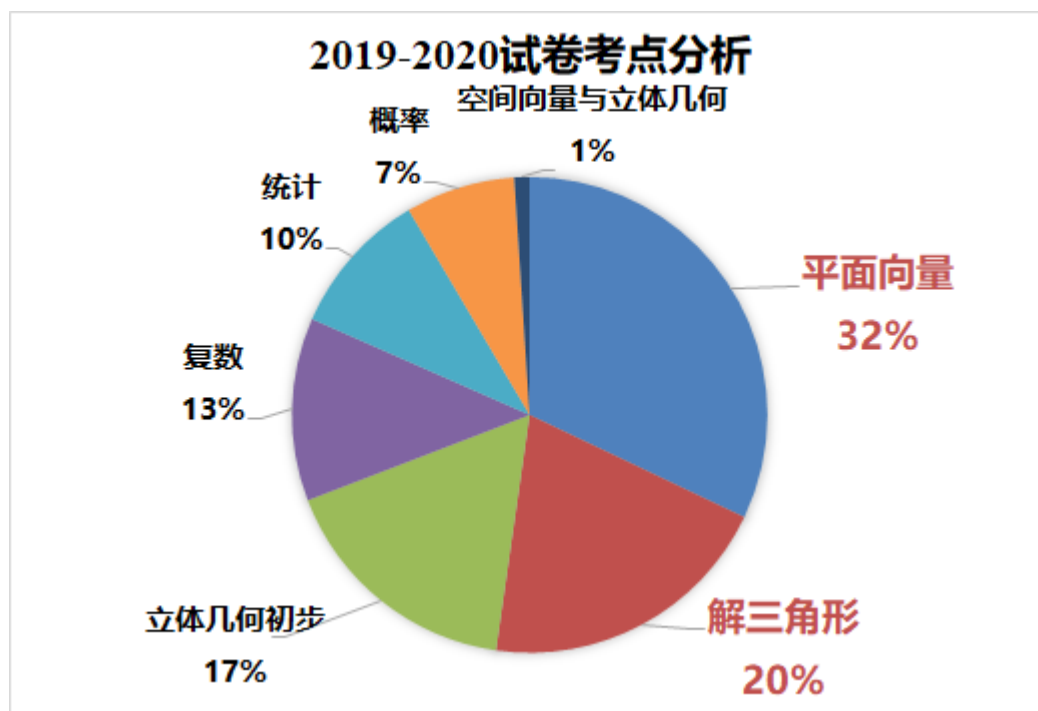


平面向量的概念及其线性运算

1. 考点分析

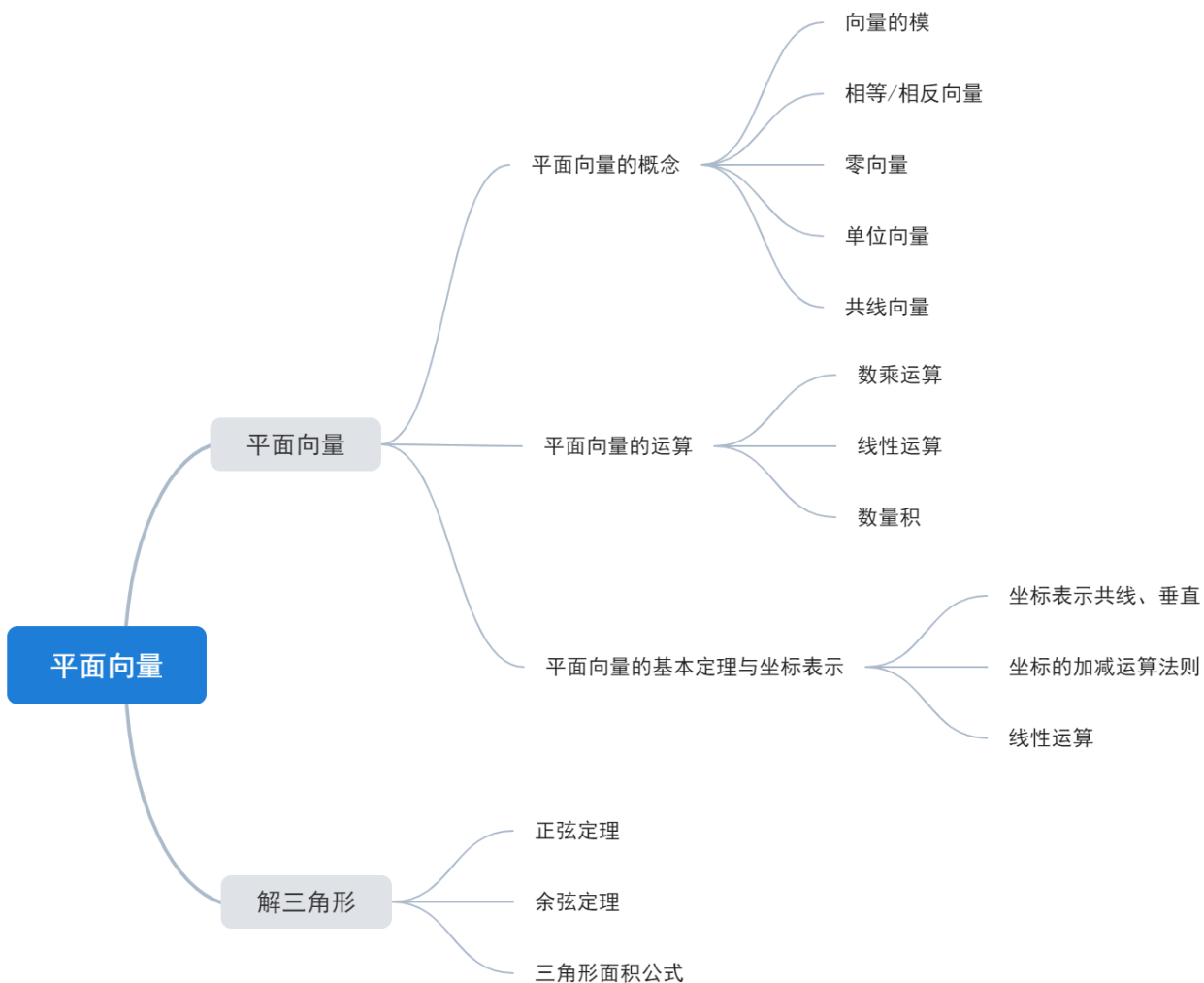
考点占比



考点分析

2019-2020试卷考点分析（50份试卷）			
模块	章节	考点	考察频次
平面向量	平面向量	平面向量的运算	264
		平面向量基本定理及其坐标表示	136
		平面向量的基本概念	133
	解三角形	正弦定理	145
		余弦定理	134
		三角形面积公式	65
		解三角形的实际应用	23

知识梳理



一、平面向量的相关概念

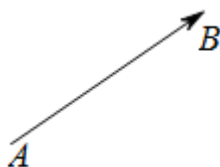
1. 知识讲解

1.向量的概念：平面中有大小、有方向的量.

