

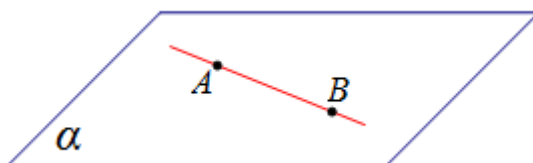
2空间中的位置关系

一、公理体系

1. 公理一

(1) 内容：

如果一条直线上的两点在一个平面内，那么这条直线在此平面内（见下图）。



(2) 作用：

此公理的作用时可以判断直线是否在平面内。

(3) 符号表示：

点动成线、线动成面。因此直线、平面都可以看成以点为元素的集合。点 P 在直线 l 上，记作 $P \in l$ ；点 P 在直线 l 外，记作 $P \notin l$ 。如果直线 l 上的所有点都在平面 α 内，就说直线 l 在平面 α 内，或者说平面 α 经过直线 l ，记作 $l \subset \alpha$ ；否则，就说直线 l 在平面 α 外，记作 $l \not\subset \alpha$ 。

这样，公理1就可以用下面的符号语言简化表示：

$$\left\{ \begin{array}{l} A \in l \\ B \in l \\ A \in \alpha \\ B \in \alpha \end{array} \right. \Rightarrow l \subset \alpha .$$

2. 公理二

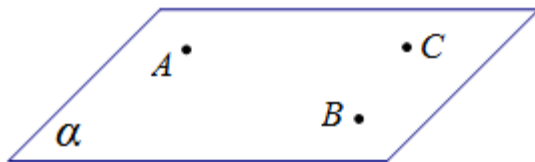
(1) 内容：

过不在一条直线上的三点，有且只有一个平面。

(2) 作用：

公理2刻画了平面特有的基本性质，它给出了确定一个平面的依据：

不在一条直线上（简称为“不共线”）的三个点 A, B, C 可以确定一个平面，并且此平面可以记成“平面 ABC ”，如下图。



【补充说明】

由公理2还可以得到如下三个推论：

推论1：经过一条直线和直线外一点有且只有一个平面；

推论2：经过两条相交直线有且只有一个平面；

推论3：经过两条平行直线有且只有一个平面。

典型例题

1. 以下四个命题中，

- ①不共面的四点中，其中任意三点不共线；
- ②若点 A 、 B 、 C 、 D 共面，点 A 、 B 、 C 、 E 共面，则点 A 、 B 、 C 、 D 、 E 共面；
- ③若直线 a 、 b 共面，直线 a 、 c 共面，则直线 b 、 c 共面；
- ④依次首尾相接的四条线段必共面。

正确命题的个数是（ ）。

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

【答案】 B

【解析】 对于①，假设四个点中有三点共线，则这条直线与另外一个点必共面，即这四个点必共面，所以不共面的四点中，其中任意三点不共线，故正确；

对于②，当点 A 、 B 、 C 在一条直线上时，若点 A 、 B 、 C 、 D 共面，点 A 、 B 、 C 、 E 共面，则 A 、 B 、 C 、 D 、 E 不一定共面，故错误；

对于③，当直线 a 与 b 相交， a 与 c 平行，且直线 c 不在 a 与 b 所在平面内时，直线 b 与 c 异面，此时直线 b 与 c 不共面，故错误；

对于④，四面体的四个顶点首尾相连，可以是四条线段，但这四条线段不共面，故错误。

综上所述，只有①正确。

故选B。

【标注】【知识点】已知线面位置关系判定结论的问题；三个公理、三个推论

2. 空间不共面的四个点可以确定 _____ 个平面。

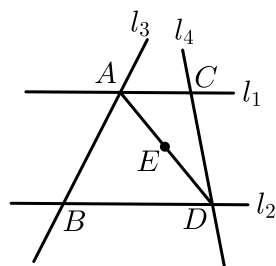
【答案】 4

【解析】 $\because$ 不共线的三个点确定一个平面，
不共面的四点就一定不存在三个点共线的情况，
 $\therefore$ 从4个点中任取3个点都可以确定一个平面，共有 $C_4^3 = 4$ 种结果．

【标注】 【知识点】 平面图形、空间几何体的直观图认识；三个公理、三个推论

3. 解答：

如图， $l_1 // l_2$ ， l_3 与 l_1 ， l_2 分别交于 A ， B 两点， l_4 与 l_1 ， l_2 分别交于 C ， D 两点， $E \in AD$ ，证明： A ， B ， C ， D ， E 五点共面．



【答案】 (1) 证明见解析．

【解析】 (1) 因为 $l_1 // l_2$ ，所以 l_1 ， l_2 可以确定一个平面 α ，
因为 $A \in l_1$ ， $D \in l_2$ ，所以 $A \in \alpha$ ， $D \in \alpha$ ，
所以 $AD \subset \alpha$ ，又 $E \in AD$ ，所以 $E \in \alpha$ ，
因为 $C \in l_1$ ， $B \in l_2$ ，所以 $C \in \alpha$ ， $B \in \alpha$ ，
从而 A ， B ， C ， D ， E 点都在平面 α 内，即 A ， B ， C ， D ， E 五点共面．

