

4线面垂直与面面垂直

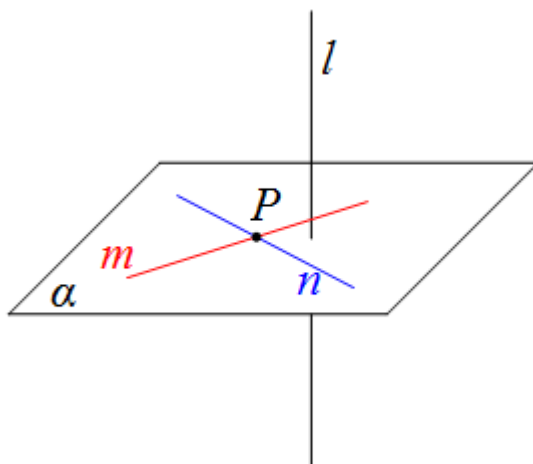
一、线面垂直

1. 线面垂直定义

如果直线 l 与平面 α 内的任意一条直线都垂直，我们就说直线 l 与平面 α 互相垂直，记作 $l \perp \alpha$ ．直线 l 叫做平面 α 的垂线，平面 α 叫做直线 l 的垂面．直线与平面垂直时，它们惟一的公共点 P 叫做垂足．

2. 线面垂直判定定理

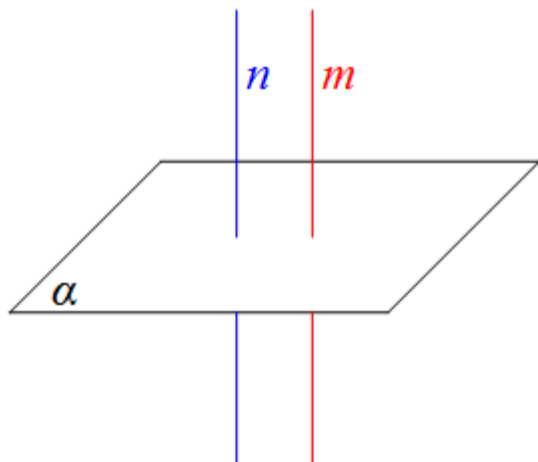
一条直线与一个平面内的两条相交直线都垂直，则该直线与此平面垂直．



$$\left\{ \begin{array}{l} l \perp m \\ l \perp n \\ m \in \alpha \wedge n \in \alpha \\ m \cap n = P \end{array} \right. \Rightarrow l \perp \alpha .$$

3. 线面垂直的性质定理

垂直于同一个平面的两条直线平行．

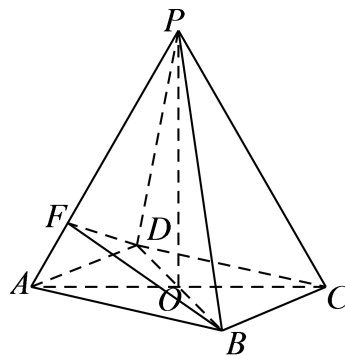


$$\begin{cases} m \perp \alpha \\ n \perp \alpha \end{cases} \Rightarrow m \parallel n .$$

💡 典型例题

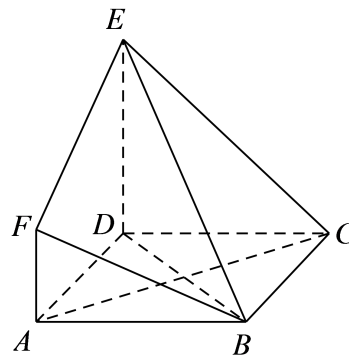
|| 线面垂直的判定

1. 如图所示，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面四边形 $ABCD$ 是菱形， $AC \cap BD = O$ ， $\triangle PAC$ 是边长为 2 的等边三角形， $PB = PD = \sqrt{6}$ ， $AP = 4AF$ 。