2.向量的表示：

①几何表示法：用有向线段表示向量，有向线段的方向表示向量的方向，线段的长度表示向量的长度．

②字母表示法： $\vec{AB}$ ，注意起点在前，终点在后．



3.相等和相反向量：

①相等向量（同一向量）：长度相等且方向相同的向量，记作 $\vec{a} = \vec{b}$.

②相反向量：长度相等且方向相反的向量，记作 $\vec{a} = -\vec{b}$.

4.共线或平行向量：

基线：通过有向线段 $\vec{AB}$ 的直线，称为向量 $\vec{AB}$ 的基线 .

如果向量的基线互相平行或重合，则称这些向量共线或平行 .

向量 $\vec{a}$ 平行于向量 $\vec{b}$ ，记作 $\vec{a} // \vec{b}$.

5.零向量：长度等于零的向量，叫做零向量 . 记作： $\vec{0}$.

零向量的方向不确定，零向量与任意向量平行 .

6.单位向量：长度等于1的向量叫做单位向量 .

7.向量的模：向量 $\vec{AB}$ 的大小(或长度)叫做向量的模，记作 $|\vec{AB}|$.

2. 例题精讲

例1

1. 判断下列四个命题：①若 $\vec{a} // \vec{b}$ ，则 $\vec{a} = \vec{b}$ ；②若 $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ ，则 $\vec{a} = \vec{b}$ ；③若 $|\vec{a}| > |\vec{b}|$ ，则 $\vec{a} > \vec{b}$ ；④若 $\vec{a} // \vec{b}$ ， $\vec{b} // \vec{c}$ ，则 $\vec{a} // \vec{c}$. 其中正确的个数是 _____ .

【答案】 1

【解析】 对于①，若 $\vec{a} // \vec{b}$ ，则 $\vec{a} = \vec{b}$ ，显然不正确，向量平行，模与向量的方向不一定相同，所以①不正确；

对于②，若 $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ ，则 $\vec{a} = \vec{b}$ ，显然不正确，因为模相等，方向不一定相同，所以②不正确；

对于③， $|\vec{a}| > |\vec{b}|$ 只能说明 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 模长一样，方向不定，向量不能比较大小， $\therefore$ ③不正确；

对于④，若 $\vec{a} // \vec{b}$ ， $\vec{b} // \vec{c}$ ，则 $\vec{a} // \vec{c}$ ，根据向量共线的传递性可知正确，所以④正确，

$\therefore$ 正确命题的个数为1个 .

【标注】 【知识点】 平面向量概念辨析问题

2. 下列给出的命题正确的是 () .

A. 两个向量的模相等，则这两个向量的长度相等且方向相同或相反

- B. 两个共线的向量，其方向一定相同
- C. 若两个向量不共线，则这两个向量都是非零向量
- D. 两个有共同起点的共线向量，其终点一定相同

【答案】 C

【解析】 A 选项：两个向量模相等，则这两个向量长度相等，且两向量可以呈任意角度，故A错误；

B 选项：两个共线向量，其方向相同或相反，故B错误；

C 选项：若两个向量不共线，则这两个向量都是非零向量，故C正确；

D 选项：两个有共同起点的共线向量，其终点不一定相同，因为两个向量模不一定相同，故D错误；

故选 C .

【标注】【知识点】共线向量；零向量；平面向量概念辨析问题；相等向量与相反向量

3. ①模相等的两个平行向量是相等向量；
 ②若 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 都是单位向量，则 $\vec{a} = \vec{b}$ ；
 ③两个相等向量的模相等；
 ④相等向量一定是共线向量；
 ⑤共线向量一定是相等向量；
 ⑥任一向量与它的相反向量不相等；
 ⑦向量 $\overrightarrow{AB}$ 与向量 $\overrightarrow{CD}$ 是共线向量，则点 A, B, C, D 必在同一条直线上；
 ⑧设 O 是正 $\triangle ABC$ 的中心，则向量 $\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{BO}, \overrightarrow{CO}$ 是模相等的向量；
 ⑨若 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 共线， $\vec{b}$ 与 $\vec{c}$ 共线，则 $\vec{a}$ 与 $\vec{c}$ 也共线 .

正确的个数为 () .

- A. 3 B. 4 C. 5 D. 6

【答案】 A

【解析】 模相等的两个平行向量可能为相反向量，①错误 .

单位向量只是长度相等方向未必相同，②错误 .

共线向量长度未必相等，⑤错误 .

$\vec{0}$ 与它的相反向量 $\vec{0}$ 相等，⑥错误 .

向量 $\overrightarrow{AB}$ 与向量 $\overrightarrow{CD}$ 是共线向量， AB 与 CD 平行或共线，⑦错误；

如果 $\vec{b} = \vec{0}$, 那么 $\vec{a}$ 与 $\vec{c}$ 未必共线, ⑨错误.

【标注】【知识点】共线向量; 平面向量概念辨析问题; 相等向量与相反向量

3. 课堂巩固

练1

4. 下列等式: ① $\vec{0} - \vec{a} = -\vec{a}$, ② $-(-\vec{a}) = \vec{a}$, ③ $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$, ④ $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$,
⑤ $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$, ⑥ $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$. 正确的个数是 ().
- A. 3个 B. 4个 C. 5个 D. 6个

【答案】 C

【解析】 ⑥错, $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$, 不是0;
故选C.

