

2020河东高二期末模拟

1 对任意等比数列 $\{a_n\}$ ，下列说法一定正确的是（ ）.

A. a_1, a_3, a_9 成等比数列

B. a_2, a_3, a_6 成等比数列

C. a_2, a_4, a_8 成等比数列

D. a_3, a_6, a_9 成等比数列

答案 D

解析 依题意： $\{a_n\}$ 是等比数列，

所以 $a_3 \cdot q^3 = a_6, a_6 \cdot q^3 = a_9$,

所以 a_3, a_6, a_9 成以 q^3 为公比的等比数列，

所以 a_3, a_6, a_9 成等比数列，

所以本题正确答案为D选项.

2 在等差数列 $\{a_n\}$ 中， $a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 34$ ， $a_2 \cdot a_5 = 52$ ，且 $a_4 > a_2$ ，且 $a_5 =$ （ ）.

A. 11

B. 12

C. 13

D. 14

答案 C

解析 由等差数列 $\{a_n\}$ 的性质可得： $a_2 + a_5 = a_3 + a_4 = \frac{1}{2} \times 34 = 17$ ，

且 $a_2 \cdot a_5 = 52, a_4 > a_2$ ，

$\therefore a_2, a_5$ 是方程 $x^2 - 17x + 52 = 0$ ，且 $a_2 < a_5$.

解得 $a_2 = 4, a_5 = 13$.

故选C .

3 设 $f(x) = \ln(2x - 1)$ ，若 $f(x)$ 在 x_0 处的导数 $f'(x_0) = 1$ ，则 x_0 的值为（ ）.

A. $\frac{e+1}{2}$

B. $\frac{3}{2}$

C. 1

D. $\frac{3}{4}$

答案 B

解析 由 $f'(x) = \ln(2x-1)$, 得 $f'(x) = \frac{2}{2x-1}$,
由 $f'(x_0) = \frac{2}{2x_0-1} = 1$, 解得: $x_0 = \frac{3}{2}$.
故选B.

4 在正项等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_2 a_4 = 4$, $S_3 = 14$, 数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n = \log_2 a_n$, 则数列 $\{b_n\}$ 前6项和是 () .

- A. 0 B. 2 C. 3 D. 5

答案 C

解析 $\because \{a_n\}$ 为等比数列, $a_2 \cdot a_4 = 4$,
 $S_3 = 14$,
 $\therefore \begin{cases} a_1 \cdot q \cdot a_1 \cdot q^3 = 4 \\ \frac{a_1(1-q^3)}{1-q} = 14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 8 \\ q = \frac{1}{2} \end{cases}$,
 $\therefore a_n = 8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-4}$,
 $\therefore b_n = \log_2 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-4}$
 $= \log_2 (2)^{4-n} = 4-n$,
 $\therefore b_n$ 是首项为3, 公差为-1的等差数列,
 $\therefore S_6 = \frac{(3-2) \cdot 6}{2} = 3$.
故选C.

5 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 $a_n > 0$, 公比 $q > 1$, $a_3 + a_5 = 20$, $a_2 a_6 = 64$, 则 $S_6 =$ () .

- A. 31 B. 36 C. 48 D. 63

答案 D

解析 等比数列 $\{a_n\}$ 前 n 项和为 S_n ,

$$\because a_n > 0, q > 1, a_3 + a_5 = 20, a_2 a_6 = 64,$$

$$\therefore \begin{cases} a_1 q^2 + a_1 q^4 = 20 \\ a_1^2 q^6 = 64 \end{cases},$$