【标注】 【知识点】 三个公理、三个推论；已知线面位置关系判定结论的问题；组合体求体积、表面积问题；空间几何体的表面积；空间几何体的体积

课堂巩固

4. 下列命题正确的是 () ．

- A. 三点确定一个平面
- B. 一条直线和一个点确定一个平面
- C. 梯形可确定一个平面
- D. 圆心和圆上两点确定一个平面

【答案】 C

【解析】 A 选项：不共线的三点确定一个平面，故A错误；

B 选项：一条直线和直线外一个点确定一个平面，若点在直线上，它们不能确定平面，故B错误；

C 选项：梯形的两个底边所在直线平行，可确定一个平面，故C正确；

D 选项：当圆上两点为一个直径的两个端点时，它们与圆心三点共线，不能确定平面，故D错误．

故选 C．

【标注】【知识点】三个公理、三个推论；已知线面位置关系判定结论的问题

5. 如果一条直线与两条平行直线都相交，那么这三条直线共可确定 _____ 个平面．

【答案】 1

【解析】 由题意假设 $L_1 \cap L_2 = A$ 、 $L_1 \cap L_3 = B$ 、 $L_2 \cap L_3 = C$ ，

因为 L_1 与 L_2 能确定一个平面 α ，且 A 、 B 都在平面 α 内，

故 L_3 也在平面 α 内，

所以 L_1 、 L_2 、 L_3 只能确定一个平面．

故答案为：1．

【标注】【知识点】三个公理、三个推论；已知线面位置关系判定结论的问题

6. 已知正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中， E 、 F 分别为 C_1D_1 ， B_1C_1 的中点， $AC \cap BD = P$ ， $A_1C_1 \cap EF = Q$ ，求证：

D 、 B 、 F 、 E 四点共面．

【答案】 (1) 证明见解析．

【解析】 (1) $\because E$ 、 F 分别为 C_1D_1 ， B_1C_1 的中点，

$\therefore EF$ 是 $\triangle B_1C_1D_1$ 的中位线，

$\therefore EF \parallel D_1B_1$ ，

$\because ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 是正方体，

$\therefore BB_1 \parallel DD_1$ 、 $BB_1 = DD_1$ ，

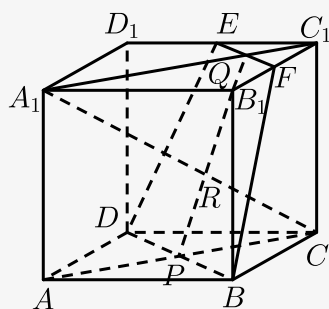
$\therefore BB_1D_1D$ 是平行四边形，

$\therefore DB \parallel D_1B_1$ ，

$\therefore EF \parallel DB$ ，

$$\therefore EF \parallel DB,$$

$\therefore D, B, F, E$ 共面.



【标注】【知识点】点、直线、平面之间的位置关系；三个公理、三个推论

3. 公理三

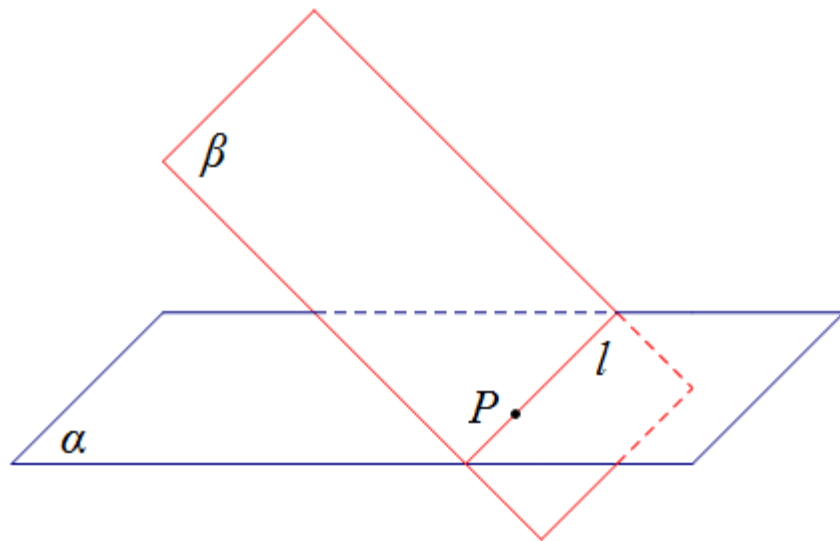
(1) 内容

如果两个不重合的平面有一个公共点，那么它们有且只有一条过该点的公共直线.

(2) 作用

公理3告诉我们，如果两个不重合的平面有一个公共点，那么这两个平面一定相交，且其交线一定过这个公共点. 也就是说，如果两个平面有一个公共点，那么它们必定还有另外一个公共点，只要找出这两个平面的两个公共点，就找出了它们的交线.

平面 α 与 β 相交于直线 l ，记作 $\alpha \cap \beta = l$ ，如下图.

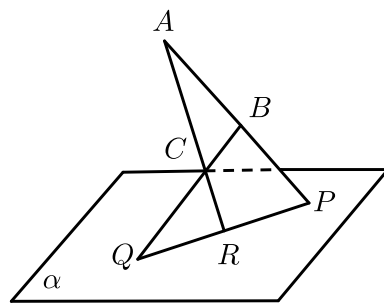


公理3也可以用符号表示：
$$\begin{cases} P \in \alpha \\ P \in \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha \cap \beta = l \\ P \in l \end{cases}.$$

典型例题

7.

已知 $\triangle ABC$ 在平面 α 外， $AB \cap \alpha = P$ ， $AC \cap \alpha = R$ ， $BC \cap \alpha = Q$ ，如图所示．求证： P ， Q ， R 三点共线．



