

3线面平行与面面平行

一、线面平行

1. 线面平行判定定理

【定理】平面外一条直线与此平面内的一条直线平行，则该直线与此平面平行。

上述定理通常称为直线与平面平行的判定定理，它的符号表示如下：
$$\begin{cases} a \not\subset \alpha \\ b \subset \alpha \Rightarrow a // \alpha . \\ a // b \end{cases}$$

【补充说明】

(1) 定理告诉我们，可以通过直线间的平行，推证直线与平面平行。今后要证明一条已知直线与一个平面平行，只要在这个平面内找出一条直线与已知直线平行，就可断定已知直线与这个平面平行。这是处理空间位置关系一种常用方法，即将直线与平面平行关系（空间问题）转化为直线间平行关系（平面问题），这是一种典型的降维思想，可以将空间中的位置关系退化到平面中去，在研究立体几何问题的过程中，这种思想无疑是应用最广泛的。

(2) 鉴于上面的分析，证明线面平行的核心就是寻找直线与直线的平行关系，那么平面几何中能够产生平行关系的模型都会为证明线面平行提供帮助，常见的模型如下：①中位线模型：三角形或梯形的中位线平行于底边②平行四边形的两组对边分别平行③比例模型：利用平行线分线段成比例定理（包括平行线等分线段）的逆定理可以导出平行关系。

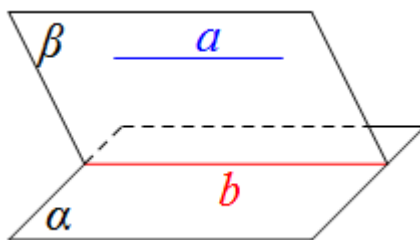
详见下面的例题。

2. 线面平行性质定理

【定理】一条直线与一个平面平行，则过这条直线的任一平面与此平面的交线与该直线平行。

【定理】的证明如下：

如下图， $a // \alpha$ ， $a \subset \beta$ ， $\alpha \cap \beta = b$ 。求证： $a // b$ 。



【证明】

因为 $\alpha \cap \beta = b$, 所以 $b \subset \alpha$. 又因为 $a \parallel \alpha$, 所以 a 与 b 无公共点(这是线线平行的定义).

又因为 $a \subset \beta, b \subset \beta$, 所以 $a \parallel b$.

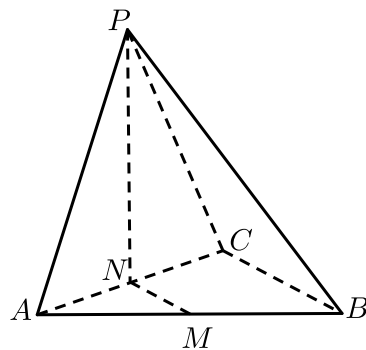
【补充说明】

直线与平面平行的性质定理揭示了直线与平面平行中蕴含着直线与直线平行. **通过直线与平面平行得到直线与直线平行, 这给出来一种作平行线的重要方法.**

典型例题

线面平行之中位线模型

1. 如图, 在三棱锥 $P-ABC$ 中, 点 M, N 分别是棱 AB, AC 的中点, 且 $PA = PC, PN \perp AB$.



求证: $MN \parallel$ 平面 PBC .

【答案】(1) 证明见解析.

【解析】(1) $\because M, N$ 分别是棱 AB, AC 的中点,

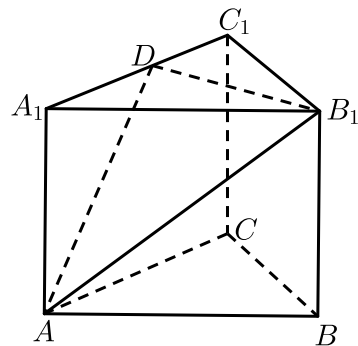
$$\therefore MN \parallel \frac{1}{2}BC,$$

又 $MN \not\subset$ 平面 $PBC, BC \subset$ 平面 PBC ,

$\therefore MN \parallel$ 平面 PBC .

