

2020河北区高二上期末

一、选择

1 圆 $C: (x-1)^2 + (y+2)^2 = 5$ 的圆心坐标和半径分别为 () .

- A. $(1, 2)$, 5 B. $(1, -2)$, 5 C. $(1, -2)$, $\sqrt{5}$ D. $(-1, 2)$, $\sqrt{5}$

答案 C

解析 圆 $C: (x-1)^2 + (y+2)^2 = 5$ 的圆心坐标 $(1, -2)$ 和半径: $\sqrt{5}$.

故选C.

2 若数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 2$, $a_{n+1} = \frac{1+a_n}{1-a_n}$, 则 a_{2019} 的值为 () .

- A. 2 B. -3 C. $-\frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{3}$

答案 C

解析 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 2$, 由于 $a_{n+1} = \frac{1+a_n}{1-a_n}$,

$$\text{①当 } n=1 \text{ 时, } a_2 = \frac{1+a_1}{1-a_1} = -3, \text{ ②当 } n=2 \text{ 时, } a_3 = \frac{1+a_2}{1-a_2} = -\frac{1}{2},$$

$$\text{③当 } n=3 \text{ 时, } a_4 = \frac{1+a_3}{1-a_3} = \frac{1}{3}, \text{ ④当 } n=4 \text{ 时, } a_5 = \frac{1+a_4}{1-a_4} = 2 \dots$$

所以数列的周期为4.

$$\text{故 } 2019 \div 4 = 504 \dots 3.$$

$$\therefore a_{2019} = a_3 = -\frac{1}{2}.$$

故选C.

3 以双曲线 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ 的右焦点为圆心, 且与其渐近线相切的圆的方程是 () .

- A. $x^2 + y^2 - 10x + 9 = 0$ B. $x^2 + y^2 - 10x + 16 = 0$

C. $x^2 + y^2 + 10x + 16 = 0$

D. $x^2 + y^2 + 10x + 9 = 0$

答案 A

解析

双曲线 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ 的右焦点为 $(5, 0)$,

则圆心坐标为 $(5, 0)$ 渐近线为 $y = \pm \frac{4}{3}x$,

圆与渐近线相切, 则圆心到渐近线的距离即为半径,

而 $(5, 0)$ 到渐近线 $y = \pm \frac{4}{3}x$ 的距离为 $d = \frac{|\frac{4}{3} \times 5|}{\sqrt{(\frac{4}{3})^2 + 1^2}} = 4$,

则圆的半径 $R = 4$,

所以圆的方程为 $(x - 5)^2 + y^2 = 16$,

即 $x^2 + y^2 - 10x + 9 = 0$,

故本题答案为 A.

4 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左焦点为 F , 点 A 在双曲线的渐近线上, $\triangle OAF$ 是边长为 2 的等边三角形 (O 为原点), 则双曲线的方程为 ().

A. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$

B. $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{4} = 1$

C. $\frac{x^2}{3} - y^2 = 1$

D. $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$

答案 D

解析

方法一: 由题意结合双曲线的渐近线方程可得:

$$\begin{cases} c = 2 \\ c^2 = a^2 + b^2 \\ \frac{b}{a} = \tan 60^\circ = \sqrt{3} \end{cases}, \text{解得 } a^2 = 1, b^2 = 3,$$

双曲线方程为: $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$. 故选 D.

方法二: $\triangle OAF$ 是边长为 2 的正三角形, 则 $c = 2$, 一条渐近线斜率为 $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$, 即 $\frac{b}{a} = \sqrt{3}$,

,

解得 $a^2 = 1, b^2 = 3$, 所以双曲线方程为 $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$.