【标注】【知识点】平面向量线性运算综合(非坐标); 相等向量与相反向量

5. 给出下列命题:

- ①两个向量相等, 则它们的起点相同, 终点相同;
②若 $|\vec{a}| = |\vec{b}|$, 则 $\vec{a} = \vec{b}$;
③若 $\vec{AB} = \vec{DC}$, 则 $ABCD$ 为平行四边形;
④在平行四边形 $ABCD$ 中, 一定有 $\vec{AB} = \vec{DC}$;
⑤若 $\vec{m} = \vec{n}$, $\vec{n} = \vec{p}$, 则 $\vec{m} = \vec{p}$.

其中不正确的个数是 ().

- A. 2 B. 3 C. 4 D. 5

【答案】 B

【解析】 ①两向量相等,
 $\therefore$ 它们的长度, 方向相同与起点, 终点无关,
 $\therefore$ ①错;
② $\because |\vec{a}| = |\vec{b}|$,
 $\therefore \vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 长度相同, 但 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 方向任意,
 $\therefore \vec{a}$ 不一定等于 $\vec{b}$,

∴②错；

$$\textcircled{3} \because \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC},$$

∴ $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{DC}$ 方向相同，长度相等，

∴ $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{DC}$ 可能平行，可能共线，

∴ $ABCD$ 不一定是平行四边形，

∴③错；

④在平行四边形中， $AB \parallel DC$ ，

$$\therefore \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC},$$

∴④对；

$$\textcircled{5} \because \vec{m} = \vec{n}, \vec{n} = \vec{p},$$

$$\therefore \vec{m} = \vec{p},$$

∴⑤对．

故选B．

【标注】【知识点】平面向量概念辨析问题

6. 以下命题：① $|\vec{a}|$ 与 $|\vec{b}|$ 是否相等与 $\vec{a}$ ， $\vec{b}$ 的方向无关；②两个具有公共终点的向量，一定是共线向量；③两个向量不能比较大小，但它们的模能比较大小；④单位向量都是共线向量．其中正确命题的个数是（ ）．

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

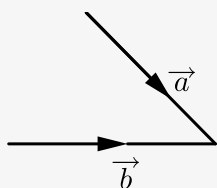
【答案】 C

【解析】 ① $|\vec{a}|$ 与 $|\vec{b}|$ 是否相等取决于 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的模长，与 $\vec{a}$ ， $\vec{b}$ 的方向无关，

∴①对；

②终点一样，不一定共线，

如下图，



∴②错；

③向量有大小，有方向，所以不能比较大小，

它们的模只有大小，没有方向，

所以模可以比较大小．

∴③对；

④单位向量只是模长大小均为1，方向不一定．

∴④错．

故①③对．

故选C．

【标注】【知识点】平面向量概念辨析问题

7. 下列命题正确的是（ ）．

A. 若 $|\vec{a}| = 0$ ，则 $\vec{a} = 0$

B. 若 $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ ，则 $\vec{a} = \vec{b}$ 或 $\vec{a} = -\vec{b}$

C. 若 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 为平行向量，则 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 同向

D. 若 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 为单位向量，则 $|\vec{a}| = |\vec{b}|$

【答案】D

【解析】A、若 $|\vec{a}| = 0$ ，则 $\vec{a} = \vec{0}$ ，所以A错误；

B、设 $\vec{a} = (1, 0)$ ， $\vec{b} = (0, 1)$ ，则 $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$ ，此时 $\vec{a} \perp \vec{b}$ ，所以B错误；

C、若 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 为平行向量，则 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 方向相同或相反，所以C错误；

D、若 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 为单位向量，则 $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$ ，所以D正确．

综上所述，答案选择：D．

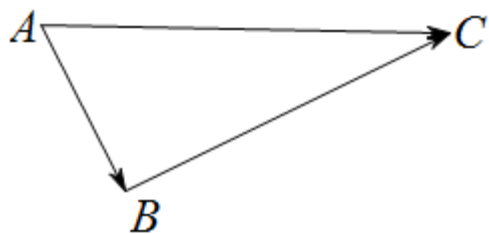
【标注】【知识点】平面向量概念辨析问题

二、平面向量的线性运算

1. 知识讲解

加法

如下图：

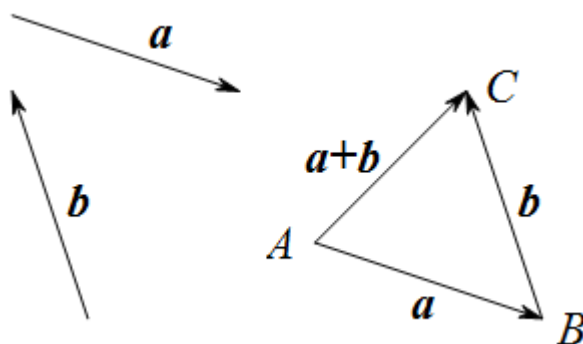


某对象从A点经B点到C点，两次位移 $\overrightarrow{AB}$ 、 $\overrightarrow{BC}$ 的结果，与A点直接到C点的位移 $\overrightarrow{AC}$ 结果相同。

数的加法启发我们，从运算的角度看， $\overrightarrow{AC}$ 可以认为是 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{BC}$ 的和，因此，位移的合成可以看作向量的加法。

(1) 三角形法则：

如下图：



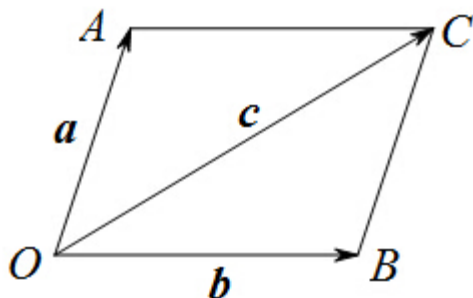
已知非零向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ ，在平面内任取一点A，作 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$ ，则向量 $\overrightarrow{AC}$ 叫做 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的和，记作 $\vec{a} + \vec{b}$ ，即 $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ 。