【标注】【知识点】线面平行的证明问题; 直线和平面平行的判定; 直线和平面垂直的判定; 线线垂直的证明问题

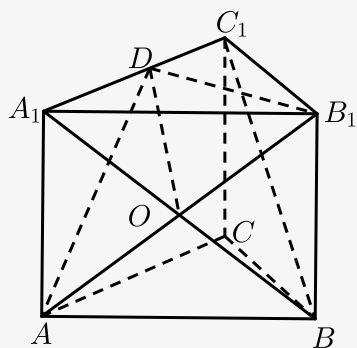
2. 如图所示, 正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的底面边长为2, 侧棱长为 $\sqrt{3}$, A_1C_1 的中点为 D .



求证： $BC_1 \parallel \text{平面} AB_1D$.

【答案】 (1) 证明见解析 .

【解析】 (1) 连接 A_1B , 与 AB_1 交于 O , 连接 DO ,



$\because D$ 为 A_1C_1 点 , O 为 A_1B 中点 ,

$\therefore OD \parallel C_1B$,

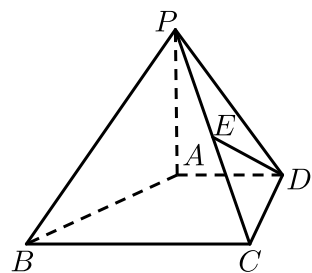
又 $\because OD \subset \text{平面} ADB_1$,

$\therefore C_1B \parallel \text{平面} ADB_1$.

【标注】【知识点】等体积法；棱柱、棱锥、棱台的结构特征；几何法求空间角；直线和平面平行的判定；线面平行的证明问题

|| 线面平行之平行四边形模型

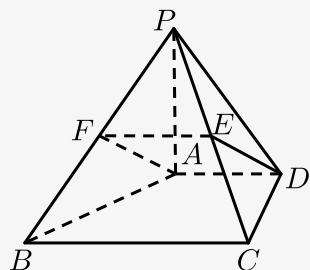
3. 如图 , 在四棱锥 $P-ABCD$ 中 , $PA \perp \text{平面} ABCD$, $AD \perp CD$, $AD \parallel BC$, $BC = 4$,
 $PA = AD = CD = 2$, 点 E 为 PC 的中点 .



证明： $DE \parallel \text{平面} PAB$.

【答案】 (1) 证明见解析 .

【解析】 (1) 取 BP 中点 F , 连接 EF , AF ,



又 E 为 PC 的中点 ,

$\therefore EF \parallel \frac{1}{2}BC$, 又 $BC = 4$,

$\therefore EF = 2 = AD$, 又 $AD \parallel BC$,

$\therefore EF \parallel AD$.

故四边形 $ADEF$ 为平行四边形 ,

$\therefore DE \parallel AF$, 又 $AF \subset \text{平面} PAB$, $DE \not\subset \text{平面} PAB$,

$\therefore DE \parallel \text{平面} PAB$.

【标注】 【知识点】直线和平面平行的判定；线面平行的证明问题；直线的方向向量与平面的法向量；向量法解决线面角问题；向量法解决空间中的平行问题

|| 线面平行的性质定理

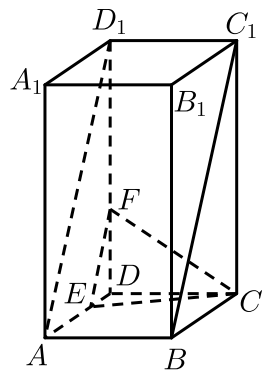
4. 设 a , b 是两条直线 , α , β 是两个平面 , 若 $a \parallel \alpha$, $a \subset \beta$, 且 $\alpha \cap \beta = b$, 则 α 内与 b 相交的直线与 a 的位置关系是 () .
- A. 平行 B. 相交 C. 异面 D. 平行或异面

【答案】 C

【解析】 $a \parallel \alpha$, a 与 α 内的直线没有公共点 , 所以 a 与 α 内的直线的位置关系是异面或平行 , α 内与 b 平行的直线与 a 平行 , α 内与 b 相交的直线与 a 异面 . 故选 C .

【标注】 【知识点】点、直线、平面之间的位置关系；已知线面位置关系判定结论的问题

5. 长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中底面为边长为 3 的正方形 , 侧棱长为 6 , 点 E 、 F 在 AD 、 DD_1 上 .