已知数列 $\{a_n\}$ 为等差数列，若 $\frac{a_{11}}{a_{10}} < -1$ ，且它们的前 n 项和 S_n 有最大值，则使得 $S_n > 0$ 的 n 的最大值为（ ）。

A. 11

B. 19

C. 20

D. 21

答案 B

解析 由 $\frac{a_{11}}{a_{10}} < -1$ 可得 $\frac{a_{11} + a_{10}}{a_{10}} < 0$ ，
由它们的前 n 项和 S_n 有最大值，可得数列的 $d < 0$ ，
 $\therefore a_{10} > 0, a_{11} + a_{10} < 0, a_{11} < 0$ ，
 $\therefore a_1 + a_{19} = 2a_{10} > 0, a_1 + a_{20} = a_{11} + a_{10} < 0$ ，
使得 $S_n > 0$ 的 n 的最大值 $n = 19$ 。
故选B。

6 若等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ， $\frac{S_8}{S_4} = 3$ ，则 $\frac{S_{16}}{S_4} = ()$ 。

A. 3

B. 7

C. 10

D. 15

答案 D

解析 $\therefore$ 若 $q = 1$ 可得据 $\frac{S_8}{S_4} = 2 \neq 3$ ，故 $q \neq 1$ ， $\therefore \frac{S_8}{S_4} = 3, q \neq 1, \therefore \frac{\frac{a_1(1-q^8)}{1-q}}{\frac{a_1(1-q^4)}{1-q}} = \frac{1-q^8}{1-q^4} = 3$ ，化简得
 $1 - q^8 = 3 - 3q^4$ ，可得 $q^8 - 3q^4 + 2 = 0$ ，解得 $q^4 = 1$ 或 $2, q \neq 1$ ，解得 $q^4 = 2$ ，
 $\frac{S_{16}}{S_4} = \frac{1 - q^{16}}{1 - q^4} = \frac{1 - 2^4}{1 - 2} = 15$ 。

7 已知点 P 是抛物线 $x = \frac{1}{4}y^2$ 上的一个动点，则点 P 到点 $A(0, 2)$ 的距离与点 P 到 y 轴的距离之和的最小值为（ ）。

A. 2

B. $\sqrt{5}$

C. $\sqrt{5} - 1$

D. $\sqrt{5} + 1$

答案 C

解析 抛物线 $x = \frac{1}{4}y^2$ ，可得： $y^2 = 4x$ ，抛物线的焦点坐标 $(1, 0)$ ，
依题意点 P 到点 $A(0, 2)$ 的距离与点 P 到 y 轴的距离之和的最小值，
就是 P 到 $(0, 2)$ 与 P 到该抛物线准线的距离之和减去 1，
由抛物线的定义，可得则点 P 到点 $A(0, 2)$ 的距离与 P 到该抛物线焦点坐标的距离之和减 1，
可得： $\sqrt{(0-1)^2 + (2-0)^2} - 1 = \sqrt{5} - 1$ 。
故选 C。

8 圆 $x^2 + y^2 = 4$ 与圆 $x^2 + y^2 + 2y - 6 = 0$ 的公共弦长为 ()。

A. 1

B. 2

C. $\sqrt{3}$

D. $2\sqrt{3}$

答案 D

解析 方法一：两圆方程相减公共弦所在直线方程为 $y = 1$ ，与前一个圆距离 $d = 1$ ，半径 $R = 2$ ，
则弦长 $l = 2\sqrt{R^2 - d^2} = 2\sqrt{3}$ 。

故选 D。

方法二：相交弦所交直线： $x^2 + y^2 - [x^2 + y^2 + 2y - 6] = 4$ ，

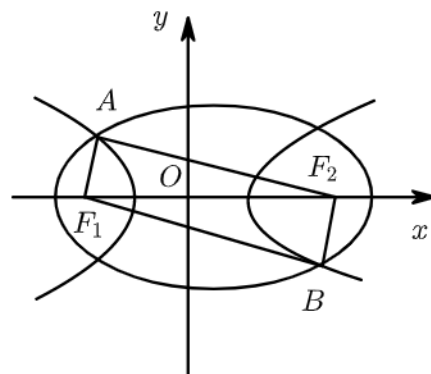
即 $y = 1$ ，

$$\begin{cases} y = 1 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow (\sqrt{3}, 1), (-\sqrt{3}, 1),$$

$$d = \sqrt{3} - (-\sqrt{3}) = 2\sqrt{3}.$$

故选 D。

9 如图， F_1, F_2 是椭圆 $C_1: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 与双曲线 C_2 的公共焦点， A, B 分别是 C_1, C_2 在第二、四象限的公共点，若四边形 AF_1BF_2 为矩形，则 C_2 的离心率为 ()。



