的判定；面面垂直的证明问题；面面平行的证明问题；平面和平面平行的判定

12. 如图，已知多面体 $PABCDE$ 的底面 $ABCD$ 是边长为2的菱形， $PA \perp$ 底面 $ABCD$ ， $ED \parallel PA$ ，且 $PA = 2ED = 2$ 。



证明：平面 $PAC \perp$ 平面 PCE 。

【答案】（1）证明见解析。

【解析】（1）延长 PE ， AD 交于 F ，连接 FC ，

$\because PA \Rightarrow ED, ED \parallel PA$ ，

$\therefore ED$ 为 $\triangle APF$ 的中位线，

$\therefore D$ 为 AF 的中点，

设 AC ， BD 交于点 O ，

$DO \parallel FC$ ，

$\because DO \perp AC$ ，

$\therefore AC \perp FC$ ，

又 $\because PA \perp$ 底面，

$\therefore PA \perp FC$ ，

$\therefore FC \perp$ 平面 PAC ，

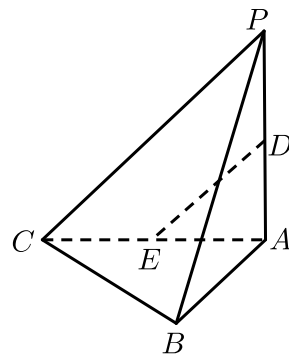
又 $\because FC \subset$ 平面 PCE ，

$\therefore$ 平面 $PAC \perp$ 平面 PCE 。

【标注】【知识点】向量法解决空间中的平行问题；平面和平面垂直的判定

|| 面面垂直性质

13. 如图，在三棱锥 $P-ABC$ 中，平面 $PAC \perp$ 平面 ABC ， $PA \perp AC$ ， $AB \perp BC$ 。设 D ， E 分别为 PA ， AC 中点。



求证： $BC \perp$ 平面 PAB ；

【答案】（1）证明见解析．

【解析】（1）因为平面 $PAC \perp$ 平面 ABC ，平面 $PAC \cap$ 平面 $ABC = AC$ ，

又 $PA \subset$ 平面 PAC ， $PA \perp AC$ ，

所以 $PA \perp$ 平面 ABC ，

因为 $BC \subset$ 平面 ABC ，

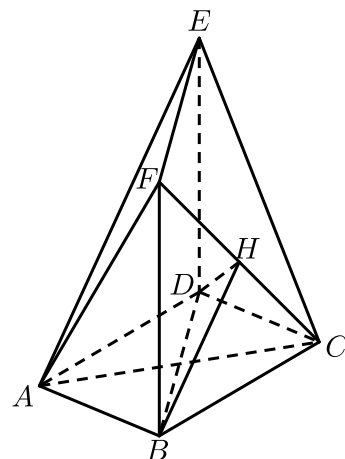
所以 $PA \perp BC$ ．

又因为 $AB \perp BC$ ，且 $PA \cap AB = A$ ，

所以 $BC \perp$ 平面 PAB ．

【标注】【知识点】平行的探索性问题；线面平行的证明问题；平面和平面平行的判定；直线和平面平行的判定；线面垂直的证明问题；直线和平面垂直的判定

14. 如图，在多面体 $ABCDEF$ 中，底面 $ABCD$ 是边长为2的菱形， $\angle BAD = 60^\circ$ ，四边形 $BDEF$ 是矩形，平面 $BDEF \perp$ 平面 $ABCD$ ， $BF = 3$ ， H 是 CF 的中点．



求证： $AC \perp$ 平面 $BDEF$ ．

【答案】（1）证明见解析．

【解析】 (1) $\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形,

$$\therefore AC \perp BD.$$

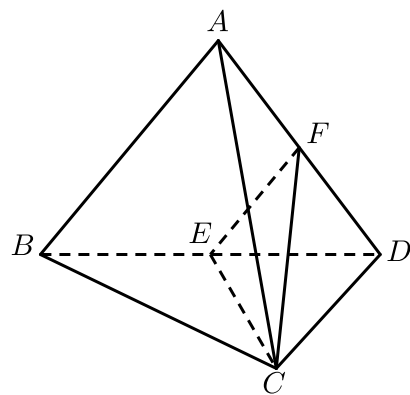
又 $\because$ 平面 $BDEF \perp$ 平面 $ABCD$, 平面 $BDEF \cap$ 平面 $ABCD = BD$,

且 $AC \subset$ 平面 $ABCD$,

$$\therefore AC \perp \text{平面 } BDEF.$$

【标注】【知识点】向量法解决二面角问题

15. 已知: 三棱锥 $A-BCD$ 中, 平面 $ABD \perp$ 平面 BCD , $AB \perp AD$, E, F 分别为 BD, AD 的中点.



若 $CB = CD$, 求证: $AD \perp$ 平面 CEF .

【答案】 (1) 证明见解析.

【解析】 (1) $\because CB = CD$, E 为 BD 的中点

$$\therefore CE \perp DB$$

$\because$ 平面 $ADB \perp$ 平面 BCD , 平面 $ADB \cap$ 平面 $BCD = BD$, $CE \subset$ 平面 BCD ,

$$\therefore CE \perp \text{平面 } ABD$$

$\because AD \subset$ 平面 ABD , $\therefore CE \perp AD$

$\because EF \parallel AB$, $AB \perp AD \therefore AD \perp EF$

$\because CE \subset$ 平面 CEF , $EF \subset$ 平面 CEF , $CE \cap EF = E$

$$\therefore AD \perp \text{平面 } CEF.$$

【标注】【知识点】线面平行的证明问题; 直线和平面平行的判定; 线面垂直的证明问题; 直线和平面垂直的性质; 直线和平面垂直的判定; 平面和平面垂直的性质