

平面向量的基本定理及坐标运算

一、平面向量基本定理与坐标表示

1. 知识讲解

平面向量基本定理

如果 $\vec{e}_1$ 、 $\vec{e}_2$ 是同一平面内的两个不同向量共线，那么对于这一平面内的任意向量 $\vec{a}$ ，有且只有一组实数 λ_1 、 λ_2 ，使 $\vec{a} = \lambda_1 \vec{e}_1 + \lambda_2 \vec{e}_2$ 。

我们把不共线的非零向量 $\vec{e}_1$ 、 $\vec{e}_2$ 叫做表示这一平面内所有向量的一组基底。

【补充说明】

(1) 同一平面内，只要是一组不共线的非零向量，都可以作为基底，基底不同，那么同一向量对基底的分解结果就是不同的。

(2) 平面内任意一个向量都可以用该平面内的一组不共线的非零向量线性表示，这是平面向量基本定理的语言表述。

(3) 若给定了基底，那么分解形式是唯一的，也就是说，当 $\vec{a}$ 、 $\vec{e}_1$ 、 $\vec{e}_2$ 给定，则 λ_1 、 λ_2 有唯一解。

(4) 平面向量基本定理拓展：

对于平面内任意三个不共线的向量中，任何一个向量都可表示为其余两个向量的线性组合且形式唯一。

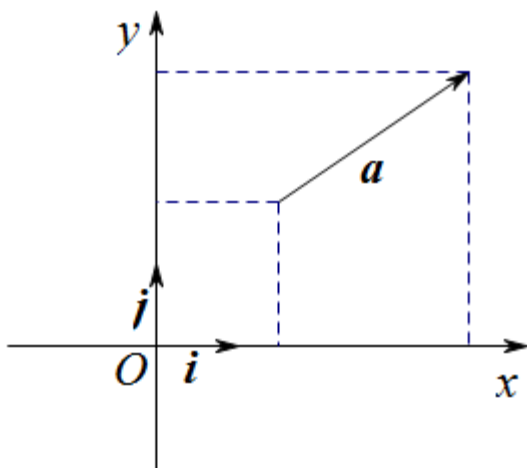
向量的正交分解

由平面向量的基本定理，对平面上的任意向量 $\vec{a}$ ，均可以分解为不共线的两个向量 $\lambda_1 \vec{a}_1$ 和 $\lambda_2 \vec{a}_2$ ，使 $\vec{a} = \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2$ 。

在不共线的两个向量中，垂直是一种重要的情形。把一个向量分解为两个互相垂直的向量，叫做把向量正交分解。

平面向量的坐标表示

如下图：



在平面直角坐标系中，分别取与 x 轴、 y 轴方向相同的两个单位向量 $\vec{i}$ 、 $\vec{j}$ 作为基底．

对于平面内的一个向量 $\vec{a}$ ，由平面向量基本定理可知，有且只有一对实数 x 、 y ，

使得： $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j}$ ①

这样，平面内的任一向量 $\vec{a}$ 都可以由 x 、 y 唯一确定，我们把有序数对 (x, y) 叫做向量 $\vec{a}$ 的坐标，

记作： $\vec{a} = (x, y)$ ②

其中 x 叫做 $\vec{a}$ 在 x 轴上的坐标， y 叫做 $\vec{a}$ 在 y 轴上的坐标，②式叫做向量的坐标表示．

显然， $\vec{i} = (1, 0)$ ， $\vec{j} = (0, 1)$ ， $\vec{0} = (0, 0)$ ．

注意

- (1)向量的坐标与表示向量的有向线段的起点、终点的具体位置无关，只与其相对位置有关.
- (2)当向量确定以后，向量的坐标就是唯一确定的，向量在平移前后坐标不变.
- (3)相等向量的坐标是相同的，但是起点和终点的坐标却不一定相同.

2. 例题精讲

例1

1. 设点 O 是平行四边形 $ABCD$ 两条对角线的交点，给出下列向量组：

① $\vec{AD}$ 与 $\vec{AB}$ ；② $\vec{DA}$ 与 $\vec{BC}$ ；③ $\vec{CA}$ 与 $\vec{DC}$ ；④ $\vec{OD}$ 与 $\vec{OB}$ ．

其中可作为该平面其他向量基底的是（ ）．

- A. ①② B. ①③ C. ①④ D. ③④

【答案】 B

【解析】 可作为平面向量基底的两个向量需要满足不共线，
而①③ 组向量不共线，②④组向量共线，

∴其中可作为该平面其他向量基底的是①③.

故选B.

【标注】【知识点】基底的判断

2. 在下列向量组中, 可以把向量 $\vec{a} = (3, 2)$ 表示出来的是 ().

A. $\vec{e}_1 = (0, 0), \vec{e}_2 = (1, 2)$

B. $\vec{e}_1 = (-1, 2), \vec{e}_2 = (5, -2)$

C. $\vec{e}_1 = (3, 5), \vec{e}_2 = (6, 10)$

D. $\vec{e}_1 = (2, -3), \vec{e}_2 = (-2, 3)$

【答案】B

【解析】排除A项: 若 $\vec{e}_1 = (-1, 2), \vec{e}_2 = (5, -2)$,

设存在实数 λ, μ , 使得 $\vec{a} = \lambda \vec{e}_1 + \mu \vec{e}_2$,

$$\text{则 } (3, 2) = \lambda(-1, 2) + \mu(5, -2),$$

$$\text{所以 } \begin{cases} 3 = -\lambda + 5\mu \\ 2 = 2\lambda - 2\mu \end{cases},$$

$$\text{解得 } \begin{cases} \lambda = 2 \\ \mu = 1 \end{cases}, \text{ 则 } \vec{a} = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2,$$

符合题意; 易知C, D项为共线向量, 排除C, D项.

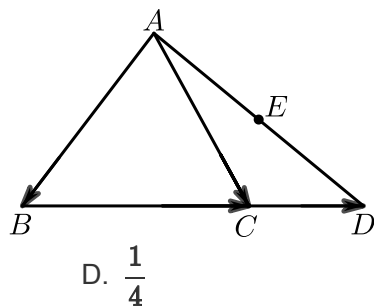
故选B.

【标注】【知识点】平面向量的正交分解及坐标表示; 坐标表示平面向量的共线

例2

3. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 D 是 BC 延长线上一点, 点 E 为线段 AD 的中点, 若 $\vec{BC} = 2\vec{CD}$, 且

$$\vec{AE} = \lambda \vec{AB} + \frac{3}{4} \vec{AC}, \text{ 则 } \lambda = ().$$



A. $-\frac{1}{3}$

B. $\frac{1}{3}$

C. $-\frac{1}{4}$

D. $\frac{1}{4}$

【答案】C

【解析】 $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$
 $= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD})$
 $= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC})$
 $= \frac{1}{2}\left[\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})\right]$
 $= \frac{3}{4}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}.$
 故选：C.