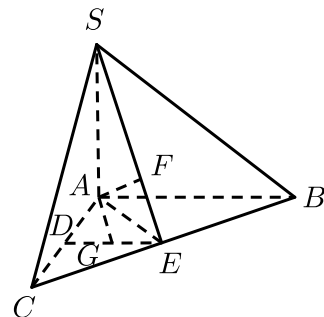
求证： $PO \perp$ 底面 $ABCD$ 。

2. 如图， $ABCD$ 是边长为 3 的正方形， $DE \perp$ 平面 $ABCD$ ， $AF \parallel DE$ ， $DE = 3AF$ ，直线 BE 与平面 $ABCD$ 所成角为 60° 。



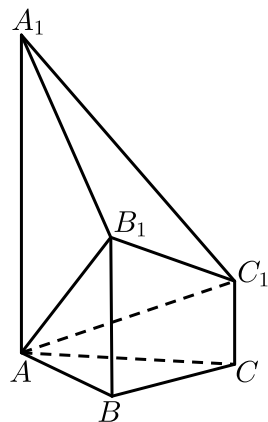
求证： $AC \perp$ 平面 BDE .

3. 如图，在三棱锥 $S-ABC$ 中， $SA \perp$ 底面 ABC ， $AC = AB = SA = 2$ ， $AC \perp AB$ ， D ， E 分别是 AC ， BC 的中点， F 在 SE 上，且 $SF = 2FE$.



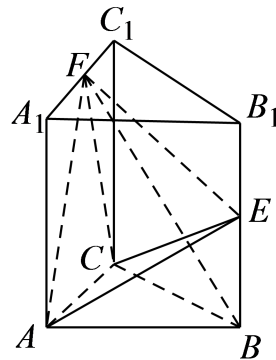
求证： $AF \perp$ 平面 SBC .

4. 如图，已知多面体 $ABC-A_1B_1C_1$ ， A_1A ， B_1B ， C_1C 均垂直于平面 ABC ， $\angle ABC = 120^\circ$ ， $A_1A = 4$ ， $C_1C = 1$ ， $AB = BC = B_1B = 2$.



证明： $AB_1 \perp$ 平面 $A_1B_1C_1$.

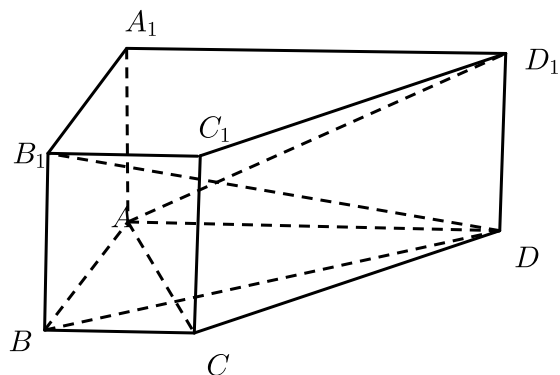
5. 已知正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中， $AB = 2$ ， $AA_1 = \sqrt{6}$ ，点 E ， F 分别为侧棱 BB_1 和边 A_1C_1 的中点 .



求证： $BF \perp$ 平面 ACE .

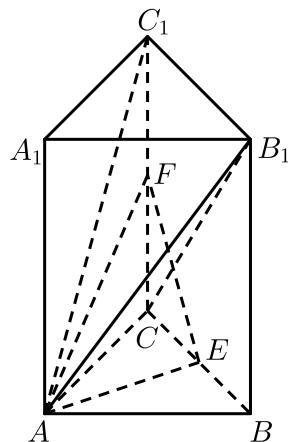
异面直线垂直的判定

6. 如图，在四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中， $BB_1 \perp$ 底面 $ABCD$ ， $AD \parallel BC$ ， $\angle BAD = 90^\circ$ ， $AC \perp BD$ 。



求证： $AC \perp B_1D$ 。

7. 在三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中， $BB_1 \perp$ 平面 ABC ， $\angle BAC = 90^\circ$ ， $AC = AB = 2$ ， $AA_1 = 2\sqrt{2}$ ， E 、 F 分别是 BC 、 C_1C 的中点。