求两个向量和的运算，叫做向量的加法。这种求向量和的方法，称为向量加法的三角形法则。

位移的合成可以看作向量加法三角形法则的物理模型。

(2) 平行四边形法则：

如下图：



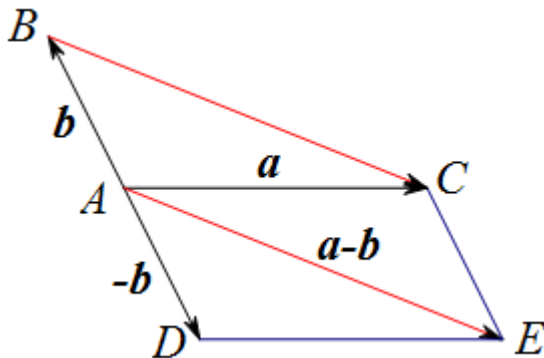
以同一点O为起点的两个已知向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 为邻边作ABCD，则以O为起点的对角线 $\overrightarrow{OC}$ 就是 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的和，我们把这种作两个向量和的方法叫做向量加法的平行四边形法则。

(3) 向量的多边形求和法则：

已知 n 个向量，依次把这 n 个向量首尾相连，以第一个向量的始点为始点，第 n 个向量的终点为终点的向量叫做这个向量的和向量．这个法则叫做向量求和的多边形法则．

减法

如下图：

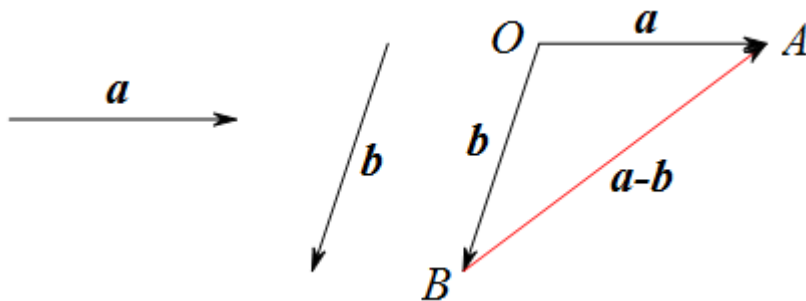


设向量 $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$ ， $\overrightarrow{AC} = \vec{a}$ ，则 $\overrightarrow{AD} = -\vec{b}$ ，由向量减法的定义知，
 $\overrightarrow{AE} = \vec{a} + (-\vec{b}) = \vec{a} - \vec{b}$ ．

又 $\vec{b} + \overrightarrow{BC} = \vec{a}$ ，所以 $\overrightarrow{BC} = \vec{a} - \vec{b}$ ．

由此我们得到 $\vec{a} - \vec{b}$ 的作图方法．

如下图：



已知 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ ，在平面内任取一点 O ，作 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ ，则 $\overrightarrow{BA} = \vec{a} - \vec{b}$ ．即 $\vec{a} - \vec{b}$ 可以表示为从向量 $\vec{b}$ 的终点指向向量 $\vec{a}$ 的终点的向量，这是向量减法的几何意义．

数乘运算

1、定义：实数 λ 与向量 $\vec{a}$ 的积是一个向量，这种运算叫做向量的数乘，记作 $\lambda\vec{a}$ ，且 $|\lambda\vec{a}| = |\lambda||\vec{a}|$ ．
 当 $\lambda > 0$ 时， $\lambda\vec{a}$ 的方向与 $\vec{a}$ 的方向相同；当 $\lambda < 0$ 时， $\lambda\vec{a}$ 的方向与 $\vec{a}$ 的方向相反；当 $\lambda = 0$ 时， $\lambda\vec{a} = \vec{0}$ ．

2、运算法则

设 λ 、 μ 为实数，那么：

$$(1) \lambda(\mu\vec{a}) = (\lambda\mu)\vec{a};$$

$$\begin{aligned}(2) & (\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}; \\(3) & \lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}. \\(4) & (-\lambda)\vec{a} = -(\lambda\vec{a}) = \lambda(-\vec{a}).\end{aligned}$$

2. 例题精讲

例1

8. 计算.

$$\begin{aligned}(1) & (-3) \times 4\vec{a} = \underline{\hspace{2cm}}. \\(2) & 3(\vec{a} + \vec{b}) - 2(\vec{a} - \vec{b}) - \vec{a} = \underline{\hspace{2cm}}. \\(3) & (2\vec{a} + 3\vec{b} - \vec{c}) - (3\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c}) = \underline{\hspace{2cm}}.\end{aligned}$$

【答案】 (1) $-12\vec{a}$

(2) $5\vec{b}$

(3) $-\vec{a} + 5\vec{b} - 2\vec{c}$

【解析】 (1) $(-3) \times 4\vec{a}$

$$= -3 \times 4\vec{a}$$

$$= -12\vec{a}.$$

(2) $3(\vec{a} + \vec{b}) - 2(\vec{a} - \vec{b}) - \vec{a}$

$$= (3\vec{a} + 3\vec{b}) - (2\vec{a} - 2\vec{b}) - \vec{a}$$

$$= 3\vec{a} + 3\vec{b} - 2\vec{a} - 2\vec{b} - \vec{a}$$

$$= (3\vec{a} - 2\vec{a} - \vec{a}) + (3\vec{b} + 2\vec{b})$$

$$= 0 + 5\vec{b}$$

$$= 5\vec{b}.$$

(3) $(2\vec{a} + 3\vec{b} - \vec{c}) - (3\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c})$

$$= 2\vec{a} + 3\vec{b} - \vec{c} - 3\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c}$$

$$= (2\vec{a} - 3\vec{a}) + (3\vec{b} + 2\vec{b}) + (-\vec{c} - \vec{c})$$

$$= -\vec{a} + 5\vec{b} - 2\vec{c}.$$

【标注】【知识点】平面向量的减法运算及运算规则；平面向量线性运算综合（非坐标）；平面向量的加法运算及运算规则；平面向量的数乘运算及运算规则

 例2

9. 下列关于向量知识的选项中, 不正确的为() .

A. $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC}$

B. 单位向量的模长都相等

C. $|\overrightarrow{AO}| - |\overrightarrow{CO}| \leq |\overrightarrow{AC}|$

D. 在平行四边形 $ABCD$ 中, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$

【答案】 D

【解析】 A选项: 由向量的三角形加法运算法则知 $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC}$, 故正确.

B选项: 单位向量的模长都为1, 故正确.

C选项: $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC}| \geq |\overrightarrow{AO}| - |\overrightarrow{CO}|$, 故正确.