A. $\sqrt{2}$

B. $\sqrt{3}$

C. $\frac{3}{2}$

D. $\frac{\sqrt{6}}{2}$

答案 D

解析 $c = \sqrt{3}$, $|AF_2| + |AF_1| = 4$, $|AF_2| - |AF_1| = 2a$,

所以 $|AF_2| = 2 + a$, $|AF_1| = 2 - a$,

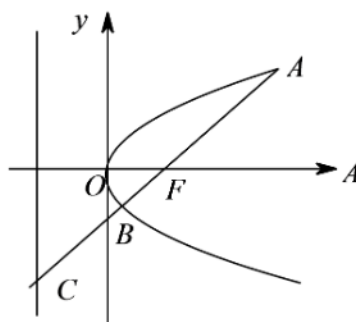
因为 $|AF_1|^2 + 4c^2 = |F_2F_1|^2$,

所以 $a = \sqrt{2}$,

于是 $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{6}}{2}$, 故选D.

二、填空

- 10 如图, 过抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点 F 的直线交抛物线于点 A, B , 交其准线 l 于点 C , 若 $|BC| = 2|BF|$, 且 $|AF| = 3$, 则此抛物线的方程为 _____.



答案 $y^2 = 3x$

解析 设直线 AC 的方程为 $y = k(x - \frac{p}{2})$ 代入抛物线中可得:

$$x^2 - (1 + 2k^2)px + \frac{p^2}{4} = 0,$$

$$\begin{cases} x_A + x_B = (1 + 2k^2)p \\ x_A \cdot x_B = \frac{p^2}{4} \end{cases},$$

$$AF = x_A + \frac{p}{2}, BF = x_B + \frac{p}{2}, \frac{CB}{CF} = \frac{2}{3},$$

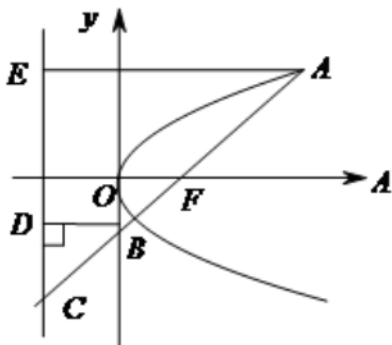
$$\therefore \begin{cases} x_B = \frac{p}{6} \\ x_A = \frac{3}{2}p \end{cases},$$

$$\therefore AF = 2p = 3,$$

抛物线方程为 $y^2 = 3x$.

故选C .

法②：如图，分别过点 A, B 作准线的垂直，分别交准线于点 E, D ，设 $|BF| = a$ ，



则： $|BC| = 2a$ ， $|BD| = |BF| = a$ ，

故： $\angle B \angle C = 30^\circ$ ，

在 $\text{Rt}\triangle ACE$ 中，

$\therefore |AE| = 3$ ，

$|AC| = 3 + 3a$ ，

$\therefore 2|AE| = |AC|$ ，

$\Rightarrow 3 + 3a = 6$ ，

$a = 1$ ，

$\therefore BD \parallel FG$ ，

$\therefore \frac{1}{p} = \frac{2}{3}$ 得 $p = \frac{3}{2}$ ，

$\therefore$ 抛物线方程为 $y^2 = 3x$.

11 已知直线 $l_1 : (a+2)x + (1-a)y - 1 = 0$ 与直线 $l_2 : (a-1)x + (2a+3)y + 2 = 0$ 垂直，则 $a =$ _____ .

答案 ± 1

解析 由于直线 $l_1 : (a+2)x + (1-a)y - 1 = 0$ 与直线 $l_2 : (a-1)x + (2a+3)y + 2 = 0$ 垂直，

$\therefore (a+2)(a-1) + (1-a)(2a+3) = 0$ ，

即 $(a+1)(a-1) = 0$ ，

解得 $a = 1$ 或 $a = -1$,

故答案为 : ± 1 .

