

平面向量数量积习题

一、选填题

1. 若单位向量 $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$, 则向量 $\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2$ 与向量 $\vec{e}_1$ 的夹角为() .
- A. $\frac{\pi}{2}$ B. $\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{\pi}{4}$ D. $\frac{\pi}{6}$

【答案】 A

【解析】 $(\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2) \cdot \vec{e}_1 = \vec{e}_1^2 - 2\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = 1 - 2 \times \frac{1}{2} = 0$,
 $\therefore (\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2) \perp \vec{e}_1$,
 $\therefore$ 向量 $\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2$ 与向量 $\vec{e}_1$ 的夹角为 $\frac{\pi}{2}$,
故选A .

【标注】 【知识点】 单位向量；向量的夹角的判断；平面向量数量积运算（非坐标）；向量的数量积的定义；利用向量数量积求夹角

2. 已知 $|\vec{b}| = 3$, $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 方向上的投影向量的模长是 $\frac{2}{3}$, 则 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ 为_____ .

【答案】 2或-2 .

【解析】 因为 $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 方向上的投影向量的模长是 $\frac{2}{3}$,
所以 $|\vec{a}| \cdot \cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \frac{2}{3}$ 或 $-\frac{2}{3}$,
又 $|\vec{b}| = 3$,
所以 $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \frac{2}{3} \times 3 = 2$ 或 -2 .
故答案为：2或-2 .

【标注】 【知识点】 向量的投影；平面向量数量积运算（非坐标）；利用投影解决平面向量的数量积；向量的数量积的定义

3. 已知 $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 3$, 且 $\vec{a} \cdot \vec{b} = -12$, 则向量 $\vec{a}$ 在向量 $\vec{b}$ 上的投影等于() .
- A. $\frac{12}{5}$ B. 4
C. -4 D. $-\frac{12}{5}$

【答案】D

【解析】 $\because \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$
而 $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 上的投影为 $|\vec{a}| \cdot \cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$
 $\therefore |\vec{a}| \cdot \cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{-12}{3} = -4$

【标注】【知识点】向量的投影；利用投影解决平面向量的数量积

4. 已知 $\vec{a}, \vec{b}$ 为单位向量, 且 $(2\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{b} = 0$, 则向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 的夹角为().
A. 30° B. 60° C. 90° D. 120°

【答案】B

【解析】 $(2\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{b} = 0$,
则 $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \theta$
 $= \cos \theta$,
 $\therefore \theta = 60^\circ$.
故选B.

【标注】【知识点】利用向量数量积求夹角；向量的夹角的判断

5. 已知平面向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 夹角为 $\frac{\pi}{6}$, 且 $\vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = 6, |\vec{a}| = \sqrt{3}$, 则 $|\vec{b}|$ 等于().
A. $\sqrt{3}$ B. $2\sqrt{3}$ C. 1 D. 2

【答案】D

【解析】因为 $\vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = 6$,
所以 $\vec{a}^2 + \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, 即 $|\vec{a}|^2 + |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \frac{\pi}{6} = 6$,
所以 $3 + \sqrt{3} |\vec{b}| \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 6$, 解得 $|\vec{b}| = 2$,
选D.

【标注】【知识点】向量的数量积的定义；利用向量数量积求模长

6. 若向量 $|\vec{a}| = \sqrt{2}, |\vec{b}| = 2, (\vec{a} - \vec{b}) \perp \vec{a}$, 则向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角等于 ____ .

【答案】 $\frac{\pi}{4}$

【解析】 设向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 夹角为 θ ,

$$\because |\vec{a}| = \sqrt{2}, |\vec{b}| = 2, (\vec{a} - \vec{b}) \perp \vec{a},$$

$$\therefore (\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{a} = \vec{a} \cdot \vec{a} - \vec{a} \cdot \vec{b}$$

$$= |\vec{a}|^2 - |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$$

$$= 2 - 2\sqrt{2} \cos \theta$$

$$= 0,$$

$$\text{解得 } \cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\theta \text{ 为 } \frac{\pi}{4},$$

所以向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{4}$.

【标注】 【知识点】 向量的夹角的判断；利用向量数量积求夹角；向量的数量积的定义；利用数量积解决向量垂直问题（非坐标运算）

7. 已知向量 $\vec{a}$ 与向量 $\vec{b}$ 夹角为 $\frac{\pi}{6}$, 且 $|\vec{a}| = \sqrt{3}$, $\vec{a} \perp (\vec{a} - 2\vec{b})$, 则 $|\vec{b}| = (\quad)$.

A. $\sqrt{3}$

B. $2\sqrt{3}$

C. 1

D. 2

【答案】 C

【解析】 $\vec{a} \cdot (\vec{a} - 2\vec{b}) = 0,$

$$(\vec{a})^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} = 0,$$

$$3 - 2 \cdot \sqrt{3} \cdot |\vec{b}| \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 0,$$

$$|\vec{b}| = 1.$$

故选C.