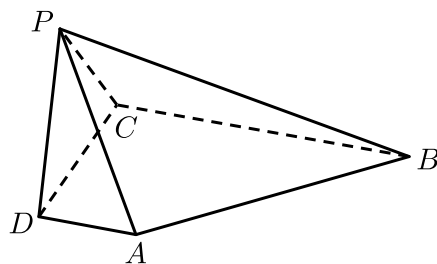


求证： $AE \perp B_1C$ 。

课堂巩固

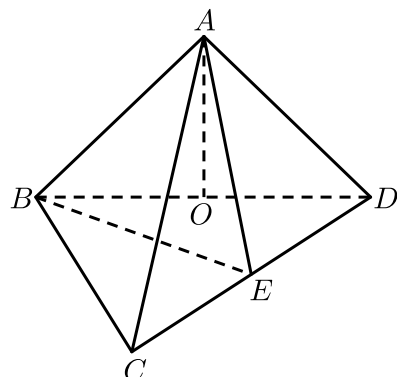
线面垂直的判定

8. 如图，在四棱锥 $P - ABCD$ 中， $AD \perp$ 平面 PDC ， $AD \parallel BC$ ， $PD \perp PB$ ， $AD = 1$ ， $BC = 3$ ， $CD = 4$ ， $PD = 2$ 。



求证： $PD \perp$ 平面 PBC .

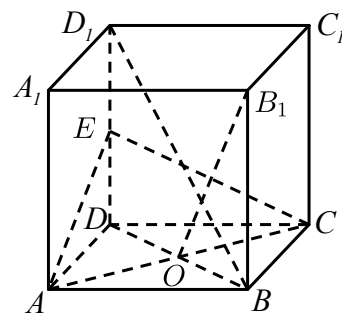
9. 如图，在三棱锥 $A - BCD$ 中，顶点 A 在底面 BCD 上的射影 O 在棱 BD 上， $AB = AD = \sqrt{2}$ ， $BC = BD = 2$ ， $\angle CBD = 90^\circ$ ， E 为 CD 的中点 .



求证： $AD \perp$ 平面 ABC .

|| 异面直线垂直的判定

10. 在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中， E 为棱 DD_1 的中点，底面对角线 AC 与 BD 相交于点 O .



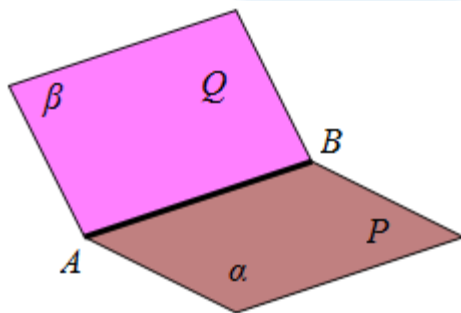
求证： $BD_1 \perp AC$.

二、 面面垂直

1. 面面垂直的定义

🕒 二面角的定义

如下图：

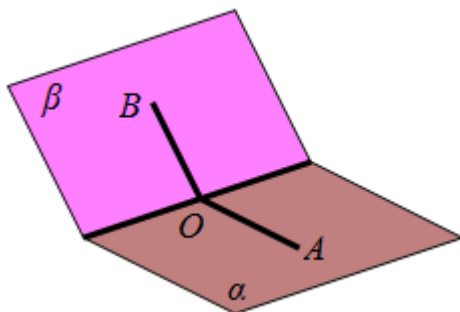


从一条直线出发的两个半平面所组成的图形叫做二面角．这条直线叫做二面角的棱，这两个半平面叫做二面角的面．棱为 AB 、面分别为 α, β 的二面角记作二面角 $\alpha - AB - \beta$ ．有时为了方便，也可在 α, β 内（棱以外的半平面部分）分别取点 P, Q ，将这个二面角记作二面角 $P - AB - Q$ ．如果棱记作 l ，那么这个二面角记作二面角 $\alpha - l - \beta$ 或 $P - l - Q$ ．