【标注】【知识点】平面向量基本定理及其意义；向量分解中的待定系数法

3. 课堂巩固

练1

4. 如果 $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ 是平面内一组不共线的向量，那么下列四组向量中，不能作为平面内所有向量的一组基底的是（ ）.
- A. $\vec{e}_1$ 与 $\vec{e}_1 + \vec{e}_2$
 B. $\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2$ 与 $\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$
 C. $\vec{e}_1 + \vec{e}_2$ 与 $\vec{e}_1 - \vec{e}_2$
 D. $\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2$ 与 $-\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$

【答案】D

【解析】基底的要求是不能共线，

D选项：

$$\because \vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 = -(-\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2),$$

$$\therefore \vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 \text{ 与 } -\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 \text{ 共线.}$$

【标注】【知识点】平面向量基本定理及其意义；平面向量线性运算综合（非坐标）

5. 已知 $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ 是平面内两个不共线的向量，给出下列四个命题：
- ① $\lambda\vec{e}_1 + \mu\vec{e}_2 (\lambda, \mu \in \mathbf{R})$ 可以表示平面内的所有向量；
 ②对于平面内的任意向量 $\vec{a}$ ，使 $\vec{a} = \lambda\vec{e}_1 + \mu\vec{e}_2$ 的实数 λ, μ 有无数对；
 ③若向 $\lambda_1\vec{e}_1 + \mu_1\vec{e}_2$ 与 $\lambda_2\vec{e}_1 + \mu_2\vec{e}_2$ 共线，则有且只有一个实数 λ ，使得 $\lambda_1\vec{e}_1 + \mu_1\vec{e}_2 = \lambda(\lambda_2\vec{e}_1 + \mu_2\vec{e}_2)$ ；
 ④若存在实数 λ, μ ，使 $\lambda\vec{e}_1 + \mu\vec{e}_2 = \vec{0}$ ，则 $\lambda = \mu = 0$ ，

其中假命题的是() .

A. ①②

B. ②③

C. ③④

D. 仅②

【答案】 B

【解析】 根据共面向量基本定理知①是真命题，②是假命题；

根据共线向量基本定理，若

$$\lambda_2 \vec{e}_1 + \mu_2 \vec{e}_2 = \vec{0}, \lambda_1 \vec{e}_1 + \mu_1 \vec{e}_2 \neq \vec{0},$$

则不存在 λ 使

$$\lambda_1 \vec{e}_1 + \mu_1 \vec{e}_2 = \lambda(\lambda_2 \vec{e}_1 + \mu_2 \vec{e}_2),$$

所以③是假命题；

若 λ, μ 有一个不为0，不妨设 λ 不等于0，则：

$$\vec{e}_1 = -\frac{\mu}{\lambda} \vec{e}_2;$$

$\therefore \vec{e}_1, \vec{e}_2$ 共线，这与 $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ 不共线矛盾，

$$\therefore \lambda = \mu = 0.$$

故选B .

【标注】 【知识点】 平面向量基本定理及其意义

练2

6. 已知在 $\triangle ABC$ 中， $\vec{AR} = 2\vec{RB}$ ， $\vec{CP} = 2\vec{PR}$ ，若 $\vec{AP} = m\vec{AB} + n\vec{AC}$ ，则 $m + n = ()$.

A. 1

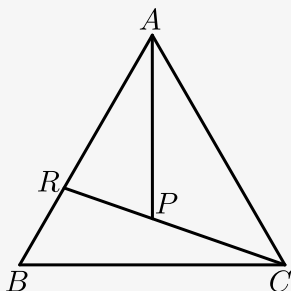
B. $\frac{8}{9}$

C. $\frac{7}{9}$

D. $\frac{2}{3}$

【答案】 C

【解析】



$$\begin{aligned}\vec{AP} &= m\vec{AB} + n\vec{AC} \\ &= m \cdot \frac{3}{2}\vec{AR} + n\vec{AC} \\ &= \frac{3}{2}m\vec{AR} + n\vec{AC},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \frac{RP}{RC} &= \frac{1}{3}, \frac{PC}{RC} = \frac{2}{3}, \\ \therefore \overrightarrow{AP} &= \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AR}, \\ \therefore n &= \frac{1}{3}, \frac{3}{2}m = \frac{2}{3}, \\ \therefore m &= \frac{4}{9}, \\ \therefore m + n &= \frac{1}{3} + \frac{4}{9} = \frac{7}{9}.\end{aligned}$$

故选C.

【标注】【知识点】平面向量基本定理及其意义；向量系数求值问题

二、平面向量的坐标运算

1. 知识讲解

平面向量的坐标运算

若 $\vec{a} = (x_1, y_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2)$, 则

$$(1) \vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2),$$

$$(2) \vec{a} - \vec{b} = (x_1 - x_2, y_1 - y_2),$$

$$(3) \lambda \vec{a} = (\lambda x_1, \lambda y_1)$$

$$(4) \vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2,$$

$$(5) |\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$(6) \vec{a} // \vec{b} \Leftrightarrow x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0,$$

$$(7) \vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow x_1 x_2 + y_1 y_2 = 0,$$

$$(8) \cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2}},$$

另外, 对于 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 根据向量的减法运算, 则 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$, 因此, 一个向量的坐标等于表示此向量的有向线段的终点的坐标减去始点的坐标.

2. 例题精讲

例1

7. 已知 $\overrightarrow{AB} = (3, 4)$, A 点坐标为 $(-2, -1)$, 则 B 点坐标为 ().

A. $(5, 5)$

B. $(-5, -5)$

C. $(1, 3)$

D. $(-5, 5)$

【答案】 C

【解析】 设 $B(x, y)$,

$$\text{又 } \overrightarrow{AB} = (x, y) - (-2, -1) = (x+2, y+1) = (3, 4),$$

$$\text{则 } \begin{cases} x+2=3 \\ y+1=4 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases}.$$

故选C.

【标注】 【知识点】 平面向量的正交分解及坐标表示；平面向量线性运算综合（非坐标）

8. 已知向量 $\vec{a} = (2, 3)$, $\vec{b} = (-1, 0)$, 那么 $\vec{a} - 2\vec{b} =$ _____.

【答案】 (4, 3)

【解析】 由坐标运算 $\vec{a} - 2\vec{b} = (2, 3) - 2(-1, 0) = (4, 3)$, 故答案为：(4, 3).