【标注】 【知识点】 向量的数量积的定义；利用向量数量积求模长；线性运算和数量积综合问题

8. 已知向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 满足 $(\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot (a - b) = -6$, 且 $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$, 则 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 _____.

【答案】 $\frac{\pi}{3}$

【解析】 $(a + 2b)(a - b) = a^2 + ab - 2b^2 = 1 - 2 \cdot 2^2 + 2 \cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$

$$= 2 \cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle - 7 = -6,$$

$$\cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \frac{1}{2},$$

故 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$.

【标注】【知识点】向量的夹角的判断；向量的数量积的定义；利用向量数量积求夹角

9. 若 $\vec{a}, \vec{b}$ 均为非零向量，且 $(\vec{a} - 2\vec{b}) \perp \vec{a}, (\vec{b} - 2\vec{a}) \perp \vec{b}$ ，则 $\vec{a}, \vec{b}$ 的夹角为 _____.

【答案】 $\frac{\pi}{3}$

【解析】 因为 $\vec{a}, \vec{b}$ 均为非零向量，且 $(\vec{a} - 2\vec{b}) \perp \vec{a}, (\vec{b} - 2\vec{a}) \perp \vec{b}$ ，
 所以 $(\vec{a} - 2\vec{b}) \perp \vec{a} = 0, (\vec{b} - 2\vec{a}) \perp \vec{b} = 0$.
 所以 $\vec{a}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} = 0, \vec{b}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.
 所以 $\vec{a}^2 = \vec{b}^2$.

$$\text{所以 } \cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \frac{\vec{a}^2}{2|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{1}{2},$$

所以夹角为 $\frac{\pi}{3}$.

【标注】【知识点】向量的夹角的判断；利用向量数量积求夹角

10. 在 $\triangle ABC$ 中， M 是 BC 的中点， $AM = 1$ ，点 P 在 AM 上且满足 $\vec{AP} = 2\vec{PM}$ ，则

$\vec{AP} \cdot (\vec{PB} + \vec{PC})$ 等于 ().

A. $\frac{4}{9}$

B. $\frac{4}{3}$

C. $-\frac{4}{3}$

D. $-\frac{4}{9}$

【答案】 A

【解析】 如图：

因为 M 是 BC 的中点，根据向量加法的

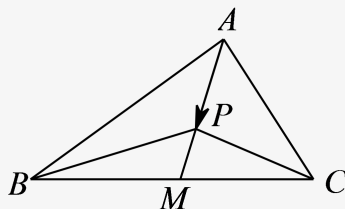
几何意义， $\vec{PB} + \vec{PC} = 2\vec{PM}$ ，

又 $\vec{AP} = 2\vec{PM}$ ，

所以

$$\vec{AP} \cdot (\vec{PB} + \vec{PC}) = \vec{AP}^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}.$$

故选：A.



【标注】【知识点】平面向量基本定理及其意义

11. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A = 60^\circ$, $AB = 3$, $AC = 2$, 若 $\overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AE} = \lambda\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$ ($\lambda \in \mathbf{R}$), 且 $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AE} = -4$, 则 λ 的值为 _____.

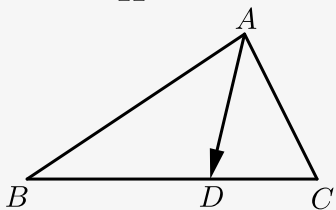
【答案】 $\frac{3}{11}$

【解析】 因为 $\overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{DC}$, 所以

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC},$$
 因为

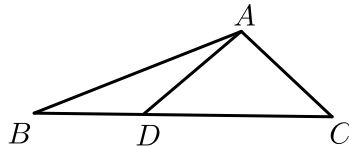
$\overrightarrow{AE} = \lambda\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$, 且 $\angle A = 60^\circ$, $AB = 3$, $AC = 2$, 所以

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AE} &= \left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}\right) \cdot (\lambda\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) \\ &= -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}^2 + \frac{2}{3}\lambda\overrightarrow{AC}^2 + \left(\frac{1}{3}\lambda - \frac{2}{3}\right)\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \\ &= -\frac{1}{3} \times 9 + \frac{2}{3}\lambda \times 4 + \left(\frac{1}{3}\lambda - \frac{2}{3}\right) \times 3 \times 2 \times \frac{1}{2} \\ &= -3 + \frac{8}{3}\lambda + \lambda - 2 \\ &= -4, \\ \text{解得 } \lambda &= \frac{3}{11}. \end{aligned}$$



【标注】 【知识点】 平面向量线性运算综合（非坐标）；平面向量数量积的运算律

12. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = 120^\circ$, $AB = 2$, $AC = 1$, D 是边 BC 上的一点, $DC = 2BD$, 则 $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} =$ _____.



【答案】 $-\frac{8}{3}$

【解析】 $\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$,
 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \cos \langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle = -1$,

$$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = \left(\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right) \cdot (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = -\frac{2}{3}|\overrightarrow{AB}|^2 + \frac{1}{3}|\overrightarrow{AC}|^2 + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = -\frac{8}{3}$$

【标注】【知识点】平面向量的加法运算及运算规则；平面向量数量积的运算律；平面向量数量积运算（非坐标）；线性运算和数量积综合问题

二、解答题

13. 已知向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$, 且 $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$, $\vec{a} \perp (\vec{b} - \vec{a})$.

