

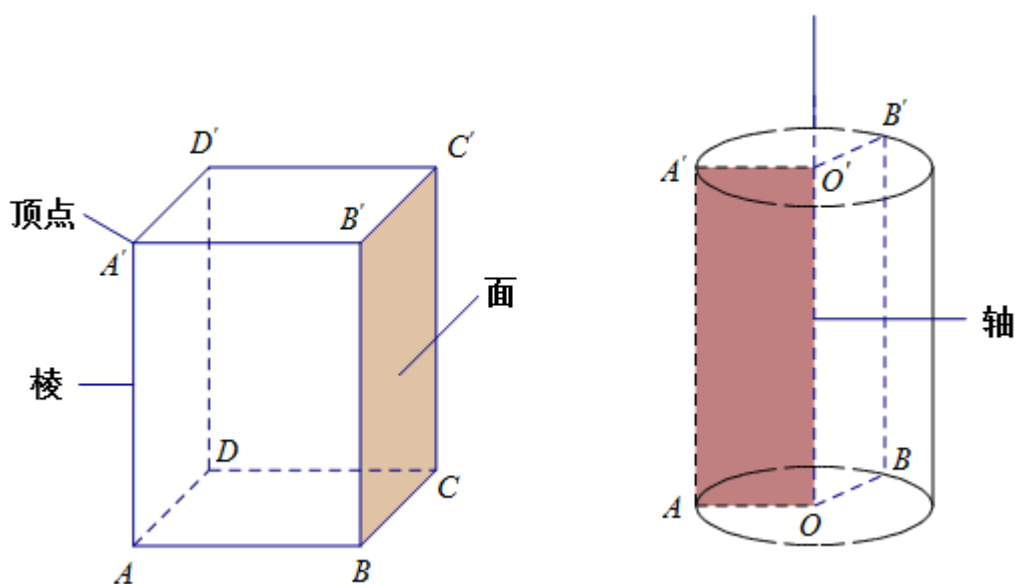
1空间几何体

一、空间几何体的定义与性质

1. 多面体与旋转体

📍 多面体

一般地，我们把由若干个平面多边形围成的几何体叫做**多面体**（如下图左）。围成多面体的各个多边形叫做多面体的**面**。如面 $ABCD$ ，面 $BCC'B'$ ；相邻两个面的公共边叫做多面体的**棱**。如棱 AB ，棱 AA' ；棱与棱的公共点叫做多面体的**顶点**。

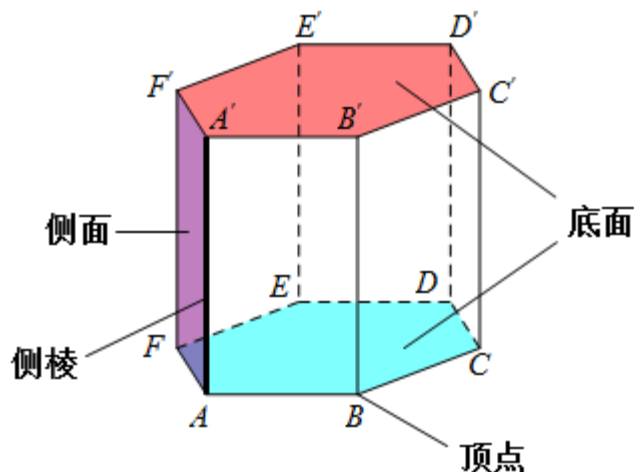


📍 旋转体

我们把由一个平面图形绕它所在平面内的一条定直线旋围所形成的封闭几何体叫做**旋转体**（如上图右）。这条定直线叫做旋转体的**轴**。

2. 多面体

📍 棱柱



(1) 相关定义：

如上图，一般地，有两个面互相平行，其余各面都是四边形，并且每相邻两个四边形的公共边都互相平行。由这些面所围成的多面体叫做**棱柱**（prism）。棱柱中，两个互相平行的面叫做棱柱的**底面**，简称底（ $ABCDEF$ ）；其余各面叫做棱柱的**侧面**（ $AFF'A'$ ）；相邻侧面的公共边叫做棱柱的**侧棱**（ AA' ）；侧面与底面的公共顶点叫做棱柱的**顶点**（ B ）。棱柱中不在同一平面上的两个顶点的连线叫做棱柱的**对角线**（ AD' ）。过不相邻的两条侧棱的截面叫做棱柱的**对角面**（ $ACC'A'$ ）。

(2) 棱柱的特征

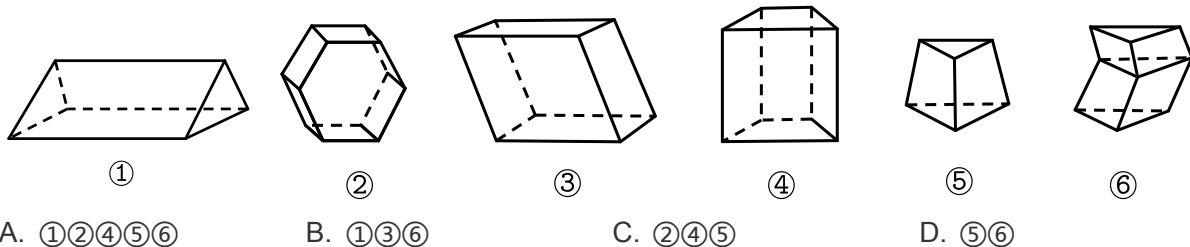
- ①侧棱都**相等**，侧面与对角面都是**平行四边形**；
- ②上下底面与平行于底面的截面都是全等的多边形。