【标注】 【知识点】 平面向量加、减、数乘的坐标运算

9. 已知向量 $\vec{a} = (2, 1)$, $\vec{b} = (1, -2)$, 若 $m\vec{a} + n\vec{b} = (9, -8)(m, n \in \mathbf{R})$, 则 $m - n$ 的值为_____.

【答案】 -3

【解析】 由 $m\vec{a} + n\vec{b} = (9, -8)$, 故 $\begin{cases} 2m+n=9 \\ m-2n=-8 \end{cases}$,
解得 $\begin{cases} m=2 \\ n=5 \end{cases}$, 故 $m - n = -3$.

【标注】 【知识点】 平面向量线性运算综合（非坐标）；平面向量加、减、数乘的坐标运算

例2

10. 已知向量 $\vec{a} = (1, -2)$, 则与 $\vec{a}$ 平行的单位向量的坐标为().

- A. $\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}\right)$
B. $\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}\right)$ 或 $\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}, -\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$
C. $\left(\frac{\sqrt{5}}{5}, -\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$
D. $\left(\frac{\sqrt{5}}{5}, -\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$ 或 $\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$

【答案】 D

【解析】 已知向量 $\vec{a} = (1, -2)$,

设与 $\vec{a}$ 平行的单位向量是 $(m, -2m)$,

则 $m^2 + (-2m)^2 = 1$, 解得: $m = \pm \frac{\sqrt{5}}{5}$,

故该单位向量的坐标是 $\left(\frac{\sqrt{5}}{5}, -\frac{2}{5}\sqrt{5}\right)$ 或 $\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{2}{5}\sqrt{5}\right)$.

故选: D.

【标注】 【知识点】 坐标表示平面向量的垂直; 坐标表示平面向量的共线

11. 已知 $A(1, 2)$, $B(3, 7)$, $\vec{a} = (x, -1)$, $\vec{AB} // \vec{a}$, 则 ().

- A. $x = \frac{2}{5}$, 且 $\vec{AB}$ 与 $\vec{a}$ 方向相同
- B. $x = -\frac{2}{5}$, 且 $\vec{AB}$ 与 $\vec{a}$ 方向相同
- C. $x = \frac{2}{5}$, 且 $\vec{AB}$ 与 $\vec{a}$ 方向相反
- D. $x = -\frac{2}{5}$, 且 $\vec{AB}$ 与 $\vec{a}$ 方向相反

【答案】 D

【解析】 $A(1, 2)$, $B(3, 7)$,

可得 $\vec{AB} = (2, 5)$,

$\vec{a} = (x, -1)$, $\vec{AB} // \vec{a}$,

可得 $5x = -2$, 解得 $x = -\frac{2}{5}$.

$\vec{a} = \left(-\frac{2}{5}, -1\right)$, 与 $\vec{AB}$ 方向相反.

【标注】 【知识点】 坐标表示平面向量的共线; 平面向量加、减、数乘的坐标运算

【素养】 数学运算

例3

12. 已知向量 $\vec{a} = (4, 1)$, $\vec{b} = (-5, 2)$.

- (1) 若 $(\vec{a} + \vec{b}) // (m\vec{a} - \vec{b})$, 求实数 m 的值.
- (2) 若 $(\vec{a} + \vec{b}) \perp (m\vec{a} - \vec{b})$, 求实数 m 的值.

【答案】 (1) $m = -1$.

(2) $m = -11$.

【解析】 (1) $\vec{a} + \vec{b} = (-1, 3)$,

$$m\vec{a} - \vec{b} = (4m + 5, m - 2),$$

$$\therefore (\vec{a} + \vec{b}) // (m\vec{a} - \vec{b}),$$

$$\therefore \frac{4m + 5}{-1} = \frac{m - 2}{3},$$

$$\therefore 12m + 15 = -m + 2,$$

$$13m = -13,$$

$$m = -1.$$

故答案为： $m = -1$.

$$(2) \therefore (\vec{a} + \vec{b}) \perp (m\vec{a} - \vec{b}),$$

$$\therefore -4m - 5 + 3m - 6 = 0.$$

$$\therefore m = -11.$$

故答案为： $m = -11$.

【标注】【知识点】坐标表示平面向量的共线；坐标表示平面向量的垂直；平面向量数量积运算（非坐标）

例4

13. 已知两点 $A(3, -4)$, $B(-9, 2)$ 在直线 AB 上, 在直线 AB 上求一点 P , 使 $|\vec{AP}| = \frac{1}{3}|\vec{AB}|$.

【答案】 $(-1, -2)$ 或 $(7, -6)$.

【解析】 设点 P 的坐标为 (x, y) ,

$$\textcircled{1} \text{ 若点 } P \text{ 在线段 } AB \text{ 上, 则 } \vec{AP} = \frac{1}{2}\vec{PB}.$$

$$\therefore (x - 3, y + 4) = \frac{1}{2}(-9 - x, 2 - y),$$

$$\text{解得 } x = -1, y = -2,$$

$$\therefore \text{点 } P \text{ 的坐标为 } (-1, -2).$$

$$\textcircled{2} \text{ 若点 } P \text{ 在线段 } BA \text{ 的延长线上, 则 } \vec{AP} = -\frac{1}{4}\vec{PB},$$

$$\therefore (x - 3, y + 4) = -\frac{1}{4}(-9 - x, 2 - y),$$

$$\text{解得 } x = 7, y = -6,$$

$$\therefore \text{点 } P \text{ 的坐标为 } (7, -6).$$

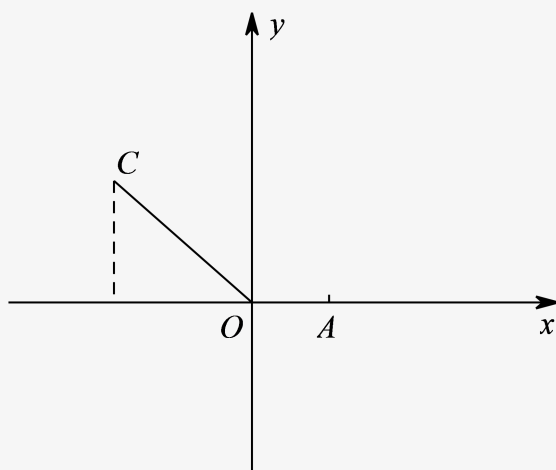
综上可得点 P 的坐标为 $(-1, -2)$ 或 $(7, -6)$.