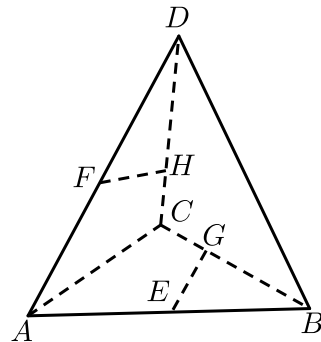
【答案】 证明见解析．

【解析】 方法一： $\because AB \cap \alpha = P$ ，
 $\therefore P \in AB$ ， $P \in \text{平面}\alpha$ ，
 又 $\because AB \subset \text{平面}ABC$ ，
 $\therefore P \in \text{平面}ABC$ ，
 $\therefore P$ 在平面 ABC 与平面 α 的交线上，
 同理： $BC \cap \alpha = Q$ ，
 $\therefore Q \in BC$ ， $Q \in \text{平面}\alpha$ ，
 又 $\because BC \subset \text{平面}ABC$ ，
 $\therefore Q \in \text{平面}ABC$ ，
 $\therefore Q$ 在平面 ABC 与平面 α 的交线上，
 $\because AC \cap \alpha = R$ ，
 $\therefore R \in AC$ ， $R \in \text{平面}\alpha$ ，
 又 $\because AC \subset \text{平面}ABC$ ，
 $\therefore R \in \text{平面}ABC$ ，
 $\therefore R$ 在平面 ABC 与平面 α 的交线上，
 $\therefore P$ 、 Q 、 R 三点共线．
 方法二： $\because AP \cap AR = A$ ，
 $\therefore AP$ 与 AR 可确定平面 APR ，
 又 $\because AB \cap \alpha = P$ ， $AC \cap \alpha = R$ ，
 $\therefore \text{平面}APR \cap \text{平面}\alpha = PR$ ，
 $\because B \in \text{平面}APR$ ， $C \in \text{平面}APR$ ，
 $\therefore BC \subset \text{平面}APR$ ，
 又 $\because Q \in \text{平面}APR$ ， $Q \in \text{平面}\alpha$ ，
 $\therefore Q \in PR$ ，

$\therefore P, Q, R$ 三点共线.

【标注】【知识点】三个公理、三个推论

8. 已知：空间四边形 $ABCD$ (如图所示) , E, F 分别是 AB, AD 的中点, G, H 分别是 BC, CD 上的点, 且 $CG = \frac{1}{3}BC, CH = \frac{1}{3}DC$. 求证：



三直线 FH, EG, AC 共点.

【答案】 (1) 证明见解析.

【解析】 (1) 易知 FH 与直线 AC 不平行, 但共面,

$\therefore$ 设 $FH \cap AC = M$,

$\therefore M \in \text{平面} EFHG, M \in \text{平面} ABC$.

又 $\because \text{平面} EFHG \cap \text{平面} ABC = EG$,

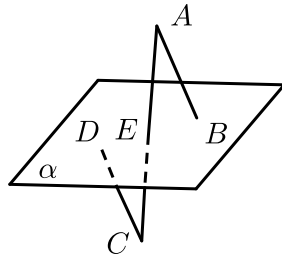
$\therefore M \in EG$,

$\therefore FH, EG, AC$ 共点.

【标注】【知识点】点、直线、平面之间的位置关系；三个公理、三个推论

课堂巩固

9. 如图, $AB \parallel CD$, $AB \cap \alpha = B$, $CD \cap \alpha = D$, $AC \cap \alpha = E$. 求证: B, E, D 三点共线.



【答案】 证明见解析.

【解析】 $\because AB//CD$,

$\therefore$ 直线 AB 、 CD 确定一个平面,

不妨设为平面 β ,

由 $B \in AB$, $AB \subset$ 平面 β , 得 $B \in$ 平面 β ,

又 $\because AB \cap \alpha = B$,

$\therefore B \in$ 平面 α , $B \in$ 平面 $\alpha \cap \beta$,

同理, 有 $D \in$ 平面 $\alpha \cap \beta$, $E \in$ 平面 $\alpha \cap \beta$,

那么, E 、 B 、 D 三点都在平面 α 与 β 的交线上,

即 E 、 B 、 D 三点共线.

【标注】【知识点】三个公理、三个推论; 平面的概念、画法及表示

10. 已知正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$, E 、 F 分别为 D_1C_1 、 B_1C_1 的中点, $AC \cap BD = P$,
 $A_1C_1 \cap EF = Q$.

(1) 若 A_1C 交平面 $BDEF$ 于点 R , 求证: P 、 Q 、 R 三点共线.

(2) 求证: BF 、 DE 、 CC_1 三线共点.

【答案】(1) 证明见解析.

(2) 证明见解析.

【解析】(1) 正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 记平面 A_1ACC_1 为 α , 平面 $BDEF$ 为 β ,

$\because A_1C_1 \cap EF = Q$,

$\therefore Q \in A_1C_1$, $Q \in \alpha$, $Q \in EF$, $Q \in \beta$.

同理, P 点也是 α 与 β 的公共点.

$\therefore \alpha \cap \beta = PQ$.

又由 $A_1C \cap \beta = R$, $A_1C \subset \alpha$ 可知, $R \in A_1C$, $R \in \alpha$, $R \in \beta$,

$\therefore R \in PQ$, 即 P 、 Q 、 R 三点共线.

(2) $\because C_1F \underline{\underline{\parallel}} \frac{1}{2}BC$, 延长 BF 、 CC_1 ,

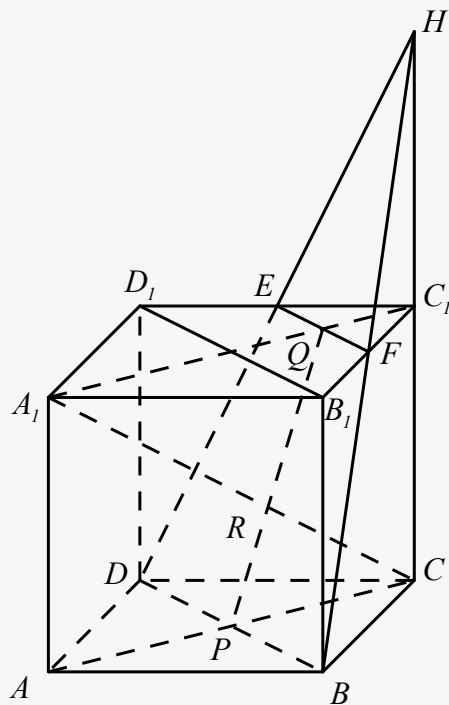
则 BF 与 CC_1 必相交, 设交点为 H .

$\because H \in$ 面 $DBFE$, $H \in$ 面 DCC_1D_1 ,

$\therefore$ 点 H 在面 $DBFE$ 与面 DCC_1D_1 的交线上.