(3) 棱柱的分类

- ①棱柱可以按底面的边数进行分类：底面是三角形、四边形、五边形……的棱柱分别叫做三棱柱、四棱柱、五棱柱……我们用表示底面各顶点的字母表示棱柱，上图中的六棱柱表示为棱柱 $ABCDEF - A'B'C'D'E'F'$ 。
- ②侧棱与底面垂直的棱柱是**直棱柱**，否则为斜棱柱；**底面为正多边形的直棱柱是正棱柱**。

🧠 典型例题

1. 有两个面互相平行，其余各面都是四边形，且每相邻的两个四边形的公共边都互相平行，由这些面所围成的多面体叫棱柱。根据棱柱的定义，下面的几何体中不是棱柱的是（ ）。



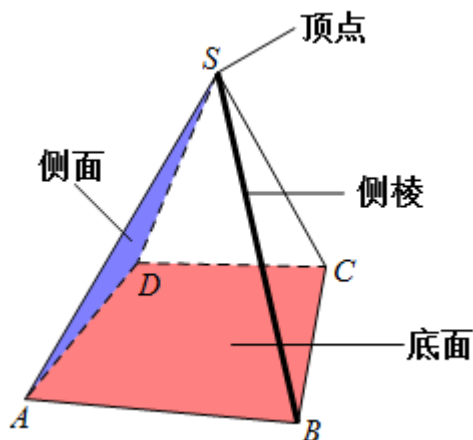
2. 下列说法正确的是（ ）。

- A. 棱柱的面中，至少有两个面互相平行
 B. 棱柱中两个互相平行的平面一定是棱柱的底面
 C. 棱柱中一条侧棱的长叫做棱柱的高
 D. 棱柱的侧面是平行四边形，但它的底面一定不是平行四边形
3. 下列关于棱柱的命题，其中真命题的序号是 _____ .
- ① 棱长相等的直四棱柱是正方体；
 ② 若有两个侧面垂直于底面，则该四棱柱为直四棱柱；
 ③ 若两个过相对棱的截面都垂直于底面，则该四棱柱为直四棱柱；
 ④ 各侧面都是正方形的棱柱一定是正棱柱；
 ⑤ 若四棱柱的四条体对角线两两相等，则该四棱柱为直四棱柱 .
4. 设 A 表示平行六面体， B 表示直平行六面体， C 表示长方体， D 表示正四棱柱， E 表示正方体，则 A ， B ， C ， D ， E 的关系是 ()
- A. $A \subseteq B \subseteq C \subseteq D \subseteq E$
 B. $A \subseteq B \subseteq D \subseteq C \subseteq E$
 C. $E \subseteq D \subseteq C \subseteq B \subseteq A$
 D. $E \subseteq C \subseteq D \subseteq B \subseteq A$

课堂巩固

5. 下列说法中正确的是 () .
- A. 棱柱的一条侧棱长叫做棱柱的高
 B. 棱柱的面中，至少有两个面互相平行
 C. 棱柱的两个互相平行的面一定是棱柱的底面
 D. 棱柱的侧面是平行四边形，但它的底面一定不是平行四边形
6. 下列关于棱柱的命题正确的是 _____ .
- ① 若每个侧面都是全等的矩形，则该四棱柱为正四棱柱；
 ② 若底面是正方形，且有一个顶点处的三条棱两两垂直，则该四棱柱为正四棱柱；
 ③ 若底面是正方形，且有两个侧面是矩形，则该四棱柱为正四棱柱 .
7. 设 $M = \{\text{正四棱柱}\}$ ， $N = \{\text{长方体}\}$ ， $P = \{\text{直平行六面体}\}$ ， $Q = \{\text{正方体}\}$ ，则 () .
- A. $P \supseteq N \supseteq M \supseteq Q$
 B. $Q \subseteq N \subseteq M \subseteq P$
 C. $Q \supseteq M \supseteq N \supseteq P$
 D. $Q \supseteq M \supseteq N \supseteq P$

棱锥



(1) 相关定义

如上图，一般地，有一个面是多边形，其余各面都是**有一个公共顶点的三角形**，由这些面所围成的多面体叫做**棱锥**（pyramid）. 这个多边形面叫做棱锥的**底面**或**底**；有公共顶点的各个三角形面叫做棱锥的**侧面**；各侧面的公共顶点叫做棱锥的**顶点**；相邻侧面的公共边叫做棱锥的**侧棱**. 棱锥也用表示顶点和底面各顶点的字母表示，上图中的四棱锥表示为棱锥 $S - ABCD$.

(2) 棱锥的特征

- ①有一个面是多边形；
- ②其余各面是有一个公共顶点的三角形.