D选项: 在平行四边形 $ABCD$ 中, $\overrightarrow{AC}$ 与 $\overrightarrow{BD}$ 不共线, 则 $\overrightarrow{AC} \neq \overrightarrow{BD}$, 故错误.

故选 D.

【标注】【知识点】平面向量基本定理及其意义; 平面向量概念辨析问题

10. 下列各式化简正确的是() .

A. $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DA} = \vec{0}$

B. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB}$

C. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AC} = \vec{0}$

D. $0 \cdot \overrightarrow{AB} = 0$

【答案】 B

【解析】 A选项: $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DA}$
 $= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{DO} + \overrightarrow{DA}$
 $= \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DA} = 2\overrightarrow{DA} \neq \vec{0}$. 故A错误.

B选项: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OM}$
 $= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BM}$
 $= \overrightarrow{AB}$,

故B正确.

$$\begin{aligned}
 \text{C 选项: } & \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AC} \\
 &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC} \\
 &= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC} \\
 &= 2\overrightarrow{AC} \neq \vec{0},
 \end{aligned}$$

故C错误.

$$\text{D 选项: } 0 \cdot \overrightarrow{AB} = \vec{0} \neq 0,$$

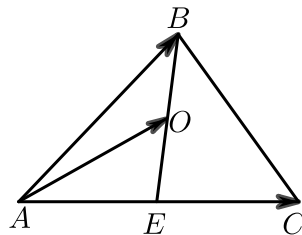
故D错误.

故选B.

【标注】【知识点】平面向量线性运算综合（非坐标）；平面向量的减法运算及运算规则；平面向量的加法运算及运算规则

例3

11. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， BE 是边 AC 的中线， O 是 BE 的中点，若向量 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$ ，则 $\overrightarrow{AO} = (\quad)$.



- A. $\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$
- B. $\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b}$
- C. $\frac{1}{4}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$
- D. $\frac{1}{4}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b}$

【答案】 B

【解析】 $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right)$

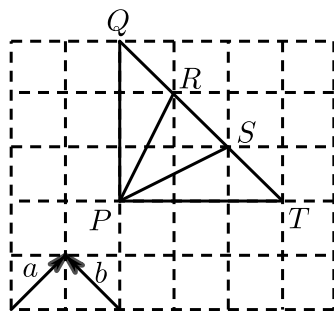
$$\therefore \overrightarrow{AO} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b}.$$

故选B.

【标注】【知识点】平面向量线性运算综合（非坐标）；平面向量的加法运算及运算规则；平面向量的数乘运算及运算规则

12. 如图所示，下列结论正确的是（ ）.

① $\overrightarrow{PQ} = \frac{3}{2}\vec{a} + \frac{3}{2}\vec{b}$; ② $\overrightarrow{PT} = -\frac{3}{2}\vec{a} - \frac{3}{2}\vec{b}$; ③ $\overrightarrow{PS} = \frac{3}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$; ④ $\overrightarrow{PR} = \frac{3}{2}\vec{a} + \vec{b}$.



A. ①②

B. ③④

C. ①③

D. ②④

【答案】 C

【解析】 向量的加法及其几何意义 .

①根据向量的加法法则，可得 $\overrightarrow{PQ} = \frac{3}{2}\vec{a} + \frac{3}{2}\vec{b}$ ，故正确 .

②根据向量的减法法则，可得 $\overrightarrow{PT} = \frac{3}{2}\vec{a} - \frac{3}{2}\vec{b}$ ，故不正确 .

③ $\overrightarrow{PS} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QS} = \frac{3}{2}\vec{a} + \frac{3}{2}\vec{b} - 2\vec{b} = \frac{3}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$ ，故正确 .

④ $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PQ} + \frac{1}{2}\overrightarrow{QS} = \frac{3}{2}\vec{a} + \frac{3}{2}\vec{b} - \vec{b} = \frac{3}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$ ，故不正确 .

故选：C .

【标注】 【知识点】平面向量的加法运算及运算规则；平面向量线性运算综合（非坐标）

13. 已知 $\triangle ABC$ 和点 M 满足 $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$. 若存在实数 m 使得 $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = m\overrightarrow{AM}$ 成立，则 $m = ()$.

A. 2

B. 3

C. 4

D. 5

【答案】 B

【解析】 方法一： $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{AM}$ ，
由 $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$ ，得 $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{AM} = \vec{0}$ ，
即 $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AM}$ ，
故选B .

方法二： $\because \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$ ，

$\therefore$ 点 M 是 $\triangle ABC$ 的重心，

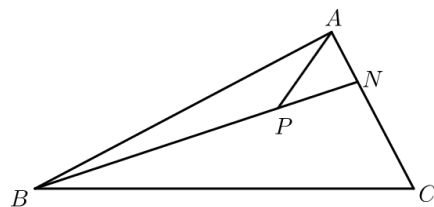
$\therefore \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AM}$ ，

$\therefore m = 3$.

【标注】【知识点】平面向量与三角形的“心”

例4

14. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{NC}$, P 是 BN 上的一点, 若 $\overrightarrow{AP} = m\overrightarrow{AB} + \frac{2}{9}\overrightarrow{AC}$, 则实数 m 的值为 () .



- A. $\frac{1}{9}$ B. $\frac{1}{3}$ C. 1 D. 3

【答案】A

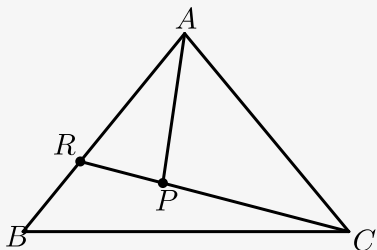
【解析】 $\because \overrightarrow{AN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{NC}$, $\overrightarrow{AP} = m\overrightarrow{AB} + \frac{2}{9}\overrightarrow{AC}$, $\therefore \overrightarrow{AP} = m\overrightarrow{AB} + \frac{8}{9}\overrightarrow{AN}$
 又因为 B, P, N 在同一条直线上, 所以 $m + \frac{8}{9} = 1$, 所以 $m = \frac{1}{9}$.
 故选A.