又平面 $DBFE \cap DCC_1D_1 = DE$, 由公理3可知 H 在直线 DE 上,

$\therefore BF$ 、 DE 、 CC_1 三线共点.



【标注】【知识点】已知线面位置关系判定结论的问题；三个公理、三个推论；点、直线、平面之间的位置关系

二、直线与直线的位置关系

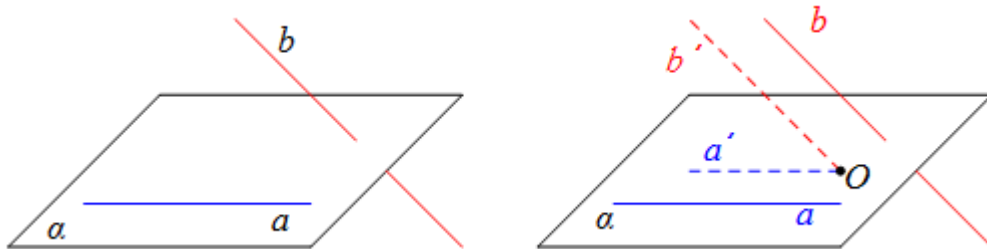
1. 异面直线

定义

我们把不同在**任何**一个平面内的两条直线叫做**异面直线**。

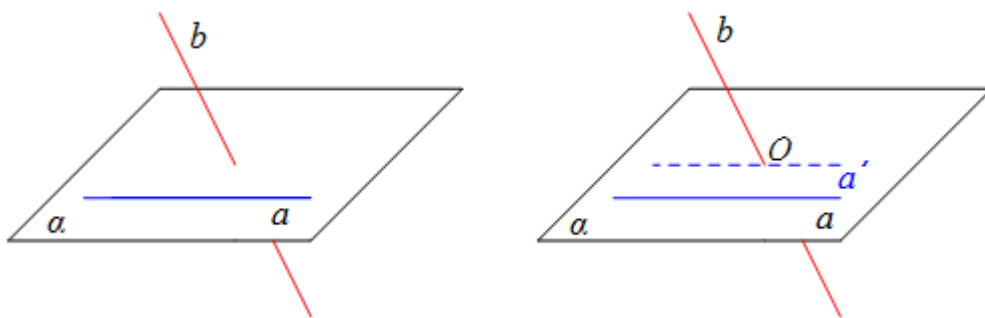
 夹角

已知两条异面直线 a, b ，经过空间任一点 O 作直线 $a' \parallel a, b' \parallel b$ ，我们把 a' 与 b' 所成的锐角（或直角）叫做异面直线 a 与 b 所成的角（或夹角），记作 $\langle a, b \rangle$ ，见下图：



为了简便, 点 O 常取在两条异面直线中的一条上. 例如取在直线 b 上, 然后经过点 O 作直线 $a' \parallel a$, a' 和 b'

所成的锐角（或直角）就是异面直线 a 与 b 所成的角，如下图：



如果两条异面直线所称的角是直角，那么我们就说这两条直线互相垂直。这条互相垂直的异面直线 a, b ，记作 $a \perp b$ 。

显然，由异面直线夹角的定义，两条异面直线的夹角的取值范围是 $(0, \frac{\pi}{2}]$ 。

2. 空间中直线与直线的位置关系

🔗 共面直线

1. 共面直线：

- (1) 相交直线：同一平面内，有且只有一个公共点。
- (2) 平行直线：同一平面内，没有公共点。

【补充说明】

这里给出公理4，即平行线的传递性：平行于同一条直线的两条直线互相平行。

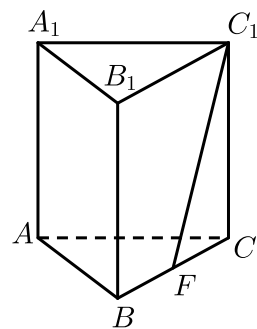
🔗 异面直线

2. 异面直线：不同在任何一个平面内，没有公共点。

🔗 典型例题

|| 异面直线的判断

11. 三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中， F 是 BC 中点，连接 C_1F ，则在三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 的所有棱所在直线中，与直线 C_1F 异面的直线有（ ）条。



A. 3

B. 4

C. 5

D. 6

【答案】 B

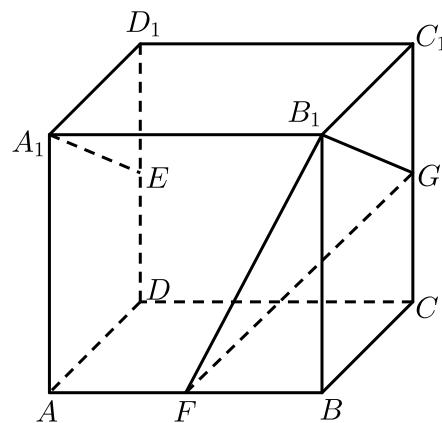
【解析】 A_1B_1 , A_1A , AC , AB 与 C_1F 异面.

故选B.

【标注】【知识点】已知线面位置关系判定结论的问题；点、直线、平面之间的位置关系

|| 异面直线夹角

12. 如图，长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中， $AA_1 = AB = 2$ ， $AD = 1$ ，点 E ， F ， G 分别是 DD_1 ， AB ， CC_1 的中点. 求



(1) 异面直线 A_1E 与 BC 所成角的大小.

(2) 异面直线 A_1E 与 GF 所成角的大小.

【答案】 (1) $\angle D_1A_1E = \frac{\pi}{4}$.

(2) $\angle B_1GF = \frac{\pi}{2}$.