$$\text{则 } 2q^2 - 5q + 2 = 0, (2q - 1)(q - 2) = 0,$$

$$\text{解得 } q = 2 \text{ 或 } q = \frac{1}{2} \text{ (舍去)}.$$

$$\text{由 } q = 2, \text{ 得 } a_1 = 1,$$

$$\text{等比数列 } \{a_n\} \text{ 通项公式为 } a_n = 2^{n-1}, n \in \mathbf{N}^*,$$

$$S_6 = \frac{a_1(1 - q^6)}{1 - q}$$

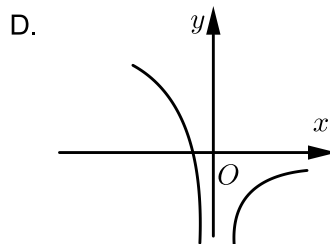
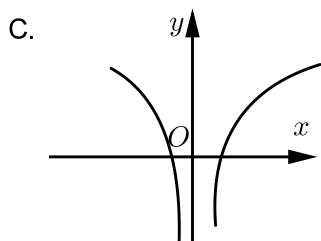
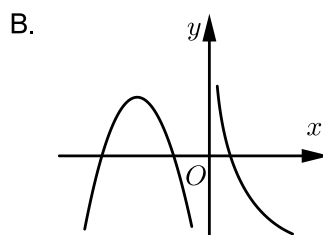
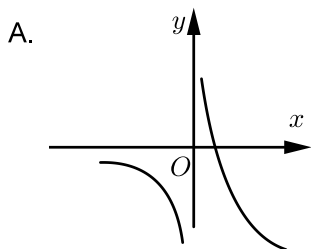
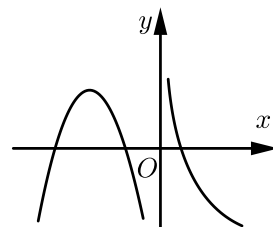
$$= \frac{1 - 2^6}{1 - 2}$$

$$= 2^6 - 1$$

$$= 63.$$

故D正确.

6 设函数 $f(x)$ 在定义域内可导, $y = f(x)$ 的图象如图所示,则导函数 $y = f'(x)$ 的图象可能为() .



答案 D

解析 由 $f(x)$ 的图象判断出可得从左到右函数的单调性在 y 轴左侧先增, 再减, 在 y 轴的右侧, 函数单调递减, $\therefore$ 导函数 $y = f'(x)$ 的图象可能为区间 $(-\infty, 0)$ 内, 先有 $f'(x) > 0$, 再有 $f'(x) < 0$, 在 $(0, +\infty)$ 再有 $f'(x) < 0$.
故选 D.

7 已知函数 $f(x) = f'\left(\frac{\pi}{6}\right) \sin x + \cos x$, 则 $f\left(\frac{\pi}{6}\right)$ 的值为 ().

- A. 1 B. 2 C. -2 D. -1

答案 D

解析 $\because f(x) = f'\left(\frac{\pi}{6}\right) \sin x + \cos x$,
 $\therefore f'(x) = f'\left(\frac{\pi}{6}\right) \cos x - \sin x$,
令 $x = \frac{\pi}{6}$,
则 $f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = f'\left(\frac{\pi}{6}\right) \cos \frac{\pi}{6} - \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} f'\left(\frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{2}$,
则 $f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}-2} = -(\sqrt{3}+2)$,
则 $f(x) = -(\sqrt{3}+2) \sin x + \cos x$,
则 $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = -(\sqrt{3}+2) \sin \frac{\pi}{6} + \cos \frac{\pi}{6} = -(\sqrt{3}+2) \times \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = -1$,
故选 D.

8 设 $f(x)$ 是定义在 $[-1, 1]$ 上的可导函数, $f(0) = 0$, 且 $f'(x) = 2 + x^2$, 则不等式

$f(a) + f(1-2a) > 0$ 的解集为 ().

- A. $[0, 1]$ B. $[-1, 1)$ C. $(-1, 1]$ D. $[0, 1)$

答案 D

解析 $f'(x) = 2 + x^2$ 是偶函数且大于 0, $f(0) = 0$,
则 $f(x)$ 为 $[-1, 1]$ 上的奇函数和增函数,
 $f(a) + f(1-2a) > 0 \Rightarrow f(a) > -f(1-2a) = f(2a-1)$,

$$\text{则} \begin{cases} -1 \leq a \leq 1 \\ -1 \leq 1 - 2a \leq 1 \Rightarrow 0 \leq a < 1 \\ a > 2a - 1 \end{cases}$$

故选D.