【标注】【知识点】平面向量的数乘运算及运算规则; 平面向量中的三点共线问题

15. 已知在 $\triangle ABC$ 中, $\vec{AR} = 2\vec{RB}$, $\vec{CP} = 2\vec{PR}$, 若 $\vec{AP} = m\vec{AB} + n\vec{AC}$, 则 $m + n =$ () .
- A. 1 B. $\frac{8}{9}$ C. $\frac{7}{9}$ D. $\frac{2}{3}$

【答案】C

【解析】



$$\begin{aligned}\vec{AP} &= m\vec{AB} + n\vec{AC} \\ &= m \cdot \frac{3}{2}\vec{AR} + n\vec{AC} \\ &= \frac{3}{2}m\vec{AR} + n\vec{AC}, \\ \therefore \frac{RP}{RC} &= \frac{1}{3}, \frac{PC}{RC} = \frac{2}{3}, \\ \therefore \vec{AP} &= \frac{1}{3}\vec{AC} + \frac{2}{3}\vec{AR},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore n &= \frac{1}{3}, \frac{3}{2}m = \frac{2}{3}, \\ \therefore m &= \frac{4}{9}, \\ \therefore m + n &= \frac{1}{3} + \frac{4}{9} = \frac{7}{9}.\end{aligned}$$

【标注】【知识点】平面向量线性运算综合（非坐标）；平面向量的加法运算及运算规则

3. 课堂巩固

练1

16. $(4\vec{a} - 3\vec{b}) + \frac{1}{3}\vec{b} - \frac{1}{4}(6\vec{a} - 7\vec{b}) = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 $\frac{5}{2}\vec{a} - \frac{11}{12}\vec{b}$

【解析】 $(4\vec{a} - 3\vec{b}) + \frac{1}{3}\vec{b} - \frac{1}{4}(6\vec{a} - 7\vec{b}) = \frac{5}{2}\vec{a} - \frac{11}{12}\vec{b}.$

【标注】【知识点】平面向量的加法运算及运算规则

17. 已知 $\vec{a} = 2\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2$, $\vec{b} = \vec{e}_1 - 5\vec{e}_2$, 则 $3\vec{a} - 2\vec{b}$ 等于 ().

- A. $4\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$
- B. $\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$
- C. $4\vec{e}_1 - 19\vec{e}_2$
- D. $4\vec{e}_1 + \vec{e}_2$

【答案】 D

【解析】 $3\vec{a} - 2\vec{b} = 3(2\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2) - 2(\vec{e}_1 - 5\vec{e}_2) = 4\vec{e}_1 + \vec{e}_2.$

故选D.

【标注】【知识点】平面向量的数乘运算及运算规则；平面向量线性运算综合（非坐标）

练2

18. 下列各式不能化简为 $\vec{AD}$ 的是 ().

- A. $(\vec{AB} + \vec{CD}) + \vec{BC}$
- B. $(\vec{AD} + \vec{MB}) + (\vec{BC} + \vec{CM})$

- C. $(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{AD}) - \overrightarrow{BM}$
 D. $(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}) + \overrightarrow{CD}$

【答案】 C

【解析】 A 选项：

$$(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}) + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}.$$

故A正确；

$$\begin{aligned} \text{B 选项：} & (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{MB}) + (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CM}) \\ &= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CM} \\ &= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CM} \\ &= \overrightarrow{AD} + \vec{0} \\ &= \overrightarrow{AD}. \end{aligned}$$

故B正确；

$$\text{C 选项：} (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{AD}) - \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{MB} = 2.$$

所以C不能化简为 $\overrightarrow{AD}$ 。

故C错误；

$$\begin{aligned} \text{D 选项：} & (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}) + \overrightarrow{CD} \\ &= \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{CD} \\ &= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} \\ &= \overrightarrow{AD}. \end{aligned}$$

故D正确；

故选 C。

【标注】【知识点】平面向量线性运算综合（非坐标）；平面向量的减法运算及运算规则；平面向量的加法运算及运算规则

19.

已知平面上不共线的四点 O, A, B, C ，若 $\overrightarrow{OA} - 3\overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OC} = \vec{0}$ ，则 $\frac{|\overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{BC}|} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【答案】 2

【解析】 因为 $\overrightarrow{OA} - 3\overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OC} = \vec{0}$,
 所以 $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = 2(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB})$,
 所以 $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{BC}$,
 所以 $\frac{|\overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{BC}|} = 2$,
 故答案为 : 2 .

【标注】 【知识点】平面向量的减法运算及运算规则 ; 平面向量的加法运算及运算规则 ; 平面向量线性运算综合 (非坐标)

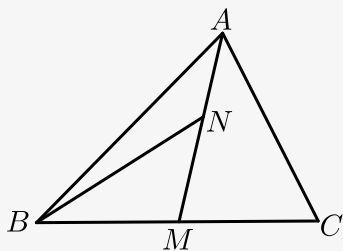
练3

20. 在 $\triangle ABC$ 中 , AM 为 BC 边上的中线 , 点 N 满足 $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{NM}$, 则 $\overrightarrow{BN} = (\quad)$.

- A. $\frac{1}{6}\overrightarrow{AC} - \frac{5}{6}\overrightarrow{AB}$
- B. $\frac{5}{6}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{6}\overrightarrow{AB}$
- C. $\frac{1}{6}\overrightarrow{AC} + \frac{5}{6}\overrightarrow{AB}$
- D. $\frac{5}{6}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AB}$

【答案】 A

【解析】 $\because AM$ 为 BC 边上的中线 , 点 N 满足 $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{NM}$,



$$\begin{aligned}\therefore \overrightarrow{BN} &= \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{MA}, \\ &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) - \frac{2}{3} \times \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{6}\overrightarrow{AC} - \frac{5}{6}\overrightarrow{AB}.\end{aligned}$$

故选 A .

【标注】 【知识点】平面向量基本定理及其意义 ; 平面向量线性运算综合 (非坐标)

21. 设 P 是 $\triangle ABC$ 内一点 , 且 $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{CP} = \vec{0}$, $\overrightarrow{BD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$, 则 $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AP} = (\quad)$.

- A. $\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$
 B. $\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$
 C. $\frac{4}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$
 D. $\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

【答案】 A

【解析】 $\because \overrightarrow{BP} = \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CP} = \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{CP} = \vec{0},$
 $\therefore 3\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC},$ 即 $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}.$
 $\therefore \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC},$
 $\therefore \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}.$

故选A.