【标注】【知识点】平面向量加、减、数乘的坐标运算；平面向量的加法运算及运算规则；平面向量线性运算综合（非坐标）；平面向量中的三点共线问题；向量的模

14. 已知两点 $A(1, 0)$, $B(1, \sqrt{3})$, O 为坐标原点, 点 C 在第二象限, 且 $\angle AOC = 120^\circ$, 设 $\overrightarrow{OC} = -2\overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{OB} (\lambda \in \mathbf{R})$, 则 $\lambda = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 1

【解析】 如图,



设 $|OC| = c$, 根据 $\angle AOC = 120^\circ$;

$$\therefore C\left(-\frac{1}{2}c, \frac{\sqrt{3}}{2}c\right);$$

$\therefore$ 由 $\overrightarrow{OC} = -2\overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{OB}$ 及 A, B 点坐标得:

$$\left(-\frac{1}{2}c, \frac{\sqrt{3}}{2}c\right) = -2(1, 0) + \lambda(1, \sqrt{3});$$

$$\therefore \begin{cases} -\frac{1}{2}c = \lambda - 2 \\ \frac{\sqrt{3}}{2}c = \sqrt{3}\lambda \end{cases};$$

解得 $\lambda = 1$.

故答案为: 1 .

【标注】【知识点】平面向量加、减、数乘的坐标运算

15. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A = 90^\circ$, $AB = 1$, $AC = 2$. 设点 P, Q 满足 $\overrightarrow{AP} = \lambda\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AQ} = (1 - \lambda)\overrightarrow{AC}$, $\lambda \in \mathbf{R}$. 若 $\overrightarrow{BQ} \cdot \overrightarrow{CP} = -2$, 则 $\lambda = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $\frac{2}{3}$

【解析】 由题意知，可建系解决. 如 $A(0,0)$ ， $B(1,0)$ ， $C(0,2)$ ，故设 $P(x,y)$ ，

$$\text{得 } \overrightarrow{AP} = \lambda \overrightarrow{AB} \Rightarrow P(\lambda, 0); \overrightarrow{AQ} = (1-\lambda)\overrightarrow{AC} \Rightarrow Q(0, 2(1-\lambda)),$$

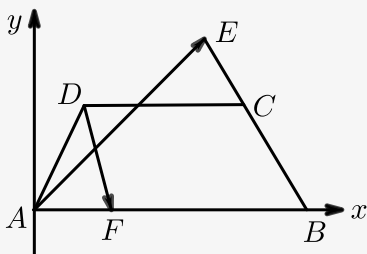
$$\text{故 } \overrightarrow{BQ} \cdot \overrightarrow{CP} = -2 \Rightarrow (-1, 2(1-\lambda)) \cdot (\lambda, -2) = 2 \Rightarrow 3\lambda = 2 \Rightarrow \lambda = \frac{2}{3}.$$

【标注】 【知识点】 平面向量的正交分解及坐标表示

16. 在等腰梯形中， $AB \parallel CD$ ， $AB = 2$ ， $AD = 1$ ， $\angle DAB = 60^\circ$ ，若 $\overrightarrow{BC} = 3\overrightarrow{CE}$ ， $\overrightarrow{AF} = \lambda \overrightarrow{AB}$ ，且 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{DF} = -1$ ，则 $\lambda = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $\frac{1}{4}$

【解析】 如图，



以 A 为坐标原点，建立平面直角坐标系，

$$\text{由已知可得 } A(0,0), D\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), F(2\lambda, 0),$$

$$B(2,0), \left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

设 $E(m,n)$ ，

$$\text{则 } \overrightarrow{BC} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \overrightarrow{CE} = \left(m - \frac{3}{2}, n - \frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

$$\text{由 } \overrightarrow{BC} = 3\overrightarrow{CE},$$

$$\text{得 } \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \left(3m - \frac{9}{2}, 3n - \frac{3\sqrt{3}}{2}\right),$$

$$\text{可得 } m = \frac{4}{3}, n = \frac{2\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore E\left(\frac{4}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right),$$

$$\text{则 } \overrightarrow{AE} = \left(\frac{4}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right), \overrightarrow{DF} = \left(2\lambda - \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

$$\text{由 } \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{DF} = -1,$$

$$\text{得 } \frac{4}{3} \left(2\lambda - \frac{1}{2}\right) - \frac{2\sqrt{3}}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = -1,$$

$$\text{解得 } \lambda = \frac{1}{4} .$$

$$\text{故答案为: } \frac{1}{4} .$$

【标注】【知识点】平面向量加、减、数乘的坐标运算

3. 课堂巩固

练1

17. 已知点 $A(1, -2)$, $B(2, 0)$, 则 $\overrightarrow{BA} = (\quad)$.

A. $(1, -2)$

B. $(-1, -2)$

C. $(-1, 2)$

D. $(1, 2)$

【答案】B

【解析】 $\because A(1, -2), B(2, 0)$,

$$\therefore \overrightarrow{BA} = (1 - 2, -2 - 0),$$

$$\text{即 } \overrightarrow{BA} = (-1, -2).$$

故选B.

【标注】【知识点】平面向量的正交分解及坐标表示

18. 已知向量 $\vec{a} = (2, 4)$, $\vec{b} = (-1, 1)$, 则 $2\vec{a} - \vec{b} = (\quad)$.

A. $(5, 7)$

B. $(5, 9)$

C. $(3, 7)$

D. $(3, 9)$

【答案】A

【解析】根据向量的坐标运算可得: $2\vec{a} - \vec{b} = (4, 8) - (-1, 1) = (5, 7)$,

故选A.

【标注】【知识点】平面向量加、减、数乘的坐标运算

19. 已知 $\vec{a} = (5, -2)$, $\vec{b} = (-4, -3)$, $\vec{c} = (x, y)$, 若 $\vec{a} - 2\vec{b} + 3\vec{c} = \vec{0}$, 则 $\vec{c}$ 等于 $(\quad)$.

A. $\left(-\frac{13}{3}, -\frac{4}{3}\right)$

B. $\left(1, \frac{8}{3}\right)$

C. $\left(\frac{13}{3}, \frac{8}{3}\right)$

D. $\left(\frac{14}{3}, \frac{4}{3}\right)$

【答案】 A

【解析】 由题知： $\vec{a} = (5, -2)$ ， $\vec{b} = (-4, -3)$ ， $\vec{c} = (x, y)$ ，

因为 $\vec{a} - 2\vec{b} + 3\vec{c} = \vec{0}$ ，

$$\text{所以} \begin{cases} 5 + 8 + 3x = 0 \\ -2 + 6 + 3y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{13}{3} \\ y = -\frac{4}{3} \end{cases},$$

$$\text{故} \vec{c} = \left(-\frac{13}{3}, -\frac{4}{3}\right),$$

故选A.

【标注】 【知识点】 平面向量加、减、数乘的坐标运算；平面向量线性运算综合（非坐标）

练2

20. 已知点 $A(1, 3)$ ， $B(4, -1)$ ，则与向量 $\overrightarrow{AB}$ 同方向的单位向量为（ ）.