9 在数列2, 8, 20, 38, 62, ...中, 第6项是 _____.

答案 92

解析 根据题意, 数列2, 8, 20, 38, 62, ...中,

$$a_2 - a_1 = 8 - 2 = 6,$$

$$a_3 - a_2 = 20 - 8 = 12,$$

$$a_4 - a_3 = 38 - 20 = 18,$$

$$a_5 - a_4 = 62 - 38 = 24,$$

据此类推, $a_6 - a_5 = 30$, 则 $a_6 = 30 + 62 = 92$,

故答案为: 92.

10 $3 + 3^3 + 3^5 + \dots + 3^{2n+1} = \underline{\hspace{2cm}}$.

答案 $\frac{3}{8}(9^{n+1} - 1)$

解析 数列 $3, 3^3, 3^5, \dots, 3^{2n+1}$ 是首项为3, 公比为 3^2 的等比数列,

且 3^{2n+1} 是第 $n+1$ 项.

$$\therefore 3 + 3^3 + 3^5 + \dots + 3^{2n+1} = \frac{3(1 - 3^{2n+2})}{1 - 3^2} = \frac{3}{8}(9^{n+1} - 1).$$

11 过曲线 $C: f(x) = \ln x + x^2$ 上点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 _____.

答案 $3x - y - 2 = 0$

解析 $\because$ 曲线 $C: f(x) = \ln x + x^2$,

$$\therefore f'(x) = \frac{1+2x^2}{x},$$

$$\therefore f'(1) = 3,$$

$$\therefore f(1) = 1,$$

$\therefore$ 过曲线 $C: f(x) = \ln x + x^2$ 上点 $(1, 1)$ 处的切线方程为 $y - 1 = 3(x - 1)$, 即 $3x - y - 2 = 0$.

故答案为: $3x - y - 2 = 0$.

12 若函数 $f(x) = x(x - a)^2$ 在 $x = 2$ 处取得极小值, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.

答案 2

解析 通过对函数 $f(x)$ 求导, 根据函数在 $x = 2$ 处有极值, 可知 $f'(2) = 0$, 解得 a 的值, 再验证可得结论.

解答: 求导函数可得 $f'(x) = 3x^2 - 4ax + a^2$,

$$\therefore f'(2) = 12 - 8a + a^2 = 0, \text{ 解得 } a = 2, \text{ 或 } a = 6,$$

当 $a = 2$ 时, $f'(x) = 3x^2 - 8x + 4 = (x - 2)(3x - 2)$, 函数在 $x = 2$ 处取得极小值, 符合题意;

当 $a = 6$ 时, $f'(x) = 3x^2 - 24x + 36 = 3(x - 2)(x - 6)$, 函数在 $x = 2$ 处取得极大值, 不符合题意,

$$\therefore a = 2.$$

故答案为: 2.

13 已知函数 $f(x) = ae^x - x^2$ 有两个极值点, 则实数 a 的取值范围是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

答案 $\left(0, \frac{2}{e}\right)$

解析 $f'(x) = ae^x - 2x$,

若函数 $f(x) = ae^x - x^2$ 有两个极值点,

则 $y = a$ 和 $g(x) = \frac{2x}{e^x}$ 在 $\mathbf{R}$ 上有 2 个交点,

$$g'(x) = \frac{2 - 2x}{e^x},$$

$x \in (-\infty, 1)$ 时, 即 $g'(x) > 0$, $g(x)$ 递增,

$x \in (1, +\infty)$ 时, $g'(x) < 0$, $g(x)$ 递减,

$$\text{故 } g(x)_{\max} = g(1) = \frac{2}{e},$$

而 $\frac{2x}{e^x} > 0$ 恒成立,

所以 $0 < a < \frac{2}{e}$.