若 $EF \parallel$ 平面 ABC_1D_1 ，证明 $EF \parallel BC_1$ 。

【答案】（1）证明见解析。

【解析】（1） $\because EF \parallel$ 平面 ABC_1D_1 ，

$EF \subset$ 面 A_1ADD_1 ，

面 $ABC_1D_1 \cap$ 面 $A_1ADD_1 = AD_1$ ，

根据线面平行的性质定理得：

$EF \parallel AD_1$ ，

又 $\because D_1C_1 \parallel AB$ ，

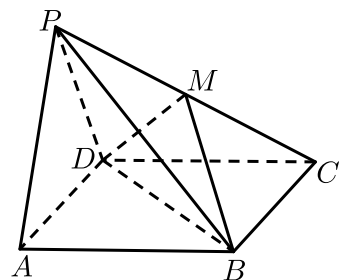
$\therefore$ 四边形 ABC_1D 为平行四边形，

$\therefore AD_1 \parallel BC_1$ ，

$\therefore EF \parallel BC_1$ 。

【标注】【知识点】直线和平面平行的判定；直线和平面平行的性质；线线平行的证明问题；线面平行的证明问题

6. 如图，四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是矩形，面 $PAD \perp$ 面 $ABCD$ ，且 $\triangle PAD$ 是边长为2的等边三角形， $PC = \sqrt{13}$ ， M 在 PC 上，且 $PA \parallel$ 面 MBD 。



求证： M 是 PC 的中点。

【答案】（1）证明见解析。

【解析】(1) 连接 AC ，交 BD 于点 E ，连接 ME ，

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$\therefore E$ 是 AC 的中点，

又 $PA \parallel$ 平面 MBD ，且 ME 是平面 PAC 与平面 MDB 的交线，

$\therefore PA \parallel ME$ ，

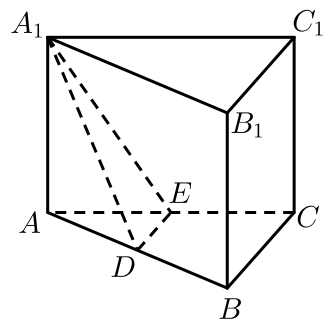
$\therefore M$ 是 PC 的中点。

【标注】【知识点】线线平行的证明问题；直线和平面平行的性质；向量法解决二面角问题；向量法解决异面直线所成角问题

课堂巩固

线面平行之中位线模型

7. 如图，在直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中， $BC \perp AC$ ， D 、 E 分别是 AB 、 AC 的中点。



求证： $B_1C_1 \parallel$ 平面 A_1DE 。

【答案】(1) 证明见解析。

【解析】(1) $\because D, E$ 为 AB, AC 中点，

$\therefore DE \parallel BC$ 。

又 $\because BC \parallel B_1C_1$ ，

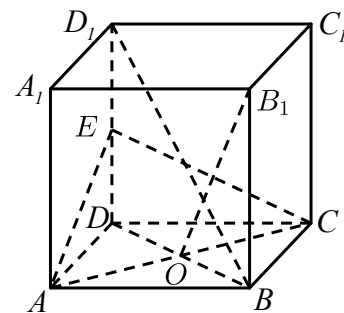
$\therefore DE \parallel B_1C_1$ 。

又 $\because DE \subset$ 平面 A_1DE ， $B_1C_1 \not\subset$ 平面 A_1DE ，

$\therefore B_1C_1 \parallel$ 平面 A_1DE 。

【标注】【知识点】直线和平面垂直的判定；线面垂直的证明问题；线面平行的证明问题；直线和平面平行的判定

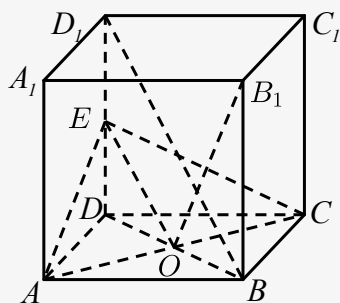
8. 在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中， E 为棱 DD_1 的中点，底面对角线 AC 与 BD 相交于点 O 。



求证： $BD_1 \parallel \text{平面} ACE$.

【答案】 (1) 证明见解析 .