【标注】 【知识点】 平面向量的数乘运算及运算规则；平面向量的减法运算及运算规则；平面向量的加法运算及运算规则；平面向量线性运算综合（非坐标）

22. 在 $\triangle ABC$ 中, D, E, F 分别 BC, CA, AB 的中点, 点 M 是 $\triangle ABC$ 的重心, 则

$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}$ 等于().

- A. $\vec{0}$
 B. $4\overrightarrow{MD}$
 C. $4\overrightarrow{ME}$
 D. $4\overrightarrow{MF}$

【答案】 D

【解析】 $\because$ 点 M 是 $\triangle ABC$ 的重心, F 是 AB 中点,
 $\therefore \overrightarrow{MF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CM},$
 $\therefore \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MF},$
 $\therefore \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MF} + \overrightarrow{CM} = 4\overrightarrow{MF}.$

故选D.

【标注】 【知识点】 平面向量的加法运算及运算规则；平面向量线性运算综合（非坐标）

练4

23. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 D 是 AB 边上一点, 若 $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{CD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA} + \lambda\overrightarrow{CB},$ 则 $\lambda =$ ().

A. $\frac{2}{3}$

B. $\frac{1}{3}$

C. $-\frac{1}{3}$

D. $-\frac{2}{3}$

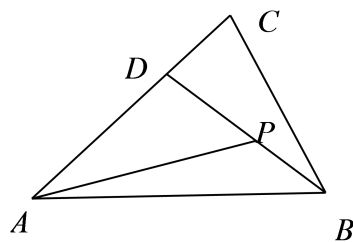
【答案】 A**【解析】** 方法一：由 $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{DB}$ 得 $\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CA} = 2(\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD})$ ，即 $\overrightarrow{CD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$

所以 $\lambda = \frac{2}{3}$.

方法二：因为

$$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CA} + \frac{2}{3}(\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{CB},$$

所以 $\lambda = \frac{2}{3}$.

【标注】 【知识点】平面向量的数乘运算及运算规则；平面向量线性运算综合（非坐标）；平面向量的加法运算及运算规则24. 如图,在 $\triangle ABC$ 中, $\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BD}$,若 $\overrightarrow{AP} = \lambda\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{AC}$,则 $\lambda + \mu$ 的值为() .

A. $\frac{8}{9}$

B. $\frac{4}{9}$

C. $\frac{8}{3}$

D. $\frac{4}{3}$

【答案】 A**【解析】** $\because \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BP}, \overrightarrow{BP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BD}$,

$$\therefore \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BD},$$

$$\because \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC},$$

$$\therefore \overrightarrow{BD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB},$$

$$\therefore \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right) = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{9}\overrightarrow{AC},$$

$$\because \overrightarrow{AP} = \lambda\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{AC},$$

$$\therefore \lambda = \frac{2}{3}, \mu = \frac{2}{9},$$

$$\text{则 } \lambda + \mu = \frac{2}{3} + \frac{2}{9} = \frac{8}{9},$$

故选：A .

【标注】【知识点】平面向量基本定理及其意义；平面向量线性运算综合（非坐标）

三、共线向量定理及推论

1. 知识讲解

共线基本定理

向量共线的判定定理：

对于向量 $\vec{b}$ ($\vec{b} \neq \vec{0}$)、 $\vec{a}$ ，如果有一个实数 λ ，使 $\vec{a} = \lambda \vec{b}$ ，那么由向量数乘的定义知， $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 共线。

向量共线的性质定理：

向量 $\vec{b}$ ($\vec{b} \neq \vec{0}$) 与 $\vec{a}$ 共线，当且仅当有唯一的一个实数 λ ，使 $\vec{a} = \lambda \vec{b}$ 。

推论：

若A、B、C三点共线，当且仅当存在唯一的一个实数 λ ，使得 $\overrightarrow{AB} = \lambda \overrightarrow{AC}$ 。

2. 例题精讲

例1

请证明如下结论：

对任意两个向量 $\vec{a}$ ， $\vec{b}$ ，若存在不全为0的实数对 (λ, μ) ，使 $\lambda \vec{a} + \mu \vec{b} = \vec{0}$ ，则 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 共线。

【提示】仍然是采取分类讨论的策略。

例2

25. 已知 $\vec{a}$ ， $\vec{b}$ 为非零不共线向量，向量 $8\vec{a} - k\vec{b}$ 与 $-k\vec{a} + \vec{b}$ 共线，则 $k = ()$ 。

A. $2\sqrt{2}$

B. $-2\sqrt{2}$

C. $\pm 2\sqrt{2}$

D. 8

【答案】C

【解析】由题意得， $8\vec{a} - k\vec{b} = \lambda(-k\vec{a} + \vec{b})$ ， $\therefore \begin{cases} 8 = -k\lambda \\ -k = \lambda \end{cases}$ ， $\therefore k = \pm 2\sqrt{2}$ 。

故选C。

【标注】【知识点】平面向量数量积的运算律

例3

26. O 为 $\triangle ABC$ 内一点, 且 $2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$, $\overrightarrow{AD} = t\overrightarrow{AC}$, 若 B, O, D 三点共线, 则 t 的值为 () .
- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{2}{3}$

【答案】 A

【解析】 $\because 2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$,
 $\therefore 2(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CA}) + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$,
 $\therefore 4\overrightarrow{OC} + 2\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} = \vec{0}$,
 $\because \overrightarrow{AD} = t\overrightarrow{AC}$,
 $\therefore \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = t\overrightarrow{AC}$,
 $\therefore \overrightarrow{CD} = (t-1)\overrightarrow{AC}$,
 $\therefore \overrightarrow{AC} = \frac{1}{t-1}\overrightarrow{CD}$,
 $\therefore 4\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CB} = 2\overrightarrow{AC} = \frac{2}{t-1}\overrightarrow{CD}$,
 $\therefore \overrightarrow{CB} = \frac{2}{t-1}\overrightarrow{CD} + 4\overrightarrow{CO}$,
 $\because B, O, D$ 共线,
 $\therefore \frac{2}{t-1} + 4 = 1$,
 $\therefore 2 + 4t - 4 = t - 1$,
 $\therefore 3t = 1$,
 $\therefore t = \frac{1}{3}$.
 故选A.