A. $\left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$

C. $\left(-\frac{3}{4}, \frac{4}{5}\right)$

B. $\left(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)$

D. $\left(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$

【答案】 A

【解析】 $\overrightarrow{AB} = (3, -4) = 5 \times \left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$.

故选A.

【标注】 【知识点】 坐标表示平面向量的垂直；坐标表示平面向量的共线

21. 已知向量 $\vec{a} = (1, 0)$ ， $\vec{b} = (0, 1)$ ， $\vec{c} = k\vec{a} + \vec{b}$ ($k \in \mathbf{R}$)， $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$ ，如果 $\vec{c} // \vec{d}$ ，那么（ ）.

A. $k = 1$ 且 $\vec{c}$ 与 $\vec{d}$ 同向

B. $k = 1$ 且 $\vec{c}$ 与 $\vec{d}$ 反向

C. $k = -1$ 且 $\vec{c}$ 与 $\vec{d}$ 同向

D. $k = -1$ 且 $\vec{c}$ 与 $\vec{d}$ 反向

【答案】 D

【解析】 $\vec{a} = (1, 0)$ ， $\vec{b} = (0, 1)$ ，

$$\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} = (1, -1),$$

$$\vec{c} = k\vec{a} + \vec{b} = (k, 0) + (0, 1) = (k, 1),$$

$$\therefore \vec{d} // \vec{c},$$

$$\therefore 1 \times 1 = -1 \times k,$$

$$\therefore k = -1,$$

$$\therefore \vec{c} = (-1, 1) = -(1, -1) = -\vec{d},$$

$$\therefore \vec{c} \text{ 与 } \vec{d} \text{ 反向.}$$

故选D.

【标注】【知识点】平面向量的正交分解及坐标表示

练3

22. 已知向量 $\vec{a} = (1, 2)$, $\vec{b} = (-3, 2)$, 若 $(k\vec{a} + \vec{b}) // (\vec{a} - 3\vec{b})$, 则实数 k 的值为()

A. 3

B. $\frac{1}{3}$

C. $-\frac{1}{3}$

D. -3

【答案】 C

【解析】 $k\vec{a} + \vec{b} = (k-3, 2k+2)$, $\vec{a} - 3\vec{b} = (10, -4)$,

$$\therefore (k\vec{a} + \vec{b}) // (\vec{a} - 3\vec{b}),$$

$$\therefore -4(k-3) - 10(2k+2) = 0, \text{ 解得 } k = -\frac{1}{3}.$$

故选: C.

【标注】【知识点】坐标表示平面向量的垂直; 坐标表示平面向量的共线

23. 设向量 $\vec{a} = (\sqrt{3}, 1)$, $\vec{b} = (2, -2)$, 若 $(\lambda\vec{a} + \vec{b}) \perp (\lambda\vec{a} - \vec{b})$, 则实数 $\lambda = ()$.

A. ± 1

B. 0

C. $\pm\sqrt{2}$

D. ± 2

【答案】 C

【解析】 $\therefore \vec{a} = (\sqrt{3}, 1)$,

$$\vec{b} = (2, -2),$$

$$\therefore |\vec{a}| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2,$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{2},$$

$$\therefore (\lambda\vec{a} + \vec{b}) \perp (\lambda\vec{a} - \vec{b}),$$

$$\begin{aligned} \therefore (\lambda \vec{a} + \vec{b}) \cdot (\lambda \vec{a} - \vec{b}) &= 0, \\ \therefore \lambda^2 \vec{a}^2 - \vec{b}^2 &= 0, \\ \therefore \lambda^2 |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 &= 0, \\ \therefore 4\lambda^2 &= 8, \\ \therefore \lambda &= \pm\sqrt{2}. \end{aligned}$$

故选C.

【标注】【知识点】平面向量线性运算综合（非坐标）；利用数量积解决向量垂直问题（非坐标运算）；坐标表示平面向量的垂直；平面向量加、减、数乘的坐标运算

24. 已知向量 $\vec{a} = (1, 2)$, $\vec{b} = (2, \lambda)$, $\vec{c} = (-3, 2)$.

- (1) 若 $\vec{a} + 2\vec{b}$ 与 $\vec{c}$ 共线, 求实数 λ 的值.
 (2) 若 $k\vec{a} + \vec{c}$ 与 $\vec{a} - 2\vec{c}$ 垂直, 求实数 k 的值.

【答案】 (1) $-\frac{8}{3}$.
 (2) $\frac{25}{3}$.

【解析】 (1) $\vec{a} + 2\vec{b} = (5, 2 + 2\lambda)$,

若 $\vec{a} + 2\vec{b}$ 与 $\vec{c}$ 共线,

$$\text{则 } \frac{5}{-3} = \frac{2 + 2\lambda}{2},$$

$$\therefore \lambda = -\frac{8}{3}.$$

(2) $k\vec{a} + \vec{c} = (k - 3, 2k + 2)$,

$$\vec{a} - 2\vec{c} = (7, 2),$$

$\therefore k\vec{a} + \vec{c}$ 与 $\vec{a} - 2\vec{c}$ 垂直,

$$\therefore (k\vec{a} + \vec{c}) \cdot (\vec{a} - 2\vec{c}) = 0,$$

$$\text{即 } (k - 3) \times 7 + (2k + 2) \times (-2) = 0,$$

$$\therefore k = \frac{25}{3}.$$

【标注】【知识点】坐标表示平面向量的共线；坐标表示平面向量的垂直；利用投影解决平面向量的数量积；向量的投影；向量的数量积的定义；平面向量数量积运算（非坐标）；利用数量积解决向量垂直问题（非坐标运算）

练4

25.

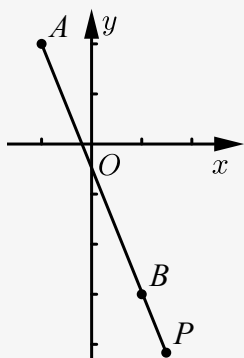
- 已知点 $A(-1, 2)$, $B(1, -3)$, 点 P 在线段 AB 的延长线上, 且 $\frac{|\overrightarrow{AP}|}{|\overrightarrow{PB}|} = 3$, 则点 P 的坐标为 ().
- A. $\left(3, -\frac{11}{2}\right)$ B. $\left(\frac{1}{2}, -\frac{11}{4}\right)$
 C. $\left(2, -\frac{11}{2}\right)$ D. $\left(\frac{1}{2}, -\frac{7}{4}\right)$

【答案】 C

【解析】

点 $A(-1, 2)$, $B(1, -3)$, 点 P 在线段 AB 的延长线上, 且 $\frac{|\overrightarrow{AP}|}{|\overrightarrow{PB}|} = 3$,

如图所示:



设点 P 的坐标为 (x, y) , 则

$$\overrightarrow{AP} = (x + 1, y - 2), \overrightarrow{PB} = (1 - x, -3 - y).$$

$$\text{且 } \frac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{PB}} = -3,$$

$$\text{即 } \begin{cases} x + 1 = -3(1 - x) \\ y - 2 = -3(-3 - y) \end{cases},$$

$$\text{解得 } x = 2, y = -\frac{11}{2},$$

$$\therefore \text{点 } P \text{ 为 } \left(2, -\frac{11}{2}\right).$$

故选: C.