【解析】 (1) 连结 EO ,



$\because$ 四边形 $ABCD$ 为正方形 ,

$\therefore O$ 为 BD 的中点 ,

又 $\because E$ 为 DD_1 中点 , $\therefore EO \parallel BD_1$,

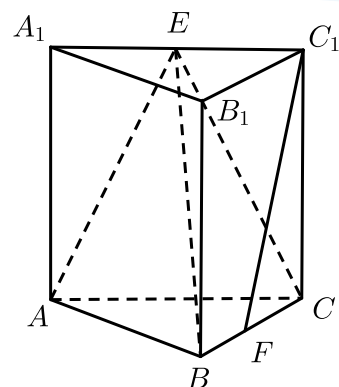
又 $\because EO \subset \text{平面} ACE$, $BD_1 \not\subset \text{平面} ACE$,

$\therefore BD_1 \parallel \text{平面} ACE$.

【标注】 【知识点】直线和平面垂直的判定；线线垂直的证明问题；直线和平面平行的判定；线面平行的证明问题

|| 线面平行之平行四边形模型

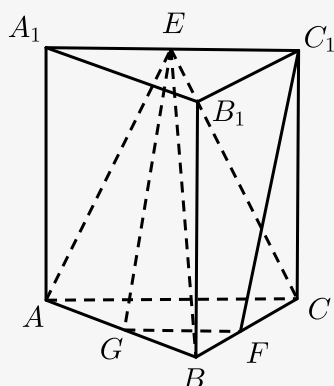
9. 如图，在三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中，侧棱垂直于底面， $AB = 4$ ， $BC = 3$ ， $AC = 5$ ， E 为 A_1C_1 的中点， F 为 BC 的中点 .



求证： $C_1F \parallel \text{平面} ABE$.

【答案】 (1) 见解析

【解析】 (1) 取 BA 中点为 G , 连接 EG , GF ,

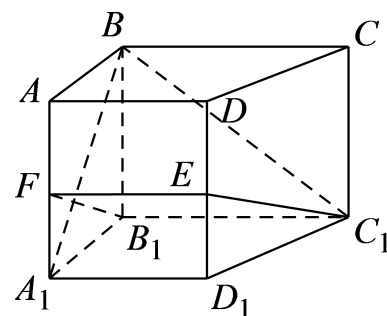


$\therefore FG$ 是 $\triangle ABC$ 的中位线 ,
 $\therefore GF \parallel AC \parallel A_1C_1$ 且 $GF = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}A_1C_1 = EC_1$,
 $\therefore$ 四边形 $FGEC_1$ 是平行四边形 ,
 $\therefore C_1F \parallel EG$, 又 $EG \subset \text{平面} ABE$, $C_1F \not\subset \text{平面} ABE$,
 $\therefore C_1F \parallel \text{平面} ABE$.

【标注】【知识点】直线和平面平行的判定；线面平行的证明问题；平面和平面垂直的判定；面面垂直的证明问题

|| 线面平行的性质定理

10. 如图 , 在侧棱垂直底面的四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中 , $AD \parallel BC$, $AD \perp AB$, $AB = \sqrt{2}$, $AD = 2$, $BC = 4$, $AA_1 = 2$, E 是 DD_1 中点 , F 是平面 B_1C_1E 与直线 AA_1 的交点 .



证明： $EF \parallel A_1D_1$.

【答案】 (1) 证明见解析 .

【解析】 (1) $\because B_1C_1 \parallel A_1D_1$, 且 $A_1D_1 \subset \text{面 } ADD_1A_1$,

$\therefore B_1C_1 \parallel \text{面 } ADD_1A_1$,

又 $\because B_1C_1 \subset \text{面 } B_1C_1EF$,

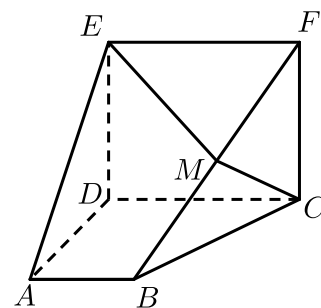
且 $\text{面 } B_1C_1EF \cap \text{面 } ADD_1A_1 = EF$,

$\therefore B_1C_1 \parallel EF$,

$\therefore EF \parallel A_1D_1$.