(3) 棱锥的分类

- ①底面是三角形、四边形、五边形.....的棱锥分别叫做三棱锥、四棱锥、五棱锥.....其中三棱锥又叫四面体.
- ②如果一个棱锥的**底面是正多边形**，并且**顶点在底面上的射影是底面的中心**，这样的棱锥叫做**正棱锥**.

典型例题

8. 下列关于棱锥的命题，其中真命题的序号是 _____ .

- ①棱锥被平面分成的两部分不可能都是棱锥；
- ②有一个面是多边形，其余各面都是三角形的几何体是棱锥；
- ③棱锥的高线可能在几何体之外；
- ④若底面为正多边形，则该棱锥为正棱锥；
- ⑤若各侧棱都相等，则该棱锥为正棱锥；

9. 一个正棱锥的侧棱长与底面边长相等，则该棱锥不可能是（ ）

- A. 三棱锥 B. 四棱锥 C. 五棱锥 D. 六棱锥

课堂巩固

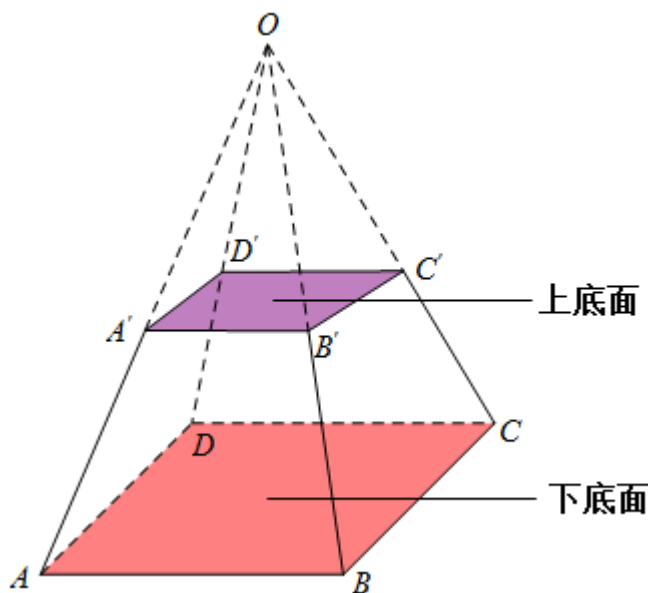
10. 下列命题中，是真命题的是（ ）。

- A. 底面是正方形的棱锥是正四棱锥
- B. 各条侧棱都相等的棱锥是正棱锥
- C. 一个面是多边形，其余各个面是三角形的几何体是棱锥
- D. 正四面体是正三棱锥

11. 如果一个棱锥的各个侧面都是等边三角形，那么这个棱锥不可能是（ ）。

- A. 三棱锥
- B. 四棱锥
- C. 五棱锥
- D. 六棱锥

棱台



(1) 相关定义

我们已经学过棱柱和棱锥，但是具有上图中这种结构的几何体我们没有学过。它是用一个**平行于棱锥底面的平面**去截棱锥从而得到底面与截面之间的部分，这样的多面体叫做**棱台** (frustum of a pyramid)。原棱锥的底面和截面分别叫做棱台的**下底面**和**上底面**，棱台也有**侧面**、**侧棱**、**顶点**。上图中的四棱台表示为棱台 $ABCD - A'B'C'D'$ 。

(2) 棱台的分类

- ①由三棱锥、四棱锥、五棱锥……截得的棱台分别叫做三棱台、四棱台、五棱台。
- ②由正棱锥截得的棱台叫做**正棱台**。

(3) 正棱台的性质：

- ①侧棱全都相等，侧面是全等的等腰梯形，各等腰梯形的高称为正棱台的斜高；

②正棱台的上下底面以及平行于上下底面的截面是相似的正多边形．

典型例题

12. 下列命题中正确的是（ ）．

- A. 用一个平面去截棱锥，棱锥底面和截面之间的部分是棱台
- B. 两个底面平行且相似，其余各面都是梯形的多面体是棱台
- C. 棱台的底面是两个相似的正方形
- D. 棱台的侧棱延长后必交于一点