【标注】【知识点】利用平面向量求解坐标

26. 在平面直角坐标系中, O 为坐标原点, 已知两点 $A(1, 0)$, $B(1, 1)$, 且 $\angle BOP = 90^\circ$. 设

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{OB} (k \in \mathbf{R}), \text{ 则 } |\overrightarrow{OP}| = ().$$

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$
 C. $\sqrt{2}$ D. 2

【答案】 B

【解析】 $\angle BOP = 90^\circ$ ，所以 P 点在 $y = -x$ 这条直线上运动，

因此可假设 $P(x, -x)$ ，所以有 $\begin{cases} x = 1 + k \\ -x = k \end{cases}$ ，

所以 $x = \frac{1}{2}$ ，所以 $|\overrightarrow{OP}| = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，

故选 B。

【标注】 【知识点】 平面向量加、减、数乘的坐标运算

27. 已知 $A(-3, 0)$ ， $B(0, 2)$ ， O 为坐标原点，点 C 在 $\angle AOB$ 内，且 $\angle AOC = 45^\circ$ ，设

$\overrightarrow{OC} = \lambda \overrightarrow{OA} + (1 - \lambda) \overrightarrow{OB} (\lambda \in \mathbf{R})$ 则 $\lambda = ()$ 。

A. $\frac{2}{5}$

B. $\frac{1}{3}$

C. $\frac{1}{5}$

D. $\frac{2}{3}$

【答案】 A

【解析】 根据已知条件得 A, B, C ，三点共线，并且 $\angle AOC = \angle BOC = 45^\circ$ ，在 $y = -x$ 线上。

设 $C(x, -x)$ ， $\because A(-3, 0), B(0, 2)$ 。

$\therefore \overrightarrow{OC} = (x, -x)$ ， $\overrightarrow{OA} = (-3, 0)$ ， $\overrightarrow{OB} = (0, 2)$ 。

$\lambda \overrightarrow{OA} + (1 - \lambda) \overrightarrow{OB} = (-3\lambda, 2 - 2\lambda)$ 。

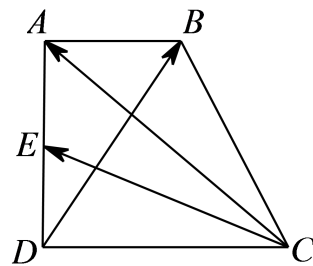
$\begin{cases} x = -3\lambda \\ -x = 2 - 2\lambda \end{cases} \Rightarrow \lambda = \frac{2}{5}$ 。

故选 A。

【标注】 【知识点】 坐标表示平面向量的垂直

28. 如图，在直角梯形 $ABCD$ 中， $AB \parallel DC$ ， $AD \perp DC$ ， $AD = DC = 2AB$ ， E 为 AD 的中点，若

$\overrightarrow{CA} = \lambda \overrightarrow{CE} + \mu \overrightarrow{DB}$ ，则 $\lambda + \mu$ 的值为 $()$ 。



A. $\frac{6}{5}$

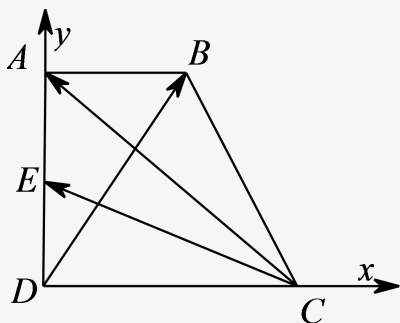
B. $\frac{8}{5}$

C. 2

D. $\frac{8}{3}$

【答案】 B

【解析】 如图，以 D 为原点， DC 为 x 轴， DA 为 y 轴建立平面直角坐标.



设 $AB = 1$ ， $DC = 2$.

则 $D(0,0)$ ， $E(0,1)$ ， $C(2,0)$ ， $A(0,2)$ ， $B(1,2)$.

$\therefore \overrightarrow{CA} = (-2, 2)$ ， $\overrightarrow{CE} = (-2, 1)$ ， $\overrightarrow{DB} = (1, 2)$.

$\therefore \overrightarrow{CA} = \lambda \overrightarrow{CE} + \mu \overrightarrow{DB}$.

$\therefore (-2, 2) = (-2\lambda + \mu, \lambda + 2\mu)$.

$\therefore \lambda = \frac{6}{5}$ ， $\mu = \frac{2}{5}$.

$\therefore \lambda + \mu = \frac{8}{5}$.

故选B .

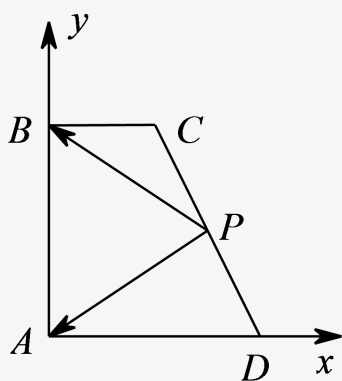
【标注】 【知识点】 平面向量加、减、数乘的坐标运算

三、 综合练习

29. 在直角梯形 $ABCD$ 中，已知 $BC \parallel AD$ ， $AB \perp AD$ ， $AB = AD = 4$ ， $BC = 2$ ，若 P 为线段 CD 上一点，且满足 $\overrightarrow{DP} = \lambda \overrightarrow{DC}$ ， $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = 5$ ，则 λ 的值为 _____ .