【备注】平面内的一条直线把平面分成两部分，这两部分通常称为半平面．

二面角的度量

如下图：



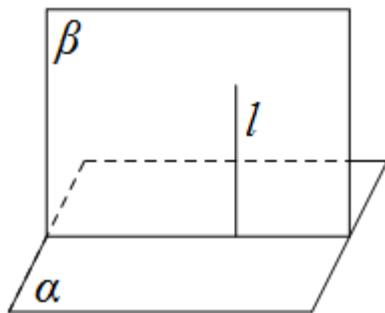
在二面角 $\alpha - l - \beta$ 的棱 l 上任取一点 O ，以点 O 为垂足，在半平面 α 和 β 内分别作垂直于棱 l 的射线 OA 和 OB ，则射线 OA 和 OB 构成的 $\angle AOB$ 叫做二面角的平面角．

面面垂直的定义

一般地，如果两个平面所成的二面角大小为 90° ，我们称这两个平面垂直。

2. 面面垂直判定定理

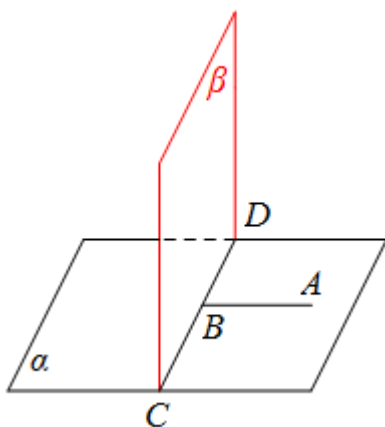
一个平面过另一个平面的垂线，则这两个平面垂直．



$$\begin{cases} l \perp \alpha \\ l \subset \beta \end{cases} \Rightarrow \alpha \perp \beta.$$

3. 面面垂直性质定理

两个平面垂直，则一个平面内垂直于交线的直线与另一个平面垂直。

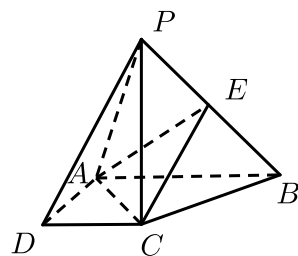


$$\begin{cases} \alpha \perp \beta \\ \alpha \cap \beta = CD \\ AB \subset \alpha \\ AB \perp CD \end{cases} \Rightarrow AB \perp \beta.$$

💡 典型例题

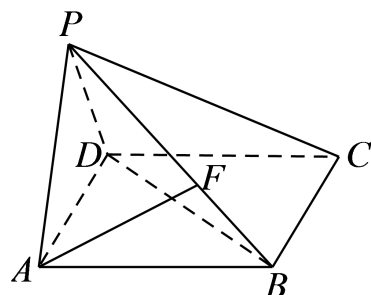
|| 面面垂直的判定

11. 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中， $PC \perp$ 底面 $ABCD$ ，底面 $ABCD$ 是直角梯形， $AB \perp AD$ ， $AB \parallel CD$ ， $AB = 2AD = 2CD$ ， $PC = 4$ ， E 为线段 PB 上一点。



求证：平面 $EAC \perp$ 平面 PBC .

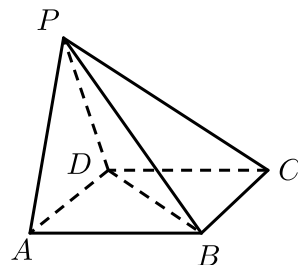
12. 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 的边长2是的是正方形 . $PA = PD$, $PA \perp PD$, F 为 PB 上的点，且 $AF \perp$ 平面 PBD .



求证：平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$.

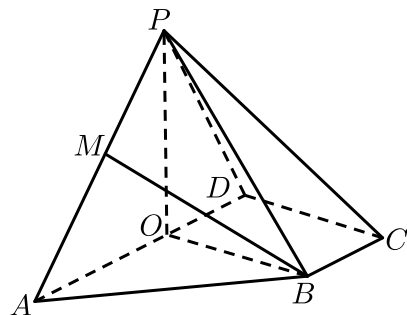
|| 面面垂直的性质

13. 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是正方形，侧面 PAD 是正三角形，且平面 $PAD \perp$ 底面 $ABCD$.



求证： $AB \perp$ 平面 PAD .