【标注】 【知识点】 平面向量中的三点共线问题；平面向量的加法运算及运算规则

例4

27. 设 $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ 是两个不共线向量, 已知 $\overrightarrow{AB} = 2\vec{e}_1 + k\vec{e}_2$, $\overrightarrow{CB} = \vec{e}_1 + 3\vec{e}_2$, $\overrightarrow{CD} = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2$, 若 A, B, D 三点共线, 求实数 k 的值.

【答案】 $k = -8$.

【解析】 $\because \vec{e}_1, \vec{e}_2$ 是两个不共线向量,

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB} &= 2\overrightarrow{e_1} + k\overrightarrow{e_2}, \\
\overrightarrow{CB} &= \overrightarrow{e_1} + 3\overrightarrow{e_2}, \\
\overrightarrow{CD} &= 2\overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2}, \\
\therefore \overrightarrow{BD} &= \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CB}, \\
&= 2\overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2} - \overrightarrow{e_1} - 3\overrightarrow{e_2}, \\
&= \overrightarrow{e_1} - 4\overrightarrow{e_2}, \\
\therefore A, B, D \text{ 三点共线}, \\
\therefore \overrightarrow{AB} &= \lambda \overrightarrow{BD}, \\
2\overrightarrow{e_1} + k\overrightarrow{e_2} &= \lambda(\overrightarrow{e_1} - 4\overrightarrow{e_2}), \\
&= \lambda\overrightarrow{e_1} - 4\lambda\overrightarrow{e_2}, \\
\text{则} \begin{cases} 2 = \lambda \\ k = -4\lambda \end{cases}, \\
\text{解得} k &= -8, \\
\text{故} k &= -8.
\end{aligned}$$

【标注】【知识点】平面向量的加法运算及运算规则；平面向量线性运算综合（非坐标）；平面向量的减法运算及运算规则；平面向量的数乘运算及运算规则；平面向量中的三点共线问题

3. 课堂巩固

练1

28. 平面向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 共线的充要条件是 () .

- A. $\vec{a}$, $\vec{b}$ 方向相同
- B. $\vec{a}$, $\vec{b}$ 两向量中至少有一个为零向量
- C. 存在 $\lambda \in \mathbf{R}$, 使得 $\vec{b} = \lambda \vec{a}$
- D. 存在不全为零的实数 λ_1, λ_2 , 使得 $\lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{b} = \vec{0}$

【答案】 D

【解析】 A 选项: $\vec{a}$, $\vec{b}$ 共线不一定同向, A 错;

B 选项: $\vec{a}$, $\vec{b}$ 是非零向量也可以共线, B 错;

C 选项: 当 $\vec{a} = \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$ 时, $\vec{b} = \lambda \vec{a}$ 不成立, C 错;

D 选项: 若 $\vec{a} \neq \vec{0}$, 则由两向量共线知, 存在 $\lambda \neq 0$, 使得 $\vec{b} = \lambda \vec{a}$,

A. 梯形

B. 平行四边形

C. 菱形

D. 矩形

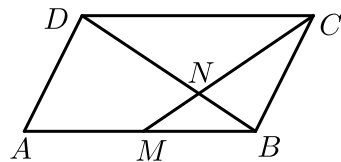
【答案】 A

【解析】 $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$
 $= -8\vec{a} - 2\vec{b}$
 $= 2(-4\vec{a} - \vec{b})$
 $= 2\overrightarrow{BC},$
 $\therefore \overrightarrow{AD}$ 与 $\overrightarrow{BC}$ 平行,
 又 $\because \overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{CD}$ 不平行,
 $\therefore$ 为梯形.
 故选A.

【标注】【知识点】平面向量的数乘运算及运算规则；平面向量线性运算综合（非坐标）；平面向量的加法运算及运算规则；共线向量

练4

32. 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中， M 是 AB 的中点，点 N 在对角线 BD 上，且 $BN = \frac{1}{3}BD$. 求证： M, N, C 三点共线.



【答案】 证明见解析.

【解析】 $\because \overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{AD} = \vec{b},$
 $\therefore \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BD}$
 $= \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB})$
 $= \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{3}(\vec{b} - \vec{a}),$
 $\therefore \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$
 $= \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{a} = 3\overrightarrow{MN},$
 $\therefore \overrightarrow{MN} // \overrightarrow{MC},$

又 $\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MC}$ 有公共点 M ,

$\therefore M, N, C$ 三点共线.

【标注】【知识点】平面向量中的三点共线问题；平面向量线性运算综合（非坐标）；共线向量；平面向量基本定理及其意义

33. 设 $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ 是不共线的两个向量，已知 $\overrightarrow{AB} = 2\vec{e}_1 - 8\vec{e}_2$ ， $\overrightarrow{CB} = \vec{e}_1 + 3\vec{e}_2$ ， $\overrightarrow{CD} = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2$ 。

(1) 求证： A, B, D 三点共线。

(2) 若 $\overrightarrow{BF} = 3\vec{e}_1 - k\vec{e}_2$ ，且 B, D, F 三点共线，求 k 的值。

【答案】(1) 证明见解析。

(2) $k = 12$ 。

【解析】(1) $\because \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CB} = \vec{e}_1 - 4\vec{e}_2$,

$$\therefore \overrightarrow{AB} = 2(\vec{e}_1 - 4\vec{e}_2) = 2\overrightarrow{BD},$$

$$\therefore \overrightarrow{AB} // \overrightarrow{BD},$$

$\therefore \overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{BD}$ 有公共点，

$\therefore A, B, D$ 三点共线。

(2) 由(1)可知 $\overrightarrow{BD} = \vec{e}_1 - 4\vec{e}_2$ ，且 $\overrightarrow{BF} = 3\vec{e}_1 - k\vec{e}_2$ ，

$\therefore B, D, F$ 三点共线，

$$\therefore \overrightarrow{BF} = \lambda \overrightarrow{BD},$$

$$\text{即 } 3\vec{e}_1 - k\vec{e}_2 = \lambda \vec{e}_1 - 4\lambda \vec{e}_2,$$

$$\text{由题意 } \vec{e}_1, \vec{e}_2 \text{ 不共线，得 } \begin{cases} \lambda = 3 \\ -k = -4\lambda \end{cases}.$$

解得 $k = 12$ 。

【标注】【知识点】共线向量