(1) 求向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 的夹角 θ .

(2) 求 $|\vec{a} - 2\vec{b}|$ 的值.

【答案】 (1) $\frac{\pi}{3}$.

(2) $\sqrt{13}$.

【解析】 (1) $\because |\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$, $\vec{a} \perp (\vec{b} - \vec{a})$,

$$\therefore \vec{a} \cdot (\vec{b} - \vec{a}) = \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{a}^2$$

$$= |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta - |\vec{a}|^2$$

$$= 2 \cos \theta - 1$$

$$= 0.$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{1}{2},$$

$\because$ 两向量之间的夹角 $0 \leq \theta \leq \pi$.

$$\therefore \theta = \frac{\pi}{3}.$$

(2) 由 (1) 知 $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cdot \cos \frac{\pi}{3} = 1$,

$$\therefore |\vec{a} - 2\vec{b}|^2 = \vec{a}^2 - 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 4\vec{b}^2$$

$$= 1 - 4 + 16$$

$$= 13.$$

$$\therefore |\vec{a} - 2\vec{b}| = \sqrt{13}.$$

【标注】【知识点】利用向量数量积求夹角；向量的数量积的定义；利用向量数量积求模长；向量的夹角的判断

14. 已知向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 满足 $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 1$, 向量 $\overrightarrow{AB} = 2\vec{a} - \vec{b}$, $\overrightarrow{CD} = \vec{a} + 3\vec{b}$.

(1) 若 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 60° , 求 $|\vec{a} - \vec{b}|$ 的值.

(2) 若 $\vec{AB} \perp \vec{CD}$, 求向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角 θ 的值.

【答案】 (1) $\sqrt{3}$.

(2) $\frac{2\pi}{3}$.

【解析】 (1) 由题意得: $|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{(\vec{a} - \vec{b})^2} = \sqrt{|\vec{a}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}| \cos 60^\circ + |\vec{b}|^2}$
 $= \sqrt{2^2 - 2 \times 2 \times 1 \times \cos 60^\circ + 1}$
 $= \sqrt{3}$.

(2) $\because \vec{AB} \neq \vec{CD}$,
 $\therefore \vec{AB} \cdot \vec{CD} = 0$,
即 $(2\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} + 3\vec{b}) = 0$,
 $2|\vec{a}|^2 + 6\vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{a} \cdot \vec{b} - 3|\vec{b}|^2 = 0$,
 $2|\vec{a}|^2 + 5\vec{a} \cdot \vec{b} - 3|\vec{b}|^2 = 0$,
 $2 \times 2^2 + 5 \times 2 \times 1 \times \cos \theta - 3 \times 1^2 = 0$,
 $\therefore \cos \theta = -\frac{1}{2}$,
 $\because \theta \in [0, \pi]$,
 $\therefore \theta = \frac{2\pi}{3}$.
故答案为: $\frac{2\pi}{3}$.

【标注】 【知识点】向量的夹角的判断；向量的模；平面向量数量积运算（非坐标）；利用向量数量积求夹角；利用向量数量积求模长；向量的数量积的定义

15. 已知平面向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 满足 $|\vec{b}| = 2$, $|\vec{a} + 2\vec{b}| = 2$, $|\vec{a} - 3\vec{b}| = \sqrt{14}$.

(1) 求 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ 的值.

(2) 求向量 $2\vec{a} + \vec{b}$ 在向量 $\vec{b}$ 方向上的投影.

【答案】 (1) 1.

(2) 3.

【解析】 (1) $\because |\vec{a} + 2\vec{b}| = 2$, $|\vec{a} - 3\vec{b}| = \sqrt{14}$,
 $\therefore |\vec{a} + 2\vec{b}|^2 = (\vec{a} + 2\vec{b})^2 = 4$ ①,
 $|\vec{a} - 3\vec{b}|^2 = (\vec{a} - 3\vec{b})^2 = 14$ ②,

联立①②解得： $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1$.

(2) 向量 $2\vec{a} + \vec{b}$ 在向量 $\vec{b}$ 方向上的投影为：

$$\begin{aligned} & \left| 2\vec{a} + \vec{b} \right| \cdot \cos \langle 2\vec{a} + \vec{b}, \vec{b} \rangle \\ &= \left| 2\vec{a} + \vec{b} \right| \cdot \frac{(2\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{b}}{\left| 2\vec{a} + \vec{b} \right| \cdot \left| \vec{b} \right|} \\ &= \frac{(2\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{b}}{\left| \vec{b} \right|} \\ &= \frac{2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2}{\left| \vec{b} \right|} = 3 . \end{aligned}$$

【标注】【知识点】向量的投影；向量的数量积的定义；利用投影解决平面向量的数量积；平面向量数量积运算（非坐标）