【标注】 【知识点】空间中的基本事实与定理；直线和平面平行的性质；直线和平面垂直的判定

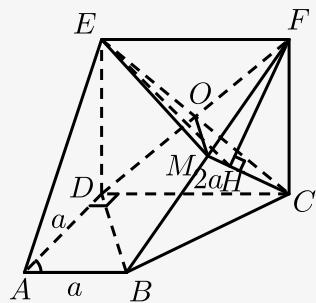
11. 如图，四边形 $CDEF$ 是正方形，四边形 $ABCD$ 为直角梯形， $\angle ADC = 90^\circ$ ， $AB \parallel DC$ ，平面 $CDEF \perp$ 平面 $ABCD$ ， $AB = AD = \frac{1}{2}CD = a$ ， M 在 FB 上，且 $BD \parallel$ 平面 ECM .



求证： M 为 BF 中点 .

【答案】 (1) 证明见解析 .

【解析】 (1) 连接 DF ，设 $DF \cap EC = O$ ，连接 MO ，



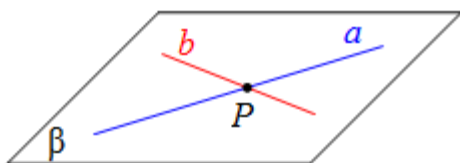
$\because BD \parallel \text{面} ECM, BD \subset \text{面} BDF,$
 $\text{面} BDF \cap \text{面} ECM = MD,$
 $\therefore BD \parallel MO$ (线面平行性质定理),
 $\because$ 四边形 $CDEF$ 为正方形,
 $\therefore O$ 为 DF 中点,
 又 $\because BD \parallel MO,$
 $\therefore M$ 为 BF 中点.

【标注】【知识点】几何法求空间角；面面垂直的证明问题；平面和平面垂直的判定；直线和平面平行的性质

二、面面平行

1. 面面平行判定定理

【定理】一个平面内的两条相交直线与另一个平面平行，则这两个平面平行。



【图示】



【符号表示】

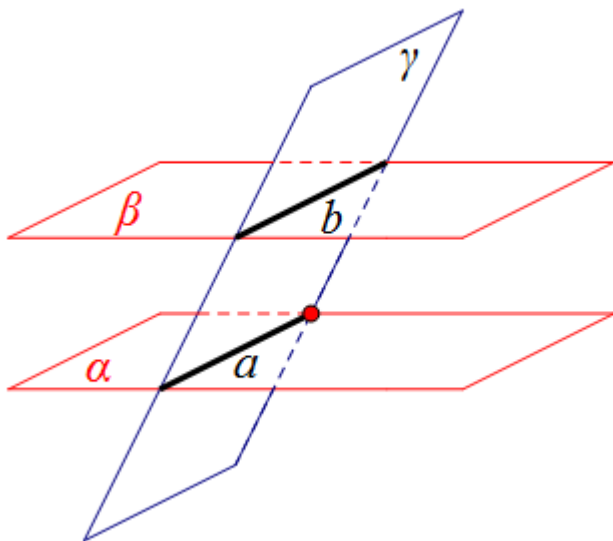
$$\left\{ \begin{array}{l} a \subset \beta \\ b \subset \beta \\ a \cap b = P \Rightarrow \beta // \alpha . \\ a // \alpha \\ b // \alpha \end{array} \right.$$

上述定理通常称为平面与平面平行的判定定理，它告诉我们，可以由直线与平面平行判定平面与平面平行。

2. 面面平行性质定理

【定理】如果两个平行平面同时和第三个平面相交，那么它们的交线平行。

【图示】



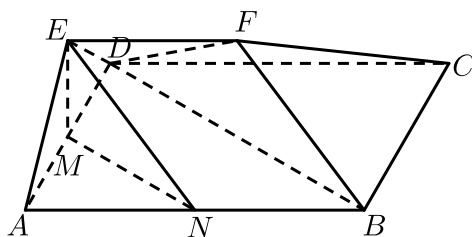
【符号表示】
$$\begin{cases} \alpha // \beta \\ \alpha \cap \gamma = a \Rightarrow a // b \\ \beta \cap \gamma = b \end{cases}$$