【答案】 $\frac{1}{2}$

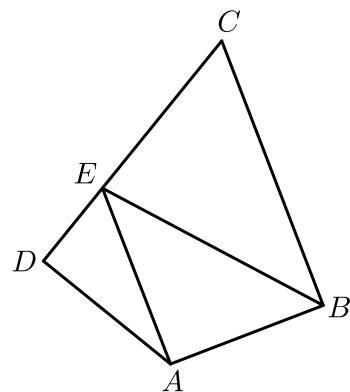
【解析】 如图，建立平面直角坐标系：



$$\begin{aligned}
 &A(0,0), B(0,4), C(2,4), D(4,0), \\
 &\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{PD} + \overrightarrow{DA} \\
 &= \lambda \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} \\
 &= \lambda(2, -4) + (-4, 0) \\
 &= (2\lambda - 4, -4\lambda), \\
 &\text{而 } \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{CB} \\
 &= (1 - \lambda) \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB} \\
 &= (1 - \lambda)(-2, 4) + (-2, 0) \\
 &= (2\lambda - 4, 4 - 4\lambda), \\
 &\therefore \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = (2\lambda - 4)^2 - 4\lambda(4 - 4\lambda) = 5, \\
 &\therefore \lambda = \frac{11}{10} \text{ 或 } \frac{1}{2}, \\
 &\text{又 } \because \lambda \in [0, 1], \\
 &\therefore \lambda = \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

【标注】【知识点】建系法求平面向量的数量积

30. 如图，在平面四边形 $ABCD$ 中， $AB \perp BC$ ， $AD \perp CD$ ， $\angle BAD = 120^\circ$ ， $AB = AD = 1$ ，若点 E 为边 CD 上的动点，则 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BE}$ 的最小值为（ ）。



A. $\frac{21}{16}$

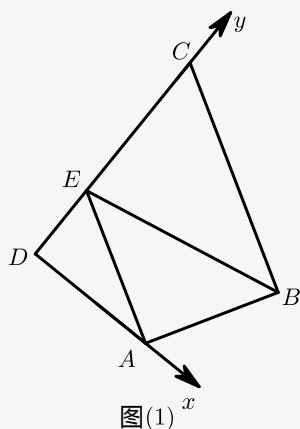
B. $\frac{3}{2}$

C. $\frac{25}{16}$

D. 3

【答案】A

【解析】方法一：以 D 为坐标原点， DA 所在直线为 x 轴， DC 所在直线为 y 轴，建立如图(1)所示的平面直角坐标系：



此时 $D(0,0)$ ， $A(1,0)$ ， $B\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ， $C(0, \sqrt{3})$ ，

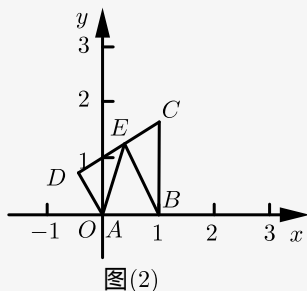
设 E 点坐标为 $(0, y)$ ，其中 $y \in [0, \sqrt{3}]$ ，

则 $\overrightarrow{AE} = (-1, y)$ ， $\overrightarrow{BE} = \left(-\frac{3}{2}, y - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ，则

$\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BE} = \frac{3}{2} + y^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}y = \left(y - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2 + \frac{21}{16}$ ，所以 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BE}$ 的最小值为 $\frac{21}{16}$ ，故选

A.

方法二：以点 A 为坐标原点，以 AB 所在的直线为 x 轴，建立如图(2)所示的平面直角坐标系，



依题意得， $A(0,0)$ ， $B(1,0)$ ，

因为 $AD = 1$ ， $\angle BAD = 120^\circ$ ，

所以 $D\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ，且直线 CD 的倾斜角为 30° ，

所以直线 CD 的方程为 $y - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(x + \frac{1}{2}\right)$ ，即 $y = \frac{\sqrt{3}}{3}(x + 2)$ ，

因为 $AB \perp BC$ ，代入 $x = 1$ ，得 $y = \sqrt{3}$ ，

所以点 C 的坐标为 $(1, \sqrt{3})$,

因为点 E 为边 CD 上的动点, 故可设 $E\left(t, \frac{\sqrt{3}}{3}(t+2)\right)$, $-\frac{1}{2} \leq t \leq 1$,

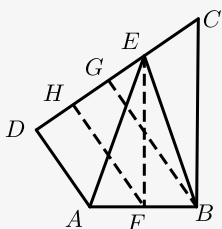
所以 $\overrightarrow{AE} = \left(t, \frac{\sqrt{3}}{3}(t+2)\right)$, $\overrightarrow{BE} = \left(t-1, \frac{\sqrt{3}}{3}(t+2)\right)$,

所以 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BE} = t(t-1) + \left[\frac{\sqrt{3}}{3}(t+2)\right]^2 = \frac{4}{3}\left(t + \frac{1}{8}\right)^2 + \frac{21}{16}$,

所以当 $t = -\frac{1}{8}$ 时, $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BE}$ 取得最小值, 最小值为 $\frac{21}{16}$.

故选A.

方法三: 如图(3), 取 AB 的中点 F , 连接 EF ,



图(3)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BE} &= \overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{EB} = (\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FA}) \cdot (\overrightarrow{EF} - \overrightarrow{FA}) \\ &= |\overrightarrow{EF}|^2 - |\overrightarrow{FA}|^2 = |\overrightarrow{EF}|^2 - \frac{1}{4},\end{aligned}$$

可知当且仅当 $|\overrightarrow{EF}|$ 最小时, $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BE}$ 取得最小值, 分别过 F, B 作 CD 的垂线, 垂足分别为 H, G ,

当点 E 与 H 重合时, $|\overrightarrow{EF}|$ 取到最小值, 易知此时 EF 为梯形 $DABG$ 的中位线 HF ,

由已知得 $BG = \frac{3}{2}$, $AD = 1$,

$$\text{则 } |\overrightarrow{EF}|_{\min} = HF = \frac{1}{2}(BG + AD) = \frac{5}{4},$$

故 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BE}$ 的最小值为 $\frac{21}{16}$.

故选A.

方法四: 连接 BD , 可知 $\triangle ABD$ 为等腰三角形,

又 $AB \perp BC$, $AD \perp CD$, 所以 $\triangle BCD$ 为等边三角形, $BD = \sqrt{3}$,

设 $\overrightarrow{DE} = t\overrightarrow{DC}$ ($0 \leq t \leq 1$),

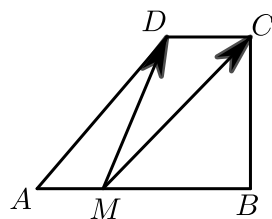
则 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BE}$

$$\begin{aligned}&= (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE}) \cdot (\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DE}) \\ &= \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DE} \cdot (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BD}) + \overrightarrow{DE}^2 \\ &= \frac{3}{2} + \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{DE}^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 3t^2 - \frac{3}{2}t + \frac{3}{2} \\
 &= 3\left(t - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{21}{16} \quad (0 \leq t \leq 1). \\
 &\text{所以当 } t = \frac{1}{4} \text{ 时, 上式取最小值 } \frac{21}{16}, \\
 &\text{故选 A.}
 \end{aligned}$$

【标注】【知识点】平面向量的正交分解及坐标表示

31. 如图, 在梯形 $ABCD$ 中, $AB \parallel DC$, $AB = AD = 5$, $DC = 2$, $BC = 4$, M 为 AB 边上一点, 则 $\overrightarrow{MD} \cdot \overrightarrow{MC}$ 的最小值为 ().