【解析】 (1) $\because BC // A_1D$,

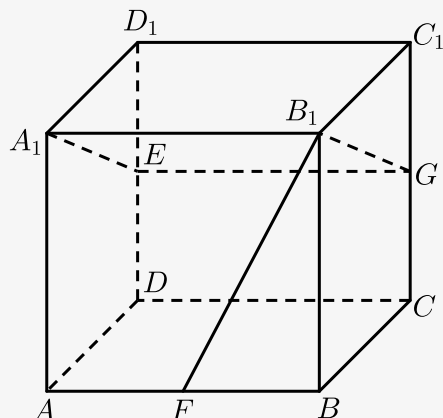
$\therefore \angle D_1A_1E$ 或其补角是 A_1E 与 BC 所成角,

$\because D_1E = 1$, $A_1D_1 = 1$,

$$\therefore \tan \angle D_1 A_1 E = \frac{D_1 E}{A_1 D_1} = 1 ,$$

$$\therefore \angle D_1 A_1 E = \frac{\pi}{4} .$$

(2) 连接 $B_1 G$, EG ,



$$\because E、G \text{ 分别是 } DD_1 \text{ 和 } CC_1 \text{ 中点 ,}$$

$$\therefore EG \parallel C_1 D_1 ,$$

$$\text{又 } \because C_1 D_1 \parallel A_1 B_1 ,$$

$$\therefore EG \parallel A_1 B_1 ,$$

$$\therefore \text{四边形 } EGB_1 A_1 \text{ 是平行四边形 ,}$$

$$\therefore A_1 E \parallel B_1 G ,$$

$$\therefore \angle B_1 G F \text{ 或其补角是 } A_1 E \text{ 与 } GF \text{ 所成角 ,}$$

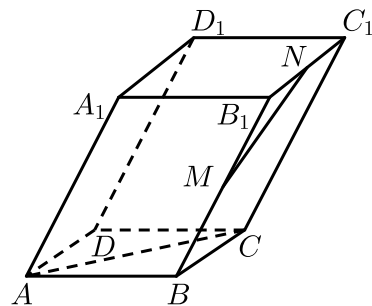
$$\text{连接 } B_1 F ,$$

$$\therefore FG = \sqrt{3} , B_1 G = \sqrt{2} , B_1 F = \sqrt{5} ,$$

$$\therefore \angle B_1 G F = \frac{\pi}{2} .$$

【标注】【知识点】几何法求空间角；点、直线、平面之间的位置关系

13. 如图所示，平行六面体 $ABCD - A_1 B_1 C_1 D_1$ 中，以顶点 A 为端点的三条棱，两两夹角均为 60° ，且 $AB = 2$ ， $AD = 1$ ， $AA_1 = 3$ ， M 、 N 分别为 BB_1 、 $B_1 C_1$ 的中点，则 MN 与 AC 所成角的余弦值为 () .

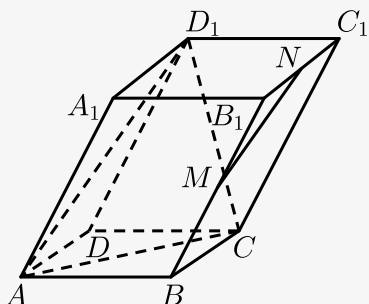


A. $\frac{13}{14}$

B. $\frac{\sqrt{91}}{14}$

C. $\frac{\sqrt{91}}{28}$

D. $\frac{\sqrt{78}}{12}$

【答案】 B**【解析】** 如图平行六面体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中,以 A 为端点的三条棱两两夹角为 60° , M, N 分别为 BB_1, B_1C_1 中点, $\therefore MN \parallel BC_1 \parallel AD_1$, $\therefore \angle CAD_1$ 是 MN 与 AC 所成角,

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos \angle ABC} = \sqrt{7},$$

$$AD_1 = \sqrt{AD^2 + DD_1^2 - 2AD \cdot DD_1 \cdot \cos 120^\circ} = \sqrt{13},$$

$$CD_1 = \sqrt{CD^2 + DD_1^2 - 2CD \cdot DD_1 \cos 60^\circ} = \sqrt{7},$$

$$\therefore \cos \angle CAD_1 = \frac{AC^2 + AD_1^2 - CD_1^2}{2AC \cdot AD_1} = \frac{\sqrt{91}}{14},$$

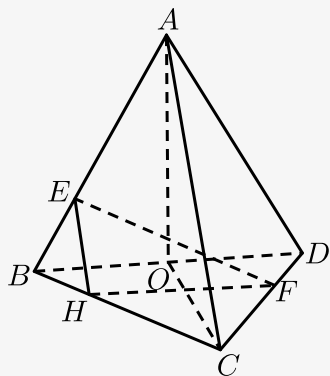
故 MN 与 AC 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{91}}{14}$.

故选 B.

【标注】 【知识点】几何法求空间角; 点、直线、平面之间的位置关系

14. 正四面体 $ABCD$ 中, E 在棱 AB 上, F 在棱 CD 上, 使得 $\frac{AE}{EB} = \frac{CF}{FD} = 2$, α 表示 EF 与 AC 所成的角, β 表示 EF 与 BD 所成角, 则 $\alpha + \beta = ()$.

A. 120° B. 90° C. 60° D. 30° **【答案】** B**【解析】** 如图,



取线段 BC 上一点 H ，使 $\frac{CH}{HB} = 2$ ，取 BD 中点 O ，连接 AO ， CO ，

$\because$ 正四面体 $ABCD$ 中每个侧面均为等边三角形，

$\therefore BD \perp AO$ ， $BD \perp CO$ ，

$\because AO \cap CO = O$ ，

$\therefore BD \perp$ 平面 AOC ，

$\because AC \subset$ 平面 AOC ，

$\therefore BD \perp AC$ ，

$\because \frac{AE}{EB} = \frac{CH}{HB} = 2$ ，

$\therefore EH \parallel AC$ ，

$\because \frac{CF}{FD} = \frac{CH}{HB} = 2$ ，

$\therefore HF \parallel BD$ ，

$\therefore \angle HEF$ 就是异面直线 EF 与 AC 所成的角，

$\angle HFE$ 就是异面直线 EF 与 BD 所成的角，

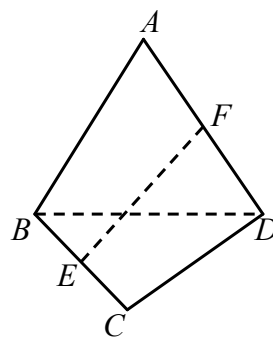
$\therefore \alpha = \angle HEF$ ， $\beta = \angle HFE$ ，又 $\because \angle EHF = 90^\circ$ ，