这个定理提供给我们另一种全新的证明直线和直线平行的方法。

典型例题

面面平行的判定

12. 已知平行四边形 $ABCD$ 中 $\angle A = 60^\circ$ ， $AB = 2AD = 2$ ，平面 $AED \perp$ 平面 $ABCD$ ，三角形 AED 为等边三角形， $EF // AB$ ， $EF = 1$ ， M ， N 分别为线段 AD ， AB 的中点。



求证：平面 $EMN //$ 平面 BDF 。

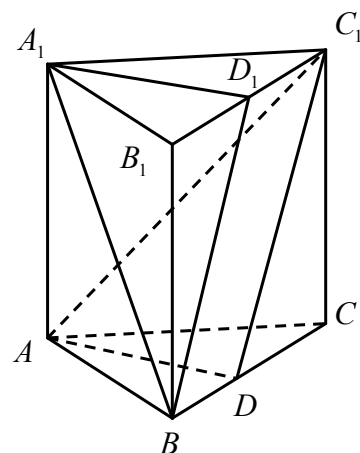
【答案】（1）证明见解析。

【解析】（1） $\because M$ 、 N 是中点，

$\therefore$ 在 $\triangle ADB$ 中, $\frac{AN}{AB} = \frac{AM}{AD}$,
 $\therefore MN \parallel BD$, $MN \parallel$ 面 BDF ,
 $\therefore EF \parallel AB$, $EF = 1$, $NB = 1$,
 $\therefore EF \parallel FB$,
 $\therefore$ 四边形 $EFBN$ 为平行四边形,
 $\therefore EN \parallel FB$, $EN \parallel$ 面 BDF
 又 $EN \cap MN = N$,
 $\therefore$ 面 $EMN \parallel$ 面 BDF .

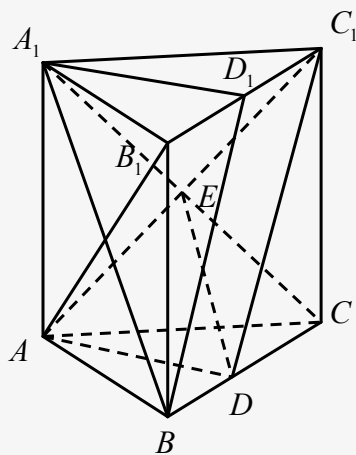
【标注】【知识点】面面平行的证明问题；平面和平面平行的判定；点、直线、平面之间的位置关系；面面垂直的证明问题；平面和平面垂直的判定；几何法求空间角

13. 如图，三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中， D 是 BC 上一点，且 $A_1B \parallel$ 平面 AC_1D ， D_1 是 B_1C_1 的中点．求证：平面 $A_1BD_1 \parallel$ 平面 AC_1D ．



【答案】证明见解析．

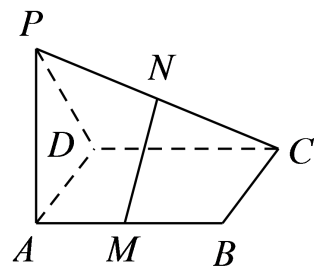
【解析】证明：如图所示，连接 A_1C 交 AC_1 于点 E ，
 $\therefore$ 四边形 A_1ACC_1 是平行四边形，
 $\therefore E$ 是 A_1C 的中点，连接 ED ，
 $\therefore A_1B \parallel$ 平面 AC_1D ，平面 $A_1BC \cap$ 平面 $AC_1D = ED$ ，
 $\therefore A_1B \parallel ED$ ， $\therefore E$ 是 A_1C 的中点， $\therefore D$ 是 BC 的中点，
 又 $\therefore D_1$ 是 B_1C_1 的中点，
 $\therefore BD_1 \parallel C_1D$ ， $A_1D_1 \parallel AD$ ，
 又 $A_1D_1 \cap BD_1 = D_1$ ， $C_1D \cap AD = D$ ，
 $\therefore$ 平面 $A_1BD_1 \parallel$ 平面 AC_1D ．



【标注】【知识点】面面平行的证明问题；平面和平面平行的判定

面面平行的性质

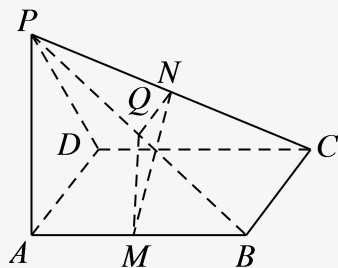
14. 如图，已知四边形 $ABCD$ 是矩形， $PA \perp$ 平面 $ABCD$ ， M 、 N 分别是 AB 、 PC 的中点。