- 12 在四棱锥 $P-ABCD$ 中 , 向量 $\overrightarrow{AB} = (4, -2, 3)$, $\overrightarrow{AD} = (-4, 1, 0)$, $\overrightarrow{AP} = (-6, 2, -8)$, 则顶点 P 到底面 $ABCD$ 的距离为 _____ .

答案 2

解析 设平面 $ABCD$ 的法向量为 $\vec{n} = (x, y, z)$, 则 $\begin{cases} \overrightarrow{AB} \cdot \vec{n} = 0 \\ \overrightarrow{AD} \cdot \vec{n} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x - 2y + 3z = 0 \\ -4x + y = 0 \end{cases}$,
令 $x = 1$, 则 $y = 4, z = \frac{4}{3}$, 则 $\vec{n} = \left(1, 4, \frac{4}{3}\right)$,
所以顶点 P 到底面 $ABCD$ 的距离为 $d = \frac{|\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|} = \frac{|-6 \times 1 + 2 \times 4 + (-8) \times \frac{4}{3}|}{\sqrt{1^2 + 4^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^2}} = 2$.

- 13 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 33$, $a_{n+1} - a_n = 2n$, 则 $\frac{a_n}{n}$ 的最小值为 _____ .

答案 $\frac{21}{2}$

解析 方法一 : 当 $n \geq 2$ 时

$$\begin{cases} a_n - a_{n-1} = 2(n-1) \\ a_{n-1} - a_{n-2} = 2(n-2) \\ \vdots \\ a_2 - a_1 = 2 \cdot 1 \end{cases}$$

相加得 :

$$\begin{aligned} a_n - a_1 &= 2[1 + 2 + \cdots + (n-1)] \\ &= 2 \cdot \frac{n(n-1)}{2} = n^2 - n \end{aligned}$$

$$\therefore a_1 = 33 ,$$

$$\therefore a_n = n^2 - n + 33 (n \geq 2) ,$$

$$\text{当 } n = 1 \text{ 时 , } a_1 = 33 ,$$

$$\therefore a_n = n^2 - n + 33 (n \in \mathbf{N}^*) .$$

$$\therefore \frac{a_n}{n} = \frac{n^2 - n + 33}{n} = n + \frac{33}{n} - 1,$$

当且仅当 $n = \frac{33}{n}$ 即 $n = \sqrt{33}$ 时, 取最小值,

$$\because n \in \mathbf{N}^*, \text{ 当 } n = 5 \text{ 时, } \frac{a_n}{n} = \frac{53}{5},$$

$$\text{当 } n = 6 \text{ 时, } \frac{a_n}{n} = \frac{21}{2} < \frac{53}{5},$$

$$\therefore \frac{a_n}{n} \text{ 的最小值为 } \frac{21}{2}.$$

方法二: $\because a_{n+1} - a_n = 2n,$

$$\therefore a_n - a_{n-1} = 2(n-1),$$

$$\therefore a_n = (a_n - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_{n-2}) + \cdots + (a_2 - a_1) + a_1$$

$$= (2n-2) + (2n-4) + \cdots + 2 + 33$$

$$= n^2 - 2n + 33 (n \geq 2),$$

又 $a_1 = 33$ 适合上式,

$$\therefore a_n = n^2 - n + 33,$$

$$\therefore \frac{a_n}{n} = n + \frac{33}{n} - 1.$$

$$\text{令 } f(x) = x + \frac{33}{x} - 1 (x > 0), \text{ 则 } f'(x) = 1 - \frac{33}{x^2},$$

$$\text{令 } f'(x) = 0 \text{ 得 } x = \sqrt{33},$$

$$\therefore \text{当 } 0 < x < \sqrt{33} \text{ 时, } f'(x) < 0, \text{ 当 } x > \sqrt{33} \text{ 时, } f'(x) > 0,$$

即 $f(x)$ 在区间 $(0, \sqrt{33})$ 上递减; 在区间 $(\sqrt{33}, +\infty)$ 上递增, 又 $5 < \sqrt{33} < 6$,

$$\text{且 } f(5) = 5 + \frac{33}{5} - 1 = \frac{53}{5}, f(6) = 6 + \frac{33}{6} - 1 = \frac{21}{2},$$

$$\therefore f(5) > f(6),$$

$$\therefore \text{当 } n = 6 \text{ 时, } \frac{a_n}{n} \text{ 有最小值 } \frac{21}{2}.$$

14 若直线 $x - y - m = 0$ 被圆 $x^2 + y^2 - 8x + 12 = 0$ 所截得的弦长为 $2\sqrt{2}$, 则实数 m 的值为 ().