$\therefore \alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ 。

故选B。

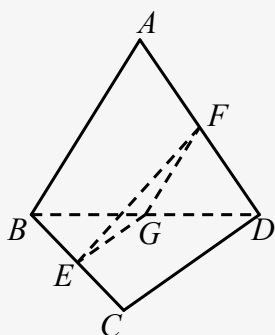
【标注】【知识点】点、直线、平面之间的位置关系；几何法求空间角

15. 如图，在空间四边形 $ABCD$ 中， $AB = CD = 4$ 且 AB 与 CD 所成的角为 60° ， E ， F 分别是 BC 、 AD 的中点，则 $EF = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



【答案】 2或 $2\sqrt{3}$

【解析】 取BD中点G，连接EG，FG，



$\because$ 异面直线AB与CD夹角为 60° ，

$\therefore \angle EGF = 60^\circ$ 或 $\angle EGF = 120^\circ$ ，

当 $\angle EGF = 60^\circ$ 时，

$$\begin{aligned} EF^2 &= EG^2 + FG^2 - 2EG \cdot FG \cdot \cos 60^\circ \\ &= \left(\frac{1}{2}CD\right)^2 + \left(\frac{1}{2}AB\right)^2 - 2 \cdot \frac{1}{2}CD \cdot \frac{1}{2}AB \cdot \cos 60^\circ \\ &= 2^2 + 2^2 - 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \\ &= 4, \end{aligned}$$

$\therefore EF = 2$ ，

当 $\angle EGF = 120^\circ$ 时，

$$\begin{aligned} EF^2 &= EG^2 + FG^2 - 2EG \cdot FG \cdot \cos 120^\circ \\ &= \left(\frac{1}{2}CD\right)^2 + \left(\frac{1}{2}AB\right)^2 - 2 \cdot \frac{1}{2}CD \cdot \frac{1}{2}AB \cdot \cos 120^\circ \\ &= 2^2 + 2^2 - 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \\ &= 12, \end{aligned}$$

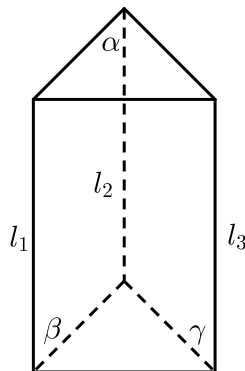
$\therefore EF = 2\sqrt{3}$ ，

综上所述 $EF = 2$ 或 $EF = 2\sqrt{3}$ 。

【标注】【知识点】正余弦定理综合求解边角；余弦定理

|| 直线与直线位置关系

16. 如图所示，平面 $\alpha \cap \beta = l_1$ ， $\alpha \cap \gamma = l_2$ ， $\beta \cap \gamma = l_3$ ， $l_1 // l_2$ ，下列说法正确的是（ ）。



- A. l_1 平行于 l_3 ，且 l_2 平行于 l_3
- B. l_1 平行于 l_3 ，且 l_2 不平行于 l_3
- C. l_1 不平行于 l_3 ，且 l_2 不平行于 l_3
- D. l_1 不平行于 l_3 ，但 l_2 平行于 l_3

【答案】A

【解析】 $\because l_1 // l_2$ ， $l_1 \not\subset \gamma$

$\therefore l_1 // \gamma$ ，

又 $\because l_3 = \beta \cap \gamma$ ， $l_1 \subset \beta$ ，

$\therefore l_1 // l_3$ ，

又 $\because$ 平行线具有传递性，

$\therefore l_2 // l_3$ ，

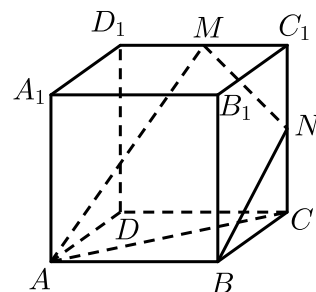
故A。

【标注】【知识点】线线平行的证明问题；直线的平行

17. 如图所示，在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中， M ， N 分别为棱 C_1D_1 ， C_1C 的中点，有以下四个结论：

- ①直线 AM 与 CC_1 是相交直线；
- ②直线 AM 与 BN 是平行直线；
- ③直线 BN 与 MB_1 是异面直线；
- ④直线 MN 与 AC 所成的角为 60° 。

其中正确的结论为 _____ .



【答案】 ③④

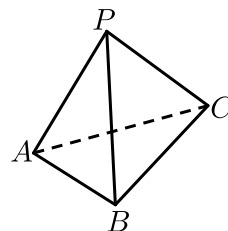
【解析】 $\because$ 直线 CC_1 在平面 CC_1D_1D 上, 而 $M \in$ 平面 CC_1D_1D , $A \notin$ 平面 CC_1D_1D ,
 $\therefore$ 直线 AM 与直线 CC_1 异面, 故①不正确;
 $\because$ 直线 AM 与直线 BN 异面, 故②不正确;
 利用①的方法验证直线 BN 与直线 MB_1 异面, 故③正确;
 利用平移法, 可得直线 MN 与 AC 所成的角即 D_1C 与 AC 所成的角, 为 60° , 故④正确.
 故答案为: ③④.

【标注】 【知识点】 直线和平面平行的性质; 几何法求空间角; 点、直线、平面之间的位置关系;
 已知线面位置关系判定结论的问题; 向量法解决异面直线所成角问题

课堂巩固

异面直线的判断

18. 如图所示, 在三棱锥 $P-ABC$ 的六条棱所在的直线中, 异面直线共有 _____ 对.