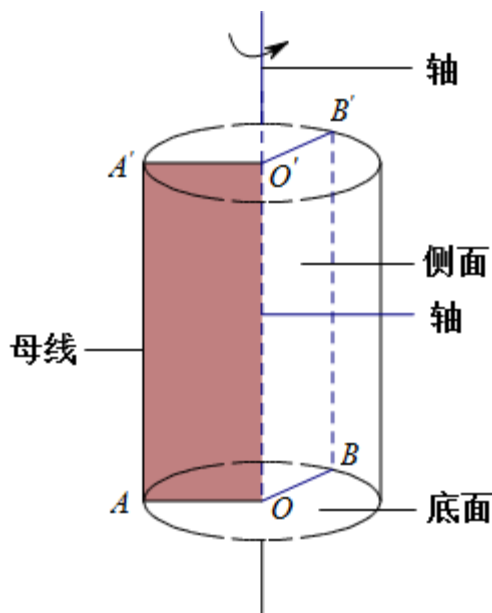
课堂巩固

13. 棱台不具有的性质是（ ）．

- A. 两底面相似
- B. 侧面都是梯形
- C. 侧棱延长后交于一点
- D. 侧棱长都相等

3. 旋转体

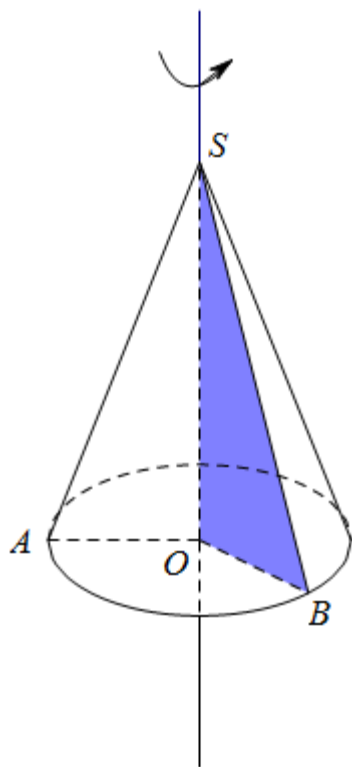
圆柱



如上图，以矩形 $AOO'A'$ 的一边 OO' 所在直线为旋转轴，其余三边旋转形成的面所围成的旋转体叫做圆柱．旋转轴叫做圆柱的轴；垂直于轴的边旋转而成的圆面叫做圆柱的底面；平行于轴的边旋转而成的曲面叫做圆柱的侧面；无论旋转到什么位置，不垂直于轴的边都叫做圆柱侧面的母线．

圆柱用表示它的轴的字母表示，上图中的圆柱表示为圆柱 $O'O$ ．圆柱和棱柱统称为柱体．

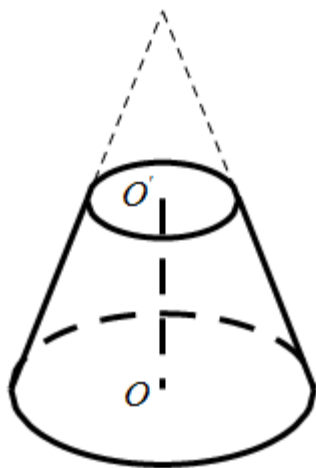
圆锥



与圆柱一样，圆锥也可以看作是由平面图形旋转而成的，如上图，以直角三角形 SOB 的一条直角边 OS 所在直线为旋转轴，其余两边旋转形成的面所围成的旋转体叫做**圆锥**。圆锥也有轴、底面、侧面和母线。

圆锥也用表示它的轴的字母表示，上图中的圆锥表示为圆锥 SO 。棱锥与圆锥统称为锥体。

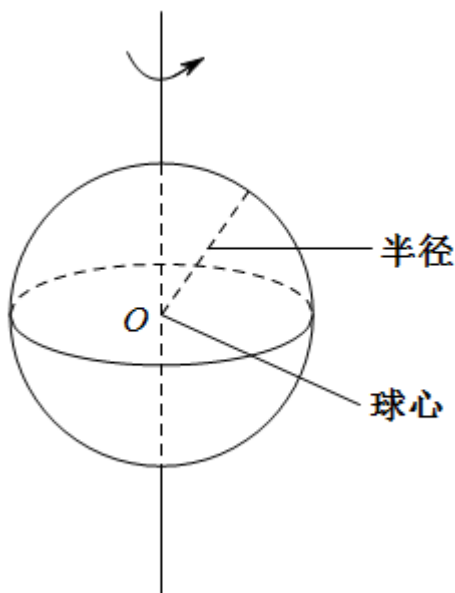
🔗 圆台



与棱台类似，用平行于圆锥底面的平面去截圆锥，底面与截面之间的部分（如上图）叫做**圆台**。

与圆柱和圆锥一样，圆台也有轴、底面、侧面、母线，请在上图中标出它们，并用字母将上图中的圆台表示出来。

棱台与圆台统称为台体。



如上图，以半圆的直径所在直线为旋转轴，半圆面旋围一周形成的旋转体叫做**球体**，简称**球**。半圆的圆心叫做球的**球心**，半圆的半径叫做球的**半径**，半圆的直径叫做球的**直径**。球常用表示球心的字母 O 表示，上图中的球表示为球 O 。

典型例题

14. 有下列四个判断：

- ①以直角三角形的一边所在直线为轴旋转所得的旋转体是圆锥；
- ②以直角梯形的一腰所在直线为轴旋转所得的旋转体是圆台；
- ③用一个平面去截一个圆锥，得到一个圆锥和一个圆台；
- ④圆柱、圆锥和圆台的底面都是圆。

其中判断正确的有（ ）个。

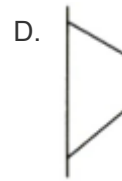
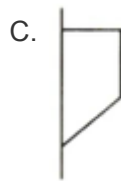
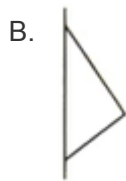
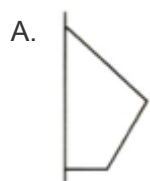
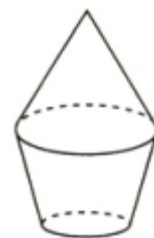
- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

15. 有下列命题：

- ①在圆柱的上、下底面的圆周上各取一点，则这两点的连线是圆柱的母线；
- ②圆柱的任意两条母线所在的直线是互相平行的；
- ③圆锥顶点与底面圆周上任意一点的连线是圆锥的母线；
- ④经过圆锥顶点的截面一定是等腰三角形；
- ⑤在经过圆锥顶点的截面中，轴截面的面积最大；
- ⑥平行于圆锥母线的截面一定是等腰三角形。

其中正确命题的序号是 _____。

16. 如图所示的几何体是由哪个平面图形旋转得到的 () .