求证： $MN \parallel$ 平面 PAD 。

【答案】（1）证明见解析。

【解析】（1）取 PB 中点 Q ，连接 NQ ， MQ ，



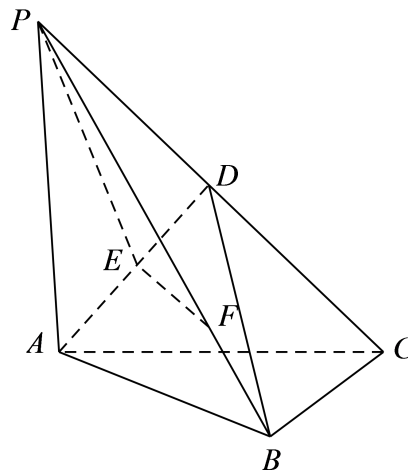
$\because Q$ 为 PB 中点， M 为 AB 中点，

$\therefore MQ \parallel PA$ ，

$\because N$ 为 PC 中点,
 $\therefore NQ // BC$,
 $\because BC // AD$,
 $\therefore NQ // AD$,
 $\because AD \cap PA = A$,
 $\therefore$ 平面 $MNQ //$ 平面 PAD ,
 $\because MN \subset$ 平面 MNQ ,
 $\therefore MN //$ 平面 PAD .

【标注】【知识点】平面和平面平行的性质；直线和平面垂直的判定

15. 如图，在三棱锥 $P-ABC$ 中， $PA \perp$ 平面 ABC ， $AC \perp BC$ ， D 为 PC 的中点， E 为 AD 的中点，点 F 在线段 PB 上， $PA = AC$ 。



若 $\frac{PF}{PB} = \frac{3}{4}$ ，求证： $EF //$ 平面 ABC 。

【答案】（1）证明见解析。

【解析】（1）取 CD 中点 Q ，连接 EQ ， FQ ，
 $\because E$ ， Q 分别为 AD ， CD 中点，
 $\therefore EQ // AC$ ，
 $\because F$ ， Q 分别为 BP ， CP 的四等分点，
 $\therefore FQ // BC$ ，
 又 $\because FQ \cap EQ = Q$ ， $AC \cap BC = C$ ，
 $\therefore$ 面 $EFQ //$ 面 ABC ，
 $\because EF \subset$ 面 EFQ ，

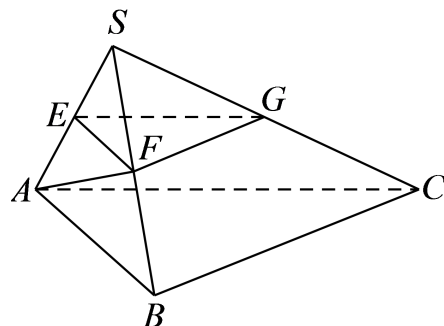
$\therefore EF \parallel \text{面} ABC$.

【标注】【知识点】直线和平面垂直的判定；平面和平面平行的性质

课堂巩固

面面平行的判定

16. 如图，在三棱锥 $S-ABC$ 中，平面 $SAB \perp$ 平面 SBC ， $AB \perp BC$ ， $AS = AB$ 。过 A 作 $AF \perp SB$ ，垂足为 F ，点 E, G 分别是侧棱 SA, SC 的中点。求证：