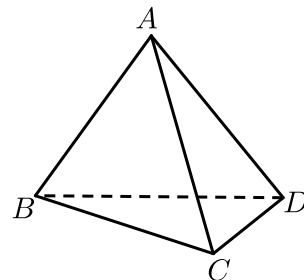
【答案】 3

【解析】 如图所示, 三棱锥 $P-ABC$ 中, 棱 PA 与 BC 是异面直线, 棱 PB 与 AC 是异面直线, 棱 PC 与 AB 是异面直线; 共3对.
 故答案为: 3.

【标注】 【知识点】 点、直线、平面之间的位置关系

|| 异面直线夹角

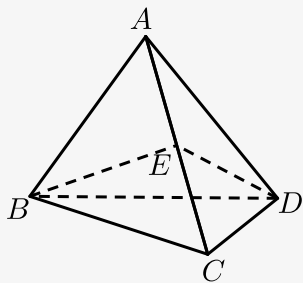
19. 如图，空间四边形 $ABCD$ 中，如 $AB = AD = AC = CB = CD = BD$ ，则 AC 与 BD 所成角为（ ）。



- A. 90° B. 60° C. 45° D. 30°

【答案】 A

【解析】 取 AC 中点 E ，连接 BE 、 DE ，



$$\because AB = AD = AC = CB = CD = BD,$$

$$\therefore AC \perp BE, AC \perp DE,$$

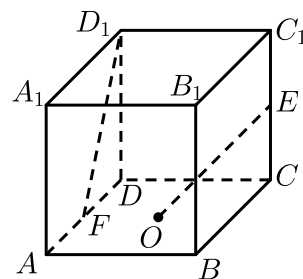
$$\therefore AC \perp \text{平面} BDE,$$

$$\therefore AC \perp BD.$$

故选A.

【标注】【知识点】几何法求空间角；直线和平面垂直的判定；直线和平面垂直的性质

20. 如图，在棱长为2的正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中， O 是底面 $ABCD$ 的中点， E 、 F 分别是 CC_1 、 AD 的中点，那么异面直线 OE 和 FD_1 所成的角的余弦值等于（ ）。



A. $\frac{\sqrt{10}}{5}$
C. $\frac{4}{5}$

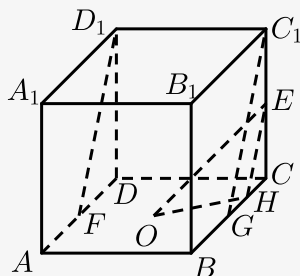
B. $\frac{\sqrt{15}}{5}$
D. $\frac{2}{3}$

【答案】 B

【解析】 取 BC 中点为 G ，连结 GC_1 ，

则 $GC_1 \parallel FD_1$ ，

再取 GC 中点为 H ，连结 HE 、 OH ，



则 $\angle OEH$ 为异面直线所成的角．在 $\triangle OEH$ 中， $OE = \sqrt{3}$ ， $HE = \frac{\sqrt{5}}{2}$ ， $OH = \frac{\sqrt{5}}{2}$ ．

由余弦定理，可得 $\cos \angle OEH = \frac{\sqrt{15}}{5}$ ．

【标注】 【知识点】几何法求空间角

|| 直线与直线位置关系

21. 平面 α 过正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的三个顶点 B ， D ， A_1 ，且 α 与底面 $A_1B_1C_1D_1$ 的交线为 l ，则 l 与 B_1D_1 的位置关系为 _____（相交、平行、异面）．

【答案】 平行

【解析】 在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中，

平面 $ABCD \parallel$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$ ．

平面 α 与平面 $A_1B_1C_1D_1$ 的交线为 l ，

$\therefore BD \parallel l$ ，

又 $\because$ 在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中，

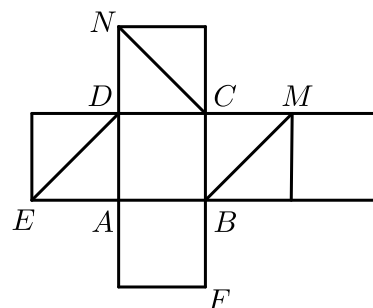
$BB_1 // DD_1$, 且 $BB_1 = DD_1$,
 $\therefore$ 四边形 BB_1DD_1 为平行四边形 ,
 $\therefore BD // B_1D_1$,
 $\therefore BD // l$.

【标注】【知识点】已知线面位置关系判定结论的问题；点、直线、平面之间的位置关系

22. 如图是一个正方体的平面展开图，在这个正方体中，

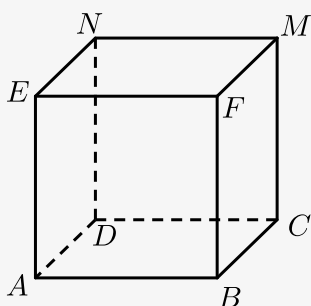
- ① BM 与 ED 是异面直线；
- ② CN 与 BE 平行；
- ③ CN 与 BM 成 60° 角；
- ④ DM 与 BN 垂直，

以上四个说法中正确的序号是 _____ .



【答案】 ①②③④

【解析】 将平面图折成立体图，



- ① 由图显然， ED 与 BM 为异面直线，
 $\therefore$ ① 对；
- ② $\because EN // BC$,
 $\therefore$ 四边形 $ENCB$ 为平行四边形，
 $\therefore EB // CN$,
 $\therefore$ ② 对；

③ $\because BM \parallel AN$,
 $\therefore CN$ 与 BM 夹角等于 CN 与 AN 夹角 ,
 又 $\because AN = NC = AC$ (均为正方体面对角线) ,
 $\therefore \angle ANC = 60^\circ$,
 $\therefore CN$ 与 AN 夹角为 60° ;
 $\therefore$ ③ 对 ;
 ④ $\because CN \perp DM$, $BC \perp$ 平面 $DCMN$,
 $\therefore BC \perp DM$,
 $\therefore DM \perp$ 平面 BCN ,
 $\therefore DM \perp BN$,
 $\therefore$ ④ 对 .
 故答案为 : ①②③④ .