课堂巩固

17. 下列说法正确是 () .

- A. 圆台是直角梯形绕其一边旋转而成
- B. 圆锥是直角三角形绕其一边旋转而成
- C. 圆柱的母线和它的底面不垂直
- D. 圆台可以看作是平行于底面的平面截一个圆锥而得到的

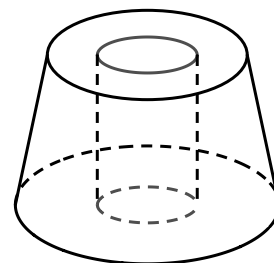
18. 给出下列命题：

- ①在圆柱的上、下底面的圆周上各取一点，则这两点的连线是圆柱的母线；
- ②圆锥的顶点与底面圆周上任意一点的连线是圆锥的母线；
- ③在圆台的上、下底面的圆周上各取一点，则这两点的连线是圆台的母线；
- ④圆柱的任意两条母线所在的直线是互相平行的。

其中正确的是 () .

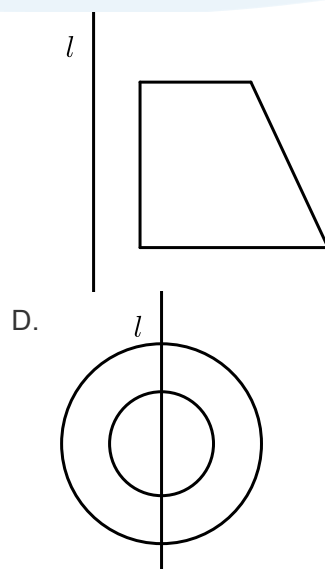
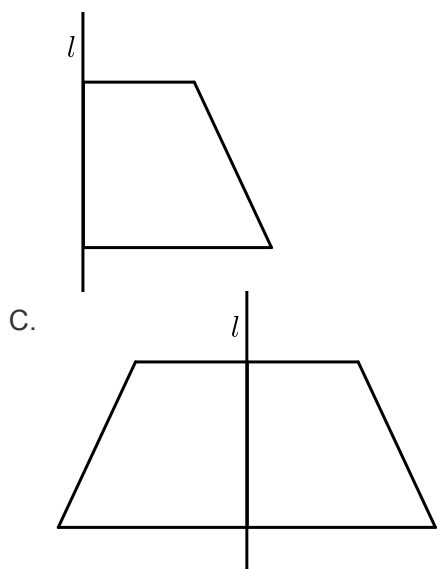
- A. ①②
- B. ②③
- C. ①③
- D. ②④

19. 如图，某工厂生产的一种机器零件原胚的直观图是一个中空圆台，中空部分呈圆柱形状，且圆柱底面圆心与圆台底面圆心重合，该零件原胚可由下面图形绕对称轴（直线 l ）旋转而成，这个图形是 () .



A.

B.