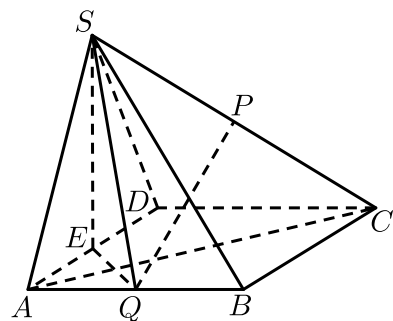
14. 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为直角梯形， $\angle ADC = \angle BCD = 90^\circ$, $BC = 1$, $CD = \sqrt{3}$, $PD = 2$, $\angle PDA = 60^\circ$, $\angle PAD = 30^\circ$, 且平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$, 在平面 $ABCD$ 内过 B 作 $BO \perp AD$, 交 AD 于 O , 连 PO .



求证： $PO \perp$ 平面 $ABCD$.

|| 面面垂直与线面垂直综合

15. 如图，在四棱锥 $S-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为菱形， $\angle BAD = 60^\circ$ ，平面 $SAD \perp$ 平面 $ABCD$ ， $SA = SD$ ， E, P, Q 分别是棱 AD, SC, AB 的中点．

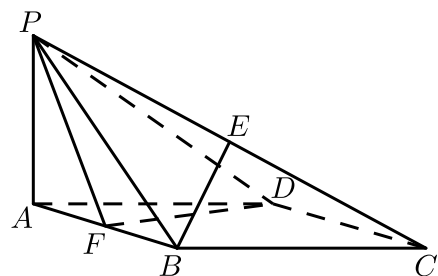


求证： $AC \perp$ 平面 SEQ ．

🔔 课堂巩固

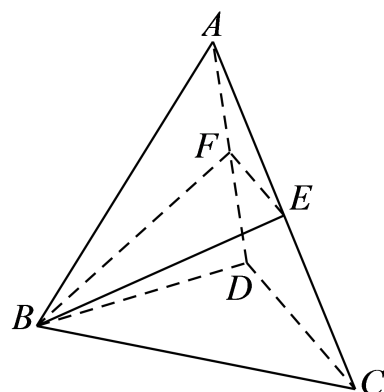
|| 面面垂直的判定

16. 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是菱形， $\angle BAD = 60^\circ$ ， $AB = 2$ ， $PA = 1$ ． $PA \perp$ 平面 $ABCD$ ， E 是 PC 的中点， F 是 AB 的中点．



求证：平面 $PDF \perp$ 平面 PAB ．

17. 如图，在四面体 $ABCD$ 中， $BA = BD$ ， $AD \perp CD$ ，点 E, F 分别为 AC, AD 的中点．

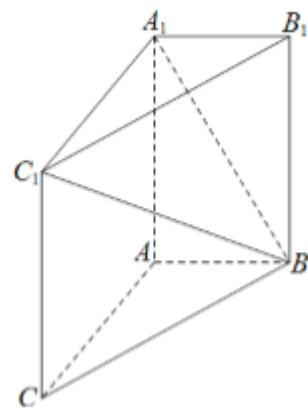


求证：平面 $EFB \perp$ 平面 ABD ．

|| 面面垂直的性质

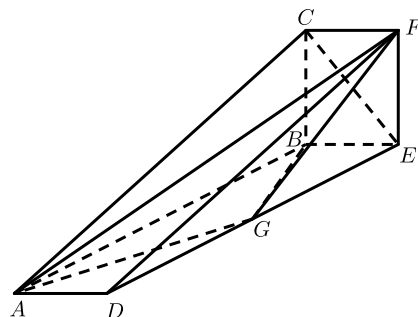
- 18.

如图，在三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中， AA_1C_1C 是边长为4的正方形，平面 $ABC \perp$ 平面 AA_1C_1C ， $AB = 3$ ， $BC = 5$ 。



求证： $AA_1 \perp$ 平面 ABC 。

19. 如图，三棱柱 $ABC - DEF$ 的侧面 $BEFC$ 是边长为1的正方形，侧面 $BEFC \perp$ 侧面 $ADEB$ ， $AB = 4$ ， $\angle DEB = 60^\circ$ ， G 是 DE 的中点。



求证： $GB \perp$ 平面 $BEFC$ ；