平面 $EFG \parallel$ 平面 ABC 。

【答案】 (1) 证明见解析。

【解析】 (1) 因为 $AS = AB$ ， $AF \perp SB$ ，

所以 F 为 SB 的中点。

又 E, G 分别是侧棱 SA, SC 的中点，

所以 $EF \parallel AB, EG \parallel AC$ ，

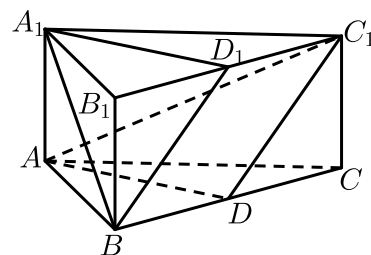
又 $AB \cap AC = A, EF \cap EG = E$ ，

$EF, EG \subset \text{平面} EFG, AB, AC \subset \text{平面} ABC$ ，

所以平面 $EFG \parallel$ 平面 ABC 。

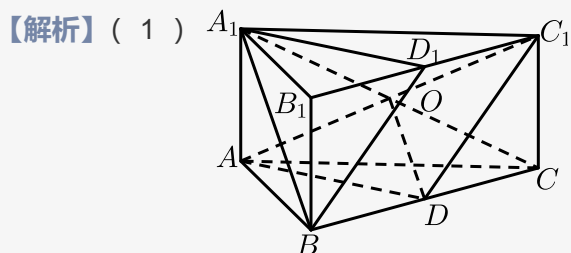
【标注】【知识点】面面平行的证明问题；平面和平面平行的判定；线线垂直的证明问题；直线和平面垂直的判定

17. 在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中， $AB = 2AA_1 = 4$ ，点 D 是 BC 上一点，且 $A_1B \parallel$ 平面 AC_1D ，点 D_1 是 B_1C_1 的中点。



求证：平面 $A_1BD_1 \parallel$ 平面 AC_1D 。

【答案】 (1) 证明见解析。



连 A_1C 交 AC_1 于 O ，连 DO ，则 O 平分 A_1C ， AC_1 。

$\because A_1B \parallel$ 面 AC_1D ，

由线面平行性质定理，

$A_1B \parallel DO$ ，

$\because O$ 为 A_1C 中点，

$\therefore BD = DC$ ，

$\because D_1C_1 \parallel BD$ ， BDC_1D_1 为平行四边形，

$\therefore BD_1 \parallel DC_1$ ，

$\because BD_1 \not\subset$ 面 ADC_1 ， $DC_1 \subset$ 面 ADC_1 ，

$\therefore BD_1 \parallel$ 面 ADC_1 。

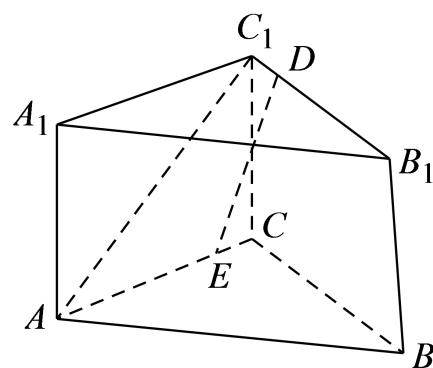
$\because BD_1 \subset$ 面 ABD_1 ， $A_1B \subset$ 面 ABD_1 ， $A_1B \cap BD_1 = B$ ，

$\therefore$ 面 $BD_1A_1 \parallel$ 面 AC_1D 。

【标注】【知识点】面面平行的证明问题；平面和平面平行的判定；空间几何体的体积；组合体求体积、表面积问题

|| 面面平行的性质

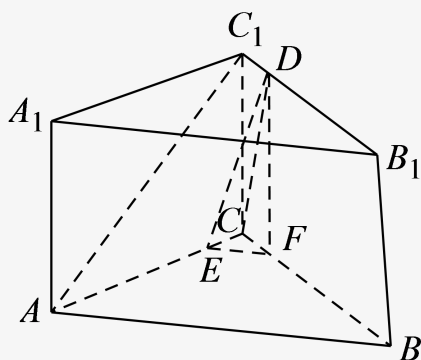
18. 如图，在三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中， $CC_1 \perp$ 平面 ABC ， $AC \perp BC$ ， D 在线段 B_1C_1 上， $B_1D = 3DC_1$ ， $AE = 3EC$ ， $AC = BC = CC_1 = 4$ 。



求证： $DE \parallel \text{平面} A_1ABB_1$.

【答案】 (1) 证明见解析 .

【解析】 (1) 过点 E 作 AB 的平行线，与 BC 交于点 F ，连接 DF .



$\because DF \parallel BB_1, EF \parallel AB$.

$EF \cap DF = F, AB \cap BB_1 = B$.

$\therefore \text{面} DEF \parallel \text{面} ABB_1A_1$.

又 $\because DE \subset \text{面} DEF$.

$\therefore DE \parallel \text{面} A_1ABB_1$.

【标注】 【知识点】线面平行的证明问题；几何法求空间角