二、空间几何体的表面积与体积

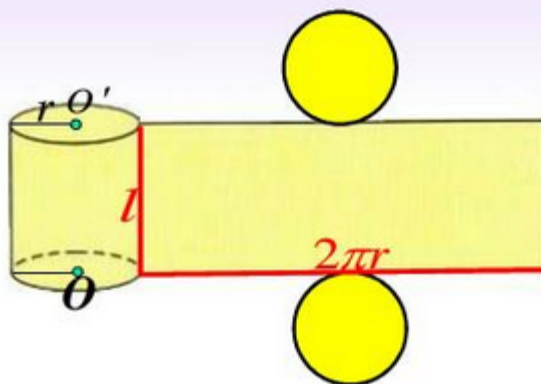
1. 表面积

圆柱

圆柱的侧面展开图是一个矩形。

如果圆柱的底面半径为 r ，母线长为 l ，那么圆柱的底面积（包括上底面和下底面）为 πr^2 ，侧面积为 $2\pi r l$ 。

因此，圆柱的表面积为二者之和，即 $S = 2\pi r^2 + 2\pi r l = 2\pi r(r + l)$ 。



圆柱的侧面展开图是矩形

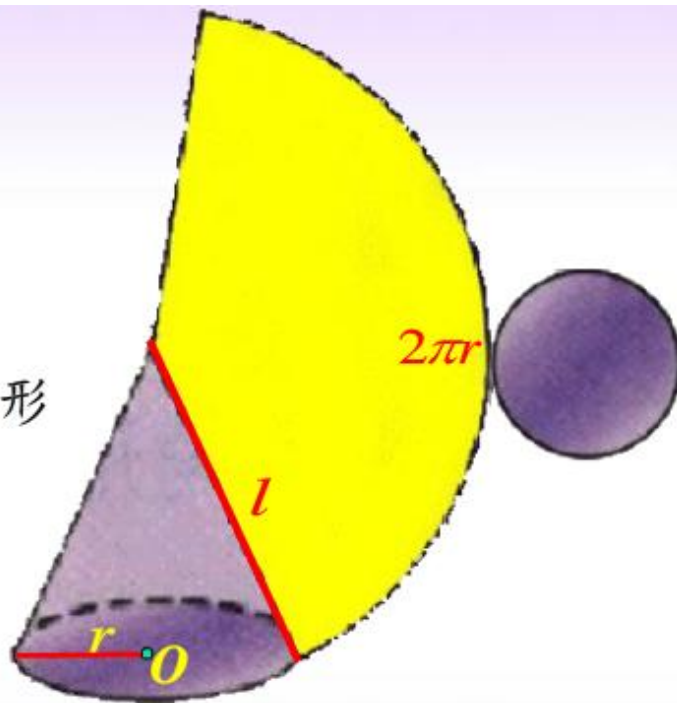
$$S_{\text{圆柱表面积}} = 2\pi r^2 + 2\pi r l = 2\pi r(r + l)$$

圆锥

圆锥的侧面展开图是一个扇形 .

如果圆锥的底面半径为 r , 母线长为 l , 那么它的底面积为 πr^2 , 侧面积为 $\pi r l$, 表面积
 $S = \pi r^2 + \pi r l = \pi r(r + l)$.

圆锥的侧面展开图是扇形



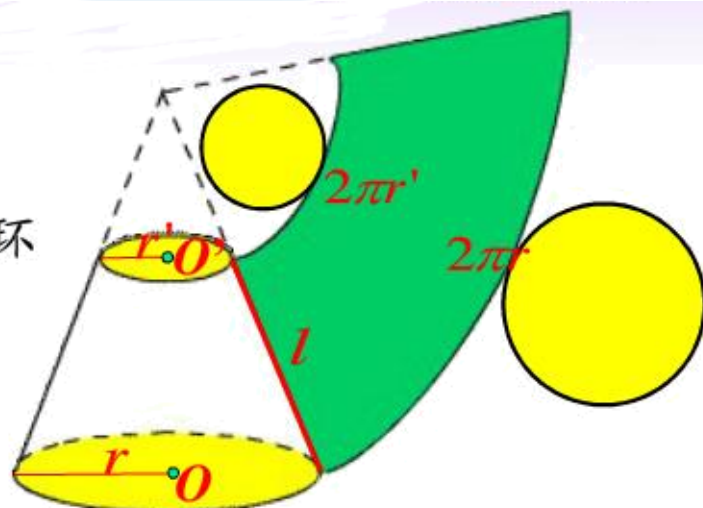
$$S_{\text{圆锥表面积}} = \pi r^2 + \pi r l = \pi r(r + l)$$

圆台

圆台的侧面展开图是一个扇环 .

它的表面积等于上、下两个底面的面积和加上侧面的面积 , 即 $S = \pi(r'^2 + r^2 + r'l + rl)$.

圆台的侧面展开图是扇环



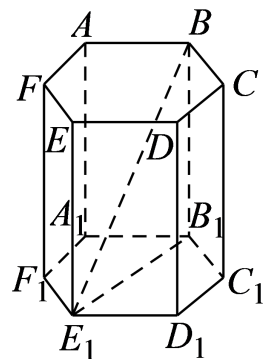
$$S_{\text{圆台表面积}} = \pi(r'^2 + r^2 + r'l + rl)$$

球

如果球的半径为 R ，那么它的表面积 $S = 4\pi R^2$ 。

典型例题

20. 正六棱柱的底面边长为2，最长的一条对角线长为 $2\sqrt{5}$ ，则它的表面积为（ ）。



A. $4(3\sqrt{3} + 4)$

B. $12(\sqrt{3} + 2)$

C. $12(2\sqrt{3} + 1)$

D. $3(\sqrt{3} + 8)$

21. 一个圆柱和一个圆锥的母线相等，底面半径也相等，则圆柱和圆锥的侧面积之比是 _____。

22. 过球的一条半径的中点，作垂直于该半径的平面，则所得截面的面积与球的表面积之比为（ ）。

A. $\frac{3}{16}$

B. $\frac{9}{16}$

C. $\frac{3}{8}$

D. $\frac{9}{32}$

课堂巩固

23.