A. 2或6

B. 0或8

C. 2或0

D. 6或8

答案 A

解析 $x^2 + y^2 - 8x + 12 = 0$, 可化为 $(x-4)^2 + y^2 = 4$,

$\therefore$ 直线 $x - y - m = 0$ 被圆 $x^2 + y^2 - 8x + 12 = 0$ 所截得的弦长为 $2\sqrt{2}$,

$$\therefore \text{圆心}(4, 0) \text{ 到直线 } x - y - m = 0 \text{ 的距离 } d = \frac{|4 - m|}{\sqrt{2}} = \sqrt{4 - 2} = \sqrt{2},$$

∴解得 $m = 2$ 或 6 .

三、解答

15 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 . 已知 $a_n > 0$, $a_n^2 + 2a_n = 4S_n + 3$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式 .

(2) 设 $b_n = \frac{1}{a_n a_{n+1}}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 .

答案

(1) $a_n = 2n + 1$.

(2) $\frac{n}{3(2n+3)}$.

解析

(1) 由 $a_n^2 + 2a_n = 4S_n + 3$, 可知 $a_{n+1}^2 + 2a_{n+1} = 4S_{n+1} + 3$.

可得 $a_{n+1}^2 - a_n^2 + 2(a_{n+1} - a_n) = 4a_{n+1}$, 即

$$2(a_{n+1} + a_n) = a_{n+1}^2 - a_n^2 = (a_{n+1} + a_n)(a_{n+1} - a_n) .$$

由于 $a_n > 0$, 可得 $a_{n+1} - a_n = 2$.

又 $a_1^2 + 2a_1 = 4a_1 + 3$, 解得 $a_1 = -1$ (舍去) , $a_1 = 3$.

所以 $\{a_n\}$ 是首项为 3 , 公差为 2 的等差数列 , 通项公式为 $a_n = 2n + 1$.

(2) 由 $a_n = 2n + 1$ 可知

$$b_n = \frac{1}{a_n a_{n+1}} = \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3} \right) .$$

设数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n , 则

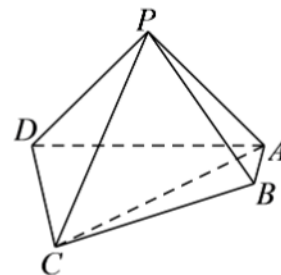
$$T_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$$

$$= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3} \right) \right]$$

$$= \frac{n}{3(2n+3)} .$$

16 如图 , 在四棱锥 $P-ABCD$ 中 , 平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$, $PA \perp PD$, $PA = PD$, $AB \perp AD$,

$AB = 1$, $AD = 2$, $AC = CD = \sqrt{5}$.



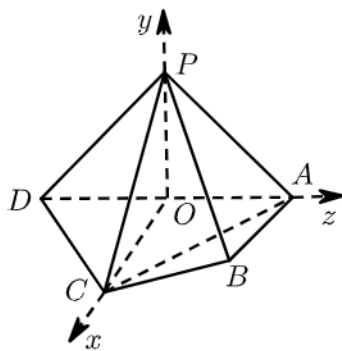
- (1) 求证： $PD \perp$ 平面 PAB .
- (2) 求直线 PB 与平面 PCD 所成角的正弦值 .
- (3) 在棱 PA 上是否存在点 M , 使得 $BM \parallel$ 平面 PCD ? 若存在 , 求 $\frac{AM}{AP}$ 的值 ; 若不存在 , 说明理由 .

答案

- (1) 证明见解析 .
- (2) $\frac{\sqrt{3}}{3}$.
- (3) 存在 , $\frac{AM}{AP} = \frac{1}{4}$.