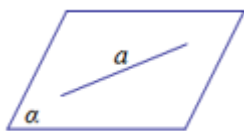
【标注】【知识点】点、直线、平面之间的位置关系；已知线面位置关系判定结论的问题

三、线面关系与面面关系

1. 直线与平面的位置关系

 直线在平面内——有无数个公共点

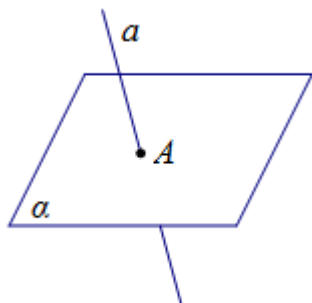
图示：



符号表示： $a \subset \alpha$.

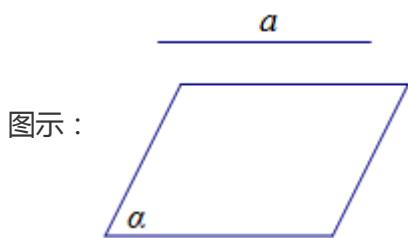
 直线与平面相交——有且只有一个公共点

图示：



符号表示： $a \cap \alpha = A$.

💡 直线与平面平行——没有公共点

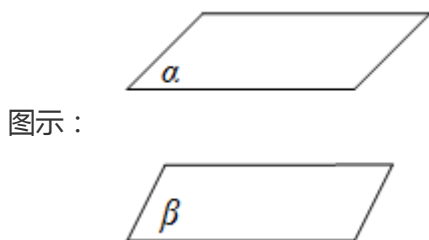


符号表示： $a // \alpha$.

【补充说明】直线与平面相交或平行的情况统称为**直线在平面外** .

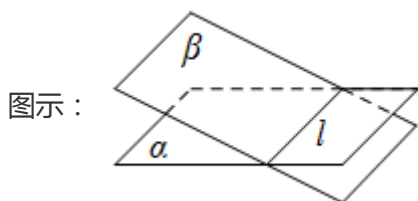
2. 平面与平面的位置关系

💡 两个平面平行——没有公共点



符号表示： $\alpha // \beta$.

💡 两个平面相交——有一条公共直线



符号表示： $\alpha \cap \beta = l$.

💡 典型例题

|| 线面关系

23. 如果平面 α 外有两点 A 、 B ，它们到平面 α 的距离都是1，则直线 AB 和平面 α 的位置关系一定是（ ） .

A. 平行

B. 相交

C. 平行或相交

D. $AB \subset \alpha$

【答案】 C

【解析】 若 A, B 在平面 α 同侧, 则 $AB//\alpha$, 若 A, B 在平面 α 两侧, 则 AB 与 α 相交.
故选C.

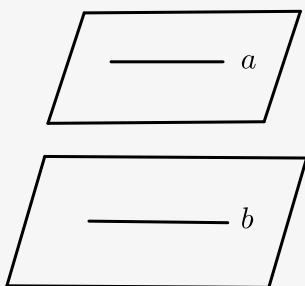
【标注】 【知识点】 已知线面位置关系判定结论的问题; 点、直线、平面之间的位置关系

面面关系

24. 如果在两个平面内分别有一条直线, 这两条直线互相平行, 那么两个平面的位置关系一定是 () .
- A. 平行 B. 相交 C. 平行或相交 D. 不能确定

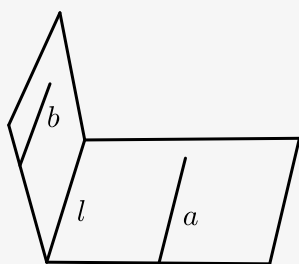
【答案】 C

【解析】 (1) 若2平面平行,



满足 $a//b$.

(2) 若2平面相交,



设2平面的交线为 l , 只需 $a//l, b//l$ 即可.

故选C.

【标注】 【知识点】 已知线面位置关系判定结论的问题; 点、直线、平面之间的位置关系

课堂巩固

线面关系

25. 过直线 l 外两点, 作与 l 平行的平面, 则这样的平面() .

- A. 不存在 B. 只能作出一个 C. 能作出无数个 D. 以上都有可能

【答案】 D

【解析】 设直线外两点为 A, B , 若 $AB \parallel l$, 则过 A, B 可作无数个平面与 l 平行; 若 AB 与 l 异面, 则只能作一个平面与 l 平行; 若 AB 与 l 相交, 则没有经过 A, B 的平面与 l 平行.
故选D .

【标注】 【知识点】 点、直线、平面之间的位置关系; 已知线面位置关系判定结论的问题

|| 面面关系

26. 不共面的四个定点到平面 α 的距离都相等, 这样的平面 α 共有() .

- A. 3个 B. 4个 C. 6个 D. 7个

【答案】 D

【解析】 借用四面体这个几何模型来解题 .

把不共面的四个定点看作四面体的四个顶点, 平面 α 可以分为两类:

第一类: 如图1,

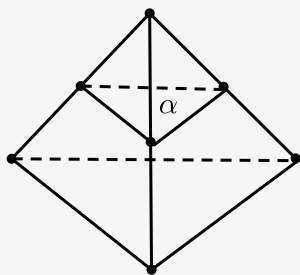


图1

四个定点分布在 α 的一侧1个, 另一侧3个, 此类中 α 共有4个 .

第二类: 如图2,

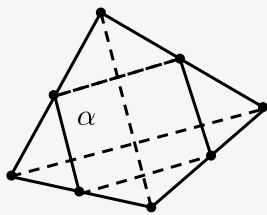


图2

四个定点分布在 α 的两侧各2个, 此类中 α 共3个 .

综上 α 共有 $4 + 3 = 7$ (个) .

【标注】【知识点】点、直线、平面之间的位置关系