底面是菱形的棱柱其侧棱垂直于底面，且侧棱长为5，它的体对角线的长分别是9和15，则这个棱柱的侧面积是_____。

24. 一个圆柱的侧面展开图是一个正方形，这个圆柱的全面积与侧面积的比是_____。

2. 体积

🔔 柱体

一般柱体的体积也是 $V = Sh$ 。

其中 S 为底面面积中， h 为柱体的高。

🔔 锥体

锥体（包括棱锥与圆锥）的体积公式是 $V = \frac{1}{3}Sh$ 。

其中 S 为底面面积中， h 为锥体的高。

🔔 台体

由于圆台（棱台）是由圆锥（棱锥）截成的，因此可以利用两个锥体的体积差，得到圆台（棱台）的体积公式 $V = \frac{1}{3}(S' + \sqrt{S'S} + S)h$ ，

其中 S' ， S 分别为上、下底面面积， h 为圆台（棱台）高。

🔔 球

如果球的半径为 R ，那么它的体积 $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ 。

🔔 典型例题

25. 设棱长为 a 的正方体的体积和表面积分别为 V_1, S_1 ，底面半径和高均为 r 的圆锥的体积和侧面积分别为 V_2, S_2 ，若 $\frac{V_1}{V_2} = \frac{3}{\pi}$ ，则 $\frac{S_1}{S_2}$ 的值为_____。

26. 已知一平面截球所得的截面面积为 2π ，球心到该截面的距离为1，则该球的体积是（ ）。

A. $4\sqrt{3}\pi$

B. $2\sqrt{3}\pi$

C. $\sqrt{3}\pi$

D. $\frac{4}{3}\sqrt{3}\pi$

🔔 课堂巩固

27. 若圆锥的侧面积为 15π ，底面面积为 9π ，则该圆锥的体积为_____。

三、

直观图

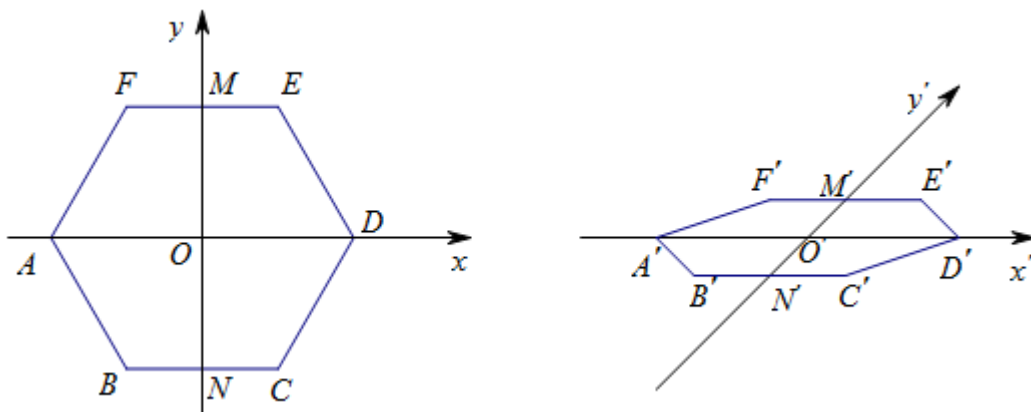
1. 平面图形的直观图

【例一】用斜二测画法画水平放置的正六边形的直观图。

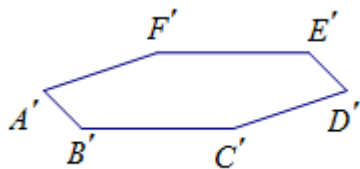
画法如下：

(1) 在正六边形 $ABCDEF$ 中，取 AD 所在直线为 x 轴，对称轴 MN 所在直线为 y 轴，两轴相交于点 O ，构建平面直角坐标系，称为坐标系一。与坐标系一对应，构造相应的 x' 轴与 y' 轴，两轴相交于点 O' ，使 $\angle x'O'y' = 45^\circ$ ，得到斜坐标系，称为坐标系二。

(2) 在坐标系二中，以 O' 为中点，在 x' 轴上取 $A'D' = AD$ ，在 y' 轴上取 $M'N' = \frac{1}{2}MN$ 。以点 N' 为中点，画 $B'C'$ 平行于 x' 轴，并且等于 BC ；再以 M' 为中点，画 $E'F'$ 平行于 x' 轴，并且等于 EF （见下图）。



(3) 连接 $A'B'$ ， $C'D'$ ， $D'E'$ ， $F'A'$ ，并擦去辅助线 x' 轴和 y' 轴，便获得正六边形 $ABCDEF$ 水平放置的直观图 $A'B'C'D'E'F'$ （见下图）。



上述画直观图的方法即为**斜二测画法**，它的步骤是：

(1) 在已知图形中取互相垂直的 x 轴和 y 轴。两轴相交于点 O 。画直观图时，把它们画成对应的 x' 轴与 y' 轴，两轴交于点 O' ，且使 $\angle x'O'y' = 45^\circ$ （或 135° ）。它们确定的平面表示水平面。

(2) 已知图形中平行于 x 轴或 y 轴的线段，在直观图中分别画成平行于 x' 轴或 y' 轴的线段。

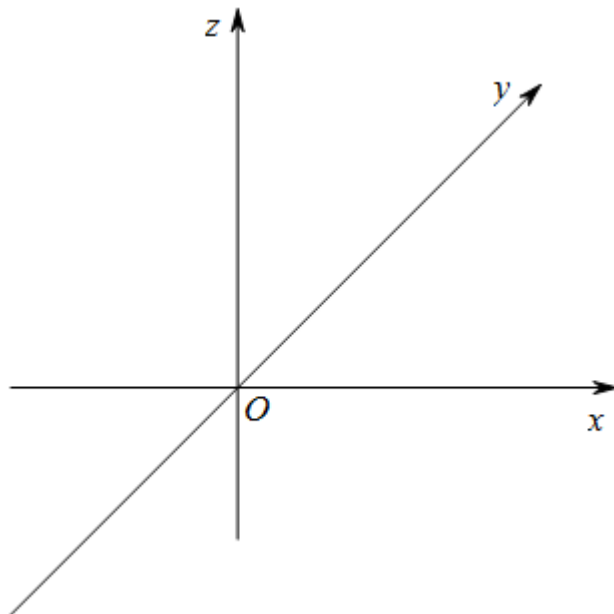
(3) 已知图形中平行于 x 轴的线段，在直观图中保持原长度不变，平行于 y 轴的线段，长度为原来的一半。