解析

- (1) $\because$ 面 $PAD \perp$ 面 $ABCD$, $AB \subset$ 面 $ABCD$, 且 $AB \perp AD$,
 $\therefore AB \perp$ 面 PAD ,
 $\therefore AB \perp PD$,
 又 $\because PD \perp PA$, $PA \cap AB = A$,
 $\therefore PD \perp$ 面 PAB .
- (2) 取 AD 的中点 O , 连接 CO , PO ,
 $\because CD = AC = \sqrt{5}$,
 $\therefore CO \perp AD$,
 $\because PA = PD$,
 $\therefore PO \perp AD$,
 以 O 为原点 , 建立如图坐标系 ;



易知 $P(0, 0, 1)$, $B(1, 1, 0)$, $D(0, -1, 0)$, $C(2, 0, 0)$,

则 $\overrightarrow{PB} = (1, 1, -1)$, $\overrightarrow{PD} = (0, -1, -1)$, $\overrightarrow{PC} = (2, 0, -1)$, $\overrightarrow{CD} = (-2, -1, 0)$,

设平面 PDC 的法向量为 $\vec{n} = (x_1, y_1, 1)$,

$$\text{则} \begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{PB} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{PC} = 0 \end{cases}, \text{解得} \vec{n} = \left(\frac{1}{2}, -1, 1\right),$$

设直线 PB 与平面 PCD 所成角为 θ ,

$$\begin{aligned} \sin \theta &= |\cos \langle \vec{n}, \overrightarrow{PB} \rangle| = \frac{|\vec{n} \cdot \overrightarrow{PB}|}{|\vec{n}| \cdot |\overrightarrow{PB}|} \\ &= \frac{\left| \frac{1}{2} - 1 - 1 \right|}{\sqrt{\frac{1}{4} + 1 + 1} \times \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}. \end{aligned}$$

(3) 假设存在 $M(0, x_0, y_0)$, 使得 $BM \parallel$ 平面 PCD , 设 $\frac{AM}{AP} = \lambda$, $A(0, 1, 0)$, $P(0, 0, 1)$,

$B(1, 1, 0)$,

$\overrightarrow{AP} = (0, -1, 1)$, $\overrightarrow{AM} = (0, y_0 - 1, z_0)$,

$\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{AP}$, 得 $M(0, 1 - \lambda, \lambda)$,

$\overrightarrow{BM} = (-1, -\lambda, \lambda)$,

$\because BM \parallel$ 平面 PCD , 平面 PDC 的法向量为 $\vec{n}$,

$\therefore \overrightarrow{BM} \cdot \vec{n} = 0$, 即 $-\frac{1}{2} + \lambda + \lambda = 0$, 解得 $\lambda = \frac{1}{4}$,

即当 $\frac{AM}{AP} = \frac{1}{4}$ 时, 满足题意.

17 已知双曲线 C 的渐近线方程为 $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}x$, 右焦点坐标为 $(2, 0)$, O 为坐标原点.

(1) 求双曲线 C 的标准方程.

(2) 若直线 $l: y = kx + \sqrt{2}$ 与双曲线 C 恒有两个不同的交点 A 和 B , 且 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} > 0$, 试求实数 k 的取值范围.

- (1) $\frac{x^2}{3} - y^2 = 1$.
 (2) $\left(-1, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, 1\right)$.

解析

(1) 依题意, 设双曲线的方程为 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$, 则 $\frac{b^2}{a^2} = \frac{1}{3}$, $c = 2$.

$$\text{又 } a^2 + b^2 = c^2 ,$$

$$\therefore a^2 = 3, b^2 = 1 ,$$

即双曲线 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{3} - y^2 = 1$.