A. 10

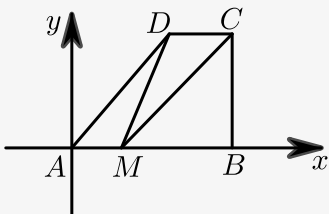
B. 12

C. 15

D. 16

【答案】C

【解析】方法一：建立直角坐标系如图：



设 $M(m, 0) (0 \leq m \leq 5)$,

又 $\because D(3, 4), C(5, 4), A(0, 0), B(5, 0)$,

$\therefore \overrightarrow{MD} = (3 - m, 4), \overrightarrow{MC} = (5 - m, 4)$,

$\therefore \overrightarrow{MD} \cdot \overrightarrow{MC} = (3 - m)(5 - m) + 16$,

$= m^2 - 8m + 31$,

$\therefore$ 当 $m = 4$ 时, 取最小值 15.

故选 C.

方法二：连接 BD .

$\because CD \parallel AB$,

$\therefore \angle CDB = \angle DBA$,

$\therefore \cos \angle CDB = \cos \angle DBA$,

由余弦定理可知,

$$\cos \angle CDB = \frac{4 + BD^2 - 16}{2 \cdot 2 \cdot BD} = \cos \angle DBA = \frac{BD^2 + 25 - 25}{2 \cdot BD \cdot 5},$$

$$\therefore BD^2 = 20, \text{ 即 } BD = 2\sqrt{5},$$

$$\text{又} \because CD^2 + BC^2 = BD^2,$$

$$\therefore \angle BCD = 90^\circ, \text{ 即 } \angle CBA = 90^\circ,$$

方法 I : 建坐标系, BA 作 x 轴, BC 作 y 轴,

设 $M(m, 0)$, $C(0, 4)$, $D(2, 4)$, $A(5, 0)$,

$$\overrightarrow{MD} = (2 - m, 4), \overrightarrow{MC} = (-m, 4),$$

$$\therefore \overrightarrow{MD} \cdot \overrightarrow{MC} = -2m + m^2 + 16 = (m - 1)^2 + 15,$$

$$\therefore m \in [0, 5],$$

$$\therefore \overrightarrow{MD} \cdot \overrightarrow{MC} \text{ 的最小值为 } 15.$$

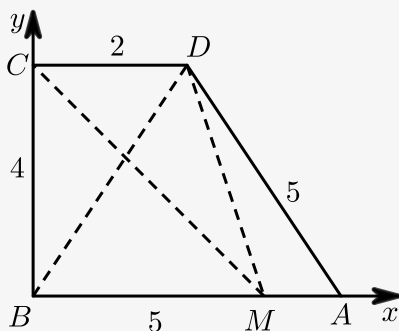
$$\begin{aligned} \text{方法 II, } \overrightarrow{MD} \cdot \overrightarrow{MC} &= (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}) \cdot (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC}) \\ &= |\overrightarrow{MB}|^2 + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{BC} + |\overrightarrow{BC}|^2 + \overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{BC} \\ &= |\overrightarrow{MB}|^2 + 0 - 2|\overrightarrow{MB}| + 0 + 16 + 0 \\ &= |\overrightarrow{MB}|^2 - 2|\overrightarrow{MB}| + 16 = (|\overrightarrow{MB}| - 1)^2 + 15. \end{aligned}$$

$\therefore M$ 是 AB 上一点,

$$\therefore |\overrightarrow{MB}| \in [0, 5],$$

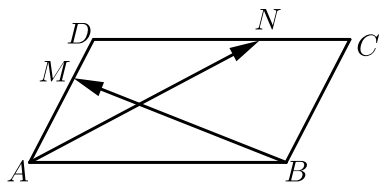
$$\therefore \overrightarrow{MD} \cdot \overrightarrow{MC} \text{ 的最小值为 } 15.$$

故选 C.



【标注】【知识点】数量积的坐标表达式；平面向量数量积运算（非坐标）

32. 如图, 在平行四边形 $ABCD$ 中, $\angle BAD = \frac{\pi}{3}$, $AB = 2$, $AD = 1$, 若 M 、 N 分别是边 AD 、 CD 上的点, 且满足 $\frac{MD}{AD} = \frac{NC}{DC} = \lambda$, 其中 $\lambda \in [0, 1]$, 则 $\overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{BM}$ 的取值范围是 () .



A. $[-3, -1]$

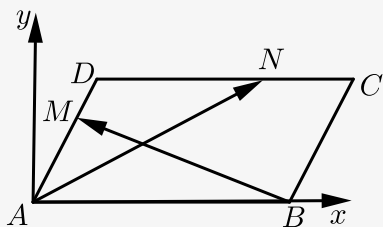
B. $[-3, 1]$

C. $[-1, 1]$

D. $[1, 3]$

【答案】 A

【解析】



建立如图所示的以 A 为原点，

AB ， AD 所在直线为 x ， y 轴的直角坐标系，

则 $B(2, 0)$ ， $A(0, 0)$ ， $D\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ，

$\therefore$ 满足 $\frac{MD}{AD} = \frac{NC}{DC} = \lambda$ ， $\lambda \in [0, 1]$ ，

$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN} = \overrightarrow{AD} + (1 - \lambda)\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AD} + (1 - \lambda)\overrightarrow{AB}$ ，

$= \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + (1 - \lambda)(2, 0)$ ，

$= \left(\frac{5}{2} - 2\lambda, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ，

$\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{AB} + (1 - \lambda)\overrightarrow{AD}$ ，

$= (-2, 0) + (1 - \lambda)\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ，

$= \left(-\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\lambda, \frac{\sqrt{3}}{2}(1 - \lambda)\right)$ ，

则 $\overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{BM} = \left(\frac{5}{2} - 2\lambda, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \left(-\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\lambda, \frac{\sqrt{3}}{2}(1 - \lambda)\right)$ ，

$= \left(\frac{5}{2} - 2\lambda\right)\left(-\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\lambda\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}(1 - \lambda)$ ，

$= \lambda^2 + \lambda - 3 = \left(\lambda + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{13}{4}$ ，

因为 $\lambda \in [0, 1]$ ，二次函数的对称轴为： $\lambda = -\frac{1}{2}$ ，

则 $[0, 1]$ 为增区间，

故当 $\lambda \in [0, 1]$ 时， $\lambda^2 + \lambda - 3 \in [-3, -1]$ 。

故选：A .

【标注】【知识点】线性运算和数量积综合问题；数量积的坐标表达式