

【标注】【知识点】利用向量数量积求模长；坐标表示平面向量的垂直

4. 已知向量 $\vec{a} = (1, 2)$, $\vec{b} = (2, 3)$, $\vec{a} + \vec{b}$ 与 $2\vec{a} + \vec{b}$ 共线, 则 λ 值为 _____.

【答案】 $\frac{1}{2}$

【解析】 因为 $\vec{a} = (1, 2)$, $\vec{b} = (2, 3)$,

所以 $\vec{a} + \vec{b} = (1 + 2, 2 + 3) = (3, 5)$, $2\vec{a} + \vec{b} = (4, 7)$.

又因为 $\vec{a} + \vec{b}$ 与 $2\vec{a} + \vec{b}$ 共线, 所以 $(1 + 2\lambda) \cdot 7 = (2 + 3\lambda) \cdot 4$, 解得 $\lambda = \frac{1}{2}$.

【标注】【知识点】坐标表示平面向量的共线；平面向量加、减、数乘的坐标运算；坐标表示平面向量的垂直

5. 已知向量 $\vec{a} = (1, 1)$, $\vec{b} = (2, x)$, 若 $\vec{a} + \vec{b}$ 与 $4\vec{b} - 2\vec{a}$ 平行, 则实数 x 的值为 ().
- A. -2 B. 0 C. 1 D. 2

【答案】 D

【解析】 因为 $\vec{a} = (1, 1)$, $\vec{b} = (2, x)$, 所以 $\vec{a} + \vec{b} = (3, x + 1)$, $4\vec{b} - 2\vec{a} = (6, 4x - 2)$, 由 $\vec{a} + \vec{b}$ 与 $4\vec{b} - 2\vec{a}$ 平行, 得 $6(x + 1) - 3(4x - 2) = 0$, 解得 $x = 2$.
故选 D.

【标注】【知识点】坐标表示平面向量的共线

6. 已知平面向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ 满足 $\vec{a} = (-1, 1)$, $\vec{b} = (2, 3)$, $\vec{c} = (-2, k)$, 若 $(\vec{a} + \vec{b}) \parallel \vec{c}$, 则实数 $k =$ ().
- A. 4 B. -4 C. 8 D. -8

【答案】 D

【解析】 $\vec{a} + \vec{b} = (1, 4)$, 且 $(\vec{a} + \vec{b}) \parallel \vec{c}$, 所以有 $\frac{4}{1} = \frac{k}{-2} \Rightarrow k = -8$.
故答案为 D.

【标注】【知识点】坐标表示平面向量的共线；坐标表示平面向量的垂直

7. 已知三个向量 $\vec{OA} = (k, 12)$, $\vec{OB} = (4, 5)$, $\vec{OC} = (10, k)$, 且 A、B、C 三点共线, 则 $k =$ _____.

【答案】 -2或11

【解析】 由A、B、C三点共线，可得

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= \lambda \overrightarrow{BC} \quad (\lambda \text{ 为实数}), \text{ 即 } (4-k, -7) = \lambda(6, k-5), \\ \therefore \begin{cases} k+6\lambda = 4, \\ k\lambda-5\lambda = -7, \end{cases} &\text{解得} \begin{cases} k = -2, \\ \lambda = 1 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} k = 11, \\ \lambda = -\frac{7}{6}. \end{cases}\end{aligned}$$

【标注】 【知识点】坐标表示平面向量的垂直；坐标表示平面向量的共线；平面向量中的三点共线问题

8. 已知向量 $\vec{a} = (1, m)$, $\vec{b} = (-1, m)$, 若 $2\vec{a} - \vec{b}$ 与 $\vec{b}$ 垂直, 则 $|\vec{a}|$ 等于 _____.

【答案】 2

【解析】 $\because \vec{a} = (1, m), \vec{b} = (-1, m),$
 $\therefore 2\vec{a} - \vec{b} = (3, m),$
又 $\because 2\vec{a} - \vec{b}$ 与 $\vec{b}$ 垂直,
 $\therefore (2\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{b} = (3, m) \cdot (-1, m)$
 $= -3 + m^2 = 0,$
 $\therefore m^2 = 3,$
 $\therefore |\vec{a}| = \sqrt{1 + m^2} = \sqrt{4} = 2.$

【标注】 【知识点】向量的模；平面向量加、减、数乘的坐标运算；坐标表示平面向量的垂直；平面向量线性运算综合（非坐标）；利用向量数量积求模长；平面向量数量积运算（非坐标）；利用数量积解决向量垂直问题（非坐标运算）

9. 已知向量 $\vec{a} = (1, 1)$, $\vec{b} = (2, -3)$, 若 $k\vec{a} - 2\vec{b}$ 与 $\vec{a}$ 垂直, 则实数 k 等于 _____.