(2) 联立 $\begin{cases} y = kx + \sqrt{2} \\ \frac{x^2}{3} - y^2 = 1 \end{cases}$, 消去 y 得, $(1 - 3k^2)x^2 - 6\sqrt{2}kx - 9 = 0$,

$\therefore$ 直线 l 与双曲线 C 恒有两个不同的交点,

$$\begin{cases} 1 - 3k^2 \neq 0 \\ \Delta = (-6\sqrt{2}k)^2 + 36(1 - 3k^2) = 36(1 - k^2) > 0 \end{cases} ,$$

$$\therefore k^2 \neq \frac{1}{3} \text{ 且 } k^2 < 1, \text{ ①}$$

设 $A(x_1, y_1)$ 和 $B(x_2, y_2)$,

$$\text{则 } x_1 + x_2 = \frac{6\sqrt{2}k}{1 - 3k^2}, x_1x_2 = \frac{-9}{1 - 3k^2} ,$$

$$\therefore \vec{OA} \cdot \vec{OB} > 0 ,$$

$$\text{即 } x_1x_2 + y_1y_2 = (k^2 + 1)x_1x_2 + \sqrt{2}k(x_1 + x_2) + 2 = \frac{3k^2 + 7}{3k^2 - 1} > 0 ,$$

$$\therefore k^2 > \frac{1}{3}, \text{ ②}$$

综上①②得, $-1 < k < -\frac{\sqrt{3}}{3}$ 或 $\frac{\sqrt{3}}{3} < k < 1$.

18 已知数列 $\{a_n\}$ 是等差数列, S_n 为其前 n 项和, 且 $a_5 = 3a_2$, $S_7 = 14a_2 + 7$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 .

(2) 设数列 $\{a_n + b_n\}$ 的首项为 1, 公比为 2 的等比数列, 求数列 $\{b_n(a_n + b_n)\}$ 的前 n 项和 T_n .

答案

(1) $a_n = 2n - 1$.

(2) $T_n = \frac{1}{3} \cdot 4^n + (3 - 2n) \cdot 2^n - \frac{10}{3}$.

解析

(1) $\therefore \begin{cases} a_5 = 3a_2 \\ S_7 = 14a_2 + 7 \end{cases}$,

由等差数列性质及公式 $S_n = \frac{d}{2}n^2 + \left(a_1 - \frac{d}{2}\right)n$ 得

$$\therefore \begin{cases} a_1 + 4d = 3(a_1 + d) \\ \frac{d}{2} \times 7^2 + \left(a_1 - \frac{d}{2}\right) \times 7 = 14(a_1 + d) + 7 \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} a_1 = 1 \\ d = 2 \end{cases}$$

$\therefore$ 通项公式为 $a_n = a_1 + (n-1)d = 2n-1$.

(2) 由定义得, 该等比数列通项 $c_n = 2^{n-1}$,

$$\therefore a_n + b_n = c_n,$$

$$\therefore b_n = c_n - a_n = 2^{n-1} - 2n + 1,$$

$$\therefore b_n(a_n + b_n) = b_n \cdot c_n = 4^{n-1} + 2^{n-1} - n \cdot 2^n,$$

$$\text{对于 } 4^{n-1} \text{ 可用等比数列求和公式得 } A_n = \frac{1 \times (4^n - 1)}{4 - 1} = \frac{4^n - 1}{3},$$

$$\text{对于 } 2^{n-1} \text{ 可用等比数列求和公式得 } B_n = \frac{1 \times (2^n - 1)}{2 - 1} = 2^n - 1,$$

对于 $n \cdot 2^n$ 可用错位相减法求和

$$S_n = 1 \times 2^1 + 2 \times 2^2 + \cdots + (n-1) \cdot 2^{n-1} + n \cdot 2^n \quad ①,$$

$$2S_n = 0 + 1 \times 2^2 + \cdots + (n-1) \cdot 2^n + n \cdot 2^{n+1} \quad ②,$$

$$① - ② \Rightarrow -S_n = 2 + 2^2 + \cdots + 2^n - n \cdot 2^{n+1}$$

$$= (1-n) \cdot 2^{n+1} - 2,$$

$$T_n = A_n + B_n - S_n$$

$$= \frac{1}{3} \cdot 4^n - \frac{1}{3} + 2^n - 1 + (1-n) \cdot 2^{n+1} - 2$$

$$= \frac{1}{3} \cdot 4^n + (3-2n) \cdot 2^n - \frac{10}{3}.$$