2. 空间几何体的直观图

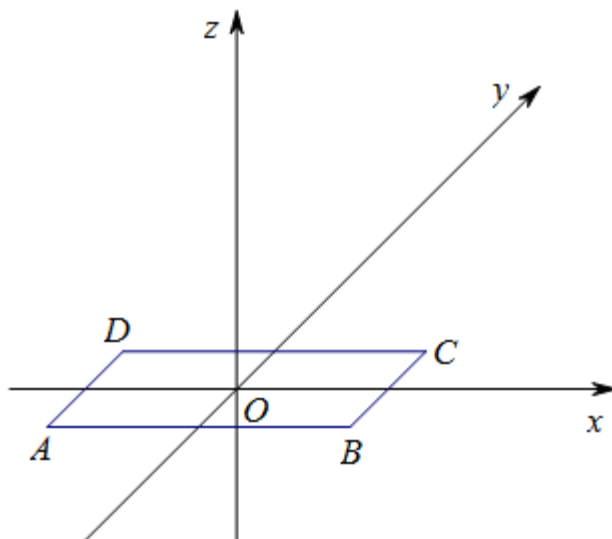
【例二】用斜二测画法画长、宽、高分别是4cm，3cm、3cm的长方体 $ABCD - A'B'C'D'$ 的直观图．

画法如下：

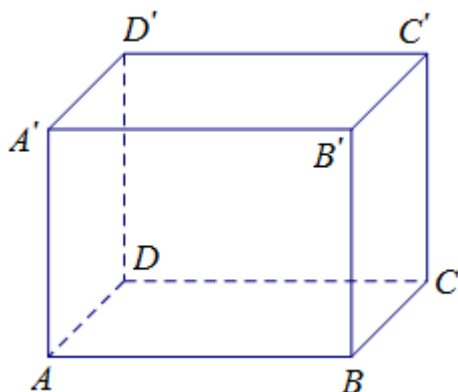
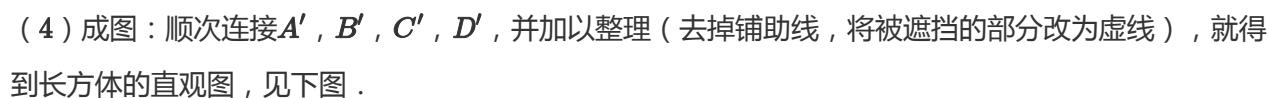
(1) 画轴：画 x 轴、 y 轴、 z 轴，三轴相交于点 O ．使 $\angle xOy = 45^\circ$ ， $\angle xOz = 90^\circ$ ，见下图．



(2) 画底面：以点 O 为中点，在 x 轴上取线段 MN ，使 $MN = 4\text{ cm}$ ；在 y 轴上取线段 PQ ，使 $PQ = \frac{3}{2}\text{ cm}$ ．分别过点 M 和 N 做 y 轴的平行线，过点 P 和 Q 作 x 轴的平行线．设它们的交点分别为 A ， B ， C ， D ．四边形 $ABCD$ 就是长方体的底面 $ABCD$ ，见下图．



(3) 画侧棱：过 A ， B ， C ， D 各点分别作 z 轴的平行线，并在这些平行线上分别截取3cm长的线段 AA' ， BB' ， CC' ， DD' ，见下图．



28. 用斜二测画法画边长为2的正方形 $ABCD$ 的直观图时, 以射线 AB , AD 分别为 x 轴、 y 轴的正半轴建立直角坐标系, 在相应的斜角坐标系中得到直观图 $A'B'C'D'$, 则该直观图的面积为().

- A. $\sqrt{2}$
C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$
- B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$
D. $\frac{\sqrt{6}}{2}$

29. 如图, 矩形 $O'A'B'C'$ 是水平放置的一个平面图形的直观图, 其中 $O'A' = 6\text{cm}$, $O'C' = 2\text{cm}$, 则原图形 $OABC$ 的面积为 _____ cm^2 .



 课堂巩固

30. 用斜二测画法画一个边长为2的正三角形的直观图，则直观图的面积是（ ）.

A. $\frac{\sqrt{3}}{4}$

B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

C. $\frac{\sqrt{6}}{4}$

D. $\frac{\sqrt{6}}{2}$

31. 水平放置 $\triangle ABC$ 的斜二测直观图如图所示，已知 $A'C' = 3$ ， $B'C' = 2$ ，则 AB 边上的中线的长度为_____.