【答案】 -1

【解析】 先把 $k\vec{a} - 2\vec{b}$
化简得 $k\vec{a} - 2\vec{b} = k(1, 1) - 2(2, -3) = (k-4, k+6).$
由 $(k\vec{a} - 2\vec{b}) \perp \vec{a}.$
得 $(k\vec{a} - 2\vec{b}) \cdot \vec{a} = (k-4) + (k+6) = 2k+2 = 0.$
解得 $k = -1.$

【标注】【知识点】坐标表示平面向量的垂直；平面向量加、减、数乘的坐标运算；数量积的坐标表达式

10. 已知向量 $\vec{a} = (k, 3)$, $\vec{b} = (1, 4)$, $\vec{c} = (2, 1)$, 且 $(2\vec{a} - 3\vec{b}) \perp \vec{c}$, 则实数 $k = ()$.
- A. $-\frac{9}{2}$ B. 0 C. 3 D. $\frac{15}{2}$

【答案】C

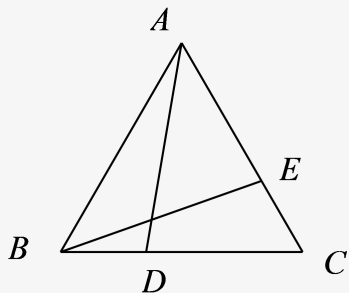
【解析】 $\because \vec{a} = (k, 3)$, $\vec{b} = (1, 4)$, $\vec{c} = (2, 1)$,
 $\therefore 2\vec{a} - 3\vec{b} = (2k - 3, -6)$,
 $\because (2\vec{a} - 3\vec{b}) \perp \vec{c}$,
 $\therefore (2\vec{a} - 3\vec{b}) \cdot \vec{c} = 0$,
 $\therefore 2(2k - 3) + 1 \times (-6) = 0$,
解得 $k = 3$.
故选C.

【标注】【知识点】坐标表示平面向量的垂直

11. 在边长为1的正三角形ABC中, 设 $\vec{BC} = 2\vec{BD}$, $\vec{CA} = \lambda\vec{CE}$, 若 $\vec{AD} \cdot \vec{BE} = -\frac{1}{4}$, 则 λ 的值为 () .
- A. $\frac{1}{2}$ B. 2 C. $\frac{1}{3}$ D. 3

【答案】D

【解析】由题意画出图象如图：



$$\begin{aligned} \because \vec{BC} &= 2\vec{BD}, \\ \therefore D &\text{为 } BC \text{ 的中点, 则 } \vec{AD} &= \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AC}), \end{aligned}$$

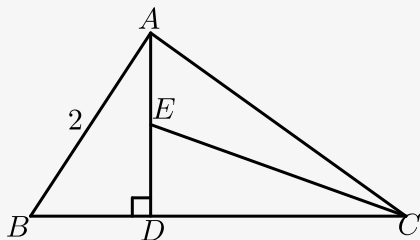
$$\begin{aligned}
&\therefore \overrightarrow{CA} = \lambda \overrightarrow{CE}, \\
&\therefore \overrightarrow{CE} = \frac{1}{\lambda} \overrightarrow{CA} = -\frac{1}{\lambda} \overrightarrow{AC}, \\
&\text{则 } \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CE} - \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{AB} = \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}, \\
&\therefore \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BE} = -\frac{1}{4}, \\
&\therefore \frac{1}{2} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot \left[\left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} \right] = -\frac{1}{4}, \\
&\left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}^2 + \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) \overrightarrow{AC}^2 - \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = -\frac{1}{2}, \\
&\left(-\frac{1}{\lambda}\right) \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}^2 + \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) \overrightarrow{AC}^2 = -\frac{1}{2}, \\
&\left(-\frac{1}{\lambda}\right) \times 1 \times 1 \times \frac{1}{2} - 1 + \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) = -\frac{1}{2}, \\
&\text{解得 } \lambda = 3, \\
&\text{故选: D.}
\end{aligned}$$

【标注】【知识点】平面向量数量积的运算律

12. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = 2$, $BC = 3$, $\angle ABC = \frac{\pi}{3}$, AD 为 BC 边上的高, E 为 AD 的中点, $\overrightarrow{CE} = \lambda \overrightarrow{AB} + \mu \overrightarrow{BC}$, 则 $\lambda + \mu$ 的值为 _____.

【答案】 $-\frac{4}{3}$

【解析】 由已知得 $BD = 1$, $CD = 2$,



$$\begin{aligned}
&\therefore \overrightarrow{BD} = \frac{1}{3} \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{DC} = \frac{2}{3} \overrightarrow{BC}. \\
&\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} = -\frac{2}{3} \overrightarrow{BC} - \frac{1}{2} \overrightarrow{AD} \\
&= -\frac{2}{3} \overrightarrow{BC} - \frac{1}{2} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}) \\
&= -\frac{2}{3} \overrightarrow{BC} - \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} - \frac{1}{6} \overrightarrow{BC} \\
&= -\frac{1}{2} \overrightarrow{AB} - \frac{5}{6} \overrightarrow{BC}, \\
&\therefore \lambda = -\frac{1}{2}, \mu = -\frac{5}{6}, \\
&\therefore \lambda + \mu = -\frac{4}{3}.
\end{aligned}$$

二、解答题

13. 已知向量 $\vec{a} = (1, 2)$, $\vec{b} = (4, -3)$.

(1) 若向量 $\vec{c} // \vec{a}$, 且 $|\vec{c}| = 2\sqrt{5}$, 求 $\vec{c}$ 的坐标.

(2) 若向量 $\vec{a} + k\vec{b}$ 与 $\vec{a} - k\vec{b}$ 互相垂直, 求实数 k 的值.

【答案】(1) $\vec{c} = (2, 4)$ 或 $\vec{c} = (-2, -4)$.

(2) $k = \pm \frac{\sqrt{5}}{5}$.

【解析】(1) 方法一：设 $\vec{c} = \lambda \vec{a}$,

$$\text{则 } \vec{c}^2 = \lambda^2 \vec{a}^2,$$

$$\text{所以 } (2\sqrt{5})^2 = \lambda^2(1^2 + 2^2),$$

$$\text{解得 } \lambda = \pm 2,$$

$$\text{所以 } \vec{c} = (2, 4) \text{ 或 } \vec{c} = (-2, -4).$$

方法二：设 $\vec{c} = (x, y)$,

$$\text{因为 } \vec{c} // \vec{a}, \vec{a} = (1, 2),$$

$$\text{所以 } 2x = y,$$

$$\text{因为 } |\vec{c}| = 2\sqrt{5},$$

$$\text{所以 } x^2 + y^2 = 20,$$

$$\text{解得 } \begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x = -2 \\ y = -4 \end{cases},$$

$$\text{所以 } \vec{c} = (2, 4) \text{ 或 } \vec{c} = (-2, -4).$$

(2) 因为向量 $\vec{a} + k\vec{b}$ 与 $\vec{a} - k\vec{b}$ 互相垂直,

$$\text{所以 } (\vec{a} + k\vec{b}) \cdot (\vec{a} - k\vec{b}) = 0,$$

$$\text{即 } \vec{a}^2 - k^2 \vec{b}^2 = 0,$$

$$\text{而 } \vec{a} = (1, 2), \vec{b} = (4, -3),$$

$$\text{所以 } \vec{a}^2 = 5, \vec{b}^2 = 25,$$

$$\text{因此 } 5 - 25k^2 = 0,$$

$$\text{解得 } k = \pm \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

【标注】【知识点】利用数量积解决向量垂直问题（非坐标运算）；坐标表示平面向量的垂直；坐标表示平面向量的共线

14. 已知向量 $\vec{a} = (3, 2)$, $\vec{b} = (-1, 2)$, $\vec{c} = (4, 1)$

(1) 求 $3\vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c}$.

(2) 求满足 $\vec{a} = m\vec{b} + n\vec{c}$ 的实数 m, n .

(3) 若 $(\vec{a} + k\vec{c}) \parallel (2\vec{b} - \vec{a})$, 求实数 k .

【答案】 (1) $(0, 6)$.

(2) $m = \frac{5}{9}$, $n = \frac{8}{9}$.

(3) $k = -\frac{16}{13}$.

【解析】 (1) $3\vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c} = 3 \times (3, 2) + (-1, 2) - 2 \times (4, 1)$,

$$= (9, 6) + (-1, 2) - (8, 2),$$

$$= (0, 6).$$

故答案为: $(0, 6)$.

(2) $\because \vec{a} = m\vec{b} + n\vec{c}$,

$$\therefore (3, 2) = m(-1, 2) + n(4, 1) = (-m + 4n, 2m + n),$$

$$\therefore \begin{cases} -m + 4n = 3 \\ 2m + n = 2 \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} m = \frac{5}{9} \\ n = \frac{8}{9} \end{cases}.$$

故答案为: $m = \frac{5}{9}$, $n = \frac{8}{9}$.

(3) $\because (\vec{a} + k\vec{c}) \parallel (2\vec{b} - \vec{a})$,

$$\text{又 } \vec{a} + k\vec{c} = (3 + 4k, 2 + k),$$

$$2\vec{b} - \vec{a} = (-5, 2),$$

$$\therefore (3 + 4k) \cdot 2 - (-5) \times (2 + k) = 0,$$

$$\therefore k = -\frac{16}{13}.$$

故答案为: $k = -\frac{16}{13}$.

【标注】【知识点】平面向量线性运算综合(非坐标);平面向量加、减、数乘的坐标运算;坐标表示平面向量的共线;坐标表示平面向量的垂直