故答案为: $\left(0, \frac{2}{e}\right)$.

14 求下列函数的导数:

(1) $y = x^2 \log_2(3x)$.

(2) $y = \frac{\cos(2x+1)}{x}$.

答案

(1) $2x \log_2(3x) + \frac{x}{\ln 2}$.

(2) $\frac{-2x \sin(2x+1) - \cos(2x+1)}{x^2}$.

解析

(1) $y' = (x^2)' \log_2(3x) + x^2 [\log_2(3x)]'$

$$= 2x \log_2(3x) + x^2 \frac{3}{3x \ln 2}$$

$$= 2x \log_2(3x) + \frac{x}{\ln 2}.$$

(2) $y' = \frac{[\cos(2x+1)]' x - \cos(2x+1) x'}{x^2}$

$$= \frac{-2x \sin(2x+1) - \cos(2x+1)}{x^2}.$$

15 函数 $f(x) = a \ln x - bx^2$ 上一点 $P(2, f(2))$ 处的切线方程为 $y = -3x + 2 \ln 2 + 2$, 求 a, b 的值.

答案

$a = 2, b = 1$.

解析

函数的导数为 $f'(x) = \frac{a}{x} - 2bx$, $f'(2) = \frac{a}{2} - 4b$, $f(2) = a \ln 2 - 4b$,

$f(2) = -6 + 2 \ln 2 + 2$,

所以 $\begin{cases} \frac{a}{2} - 4b = -3 \\ a \ln 2 - 4b = -6 + 2 \ln 2 + 2 \end{cases}$, 解得 $a = 2, b = 1$.

16 记 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，已知 $a_1 = -7$ ， $S_3 = -15$ 。

- (1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式。
- (2) 求 S_n ，并求 S_n 的最小值。

答案

- (1) $a_n = 2n - 9$ 。
- (2) $S_n = n^2 - 8n$ ； -16 。

解析

- (1) 设 d 为等差数列 $\{a_n\}$ 的公差，则有

$$S_3 = 3a_1 + \frac{3 \times 2}{2}d = -15.$$

又 $a_1 = -7$ ，代入上式可得 $d = 2$ 。

$$\therefore a_n = a_1 + (n-1)d = -7 + 2n - 2 = 2n - 9.$$

$\therefore \{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 2n - 9$ 。

- (2) 方法一：由(1)可知 $S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = \frac{n(-7 + 2n - 9)}{2} = n^2 - 8n$ ，

由二次函数的性质可知，当 $n = 4$ 时， S_n 取得最小值， $\therefore S_4 = 16 - 32 = -16$ 。

即 S_n 的最小值为 -16 。

方法二：由(1)知当 $n \leq 4$ 时， $a_n < 0$ ；

当 $n \geq 5$ 时， $a_n > 0$ ，

$\therefore$ 前4项都为负数，从第五项开始为正数，

故当 $n = 4$ 时， S_n 取最小值，最小值为 -16 。

17 已知函数 $f(x) = e^x - x^2 - 1$ 。

- (1) 若函数 $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ ， $x \in (0, +\infty)$ ，求函数 $g(x)$ 的单调区间。
- (2) 若不等式 $f(x) + \frac{1}{2}(3x^2 - 2x - 2k) \leq 0$ 有解，求 k 的取值范围。

答案

- (1) 函数 $g(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减，在 $(1, +\infty)$ 上单调递增。
- (2) $[0, +\infty)$ 。

解析

- (1) 函数 $g(x) = \frac{f(x)}{x} = \frac{e^x - x^2 - 1}{x}$ ， $x \in (0, +\infty)$ ，

$$g'(x) = \frac{(e^x - 2x)x - (e^x - x^2 - 1)}{x^2}$$

$$= \frac{(x-1)(e^x - x - 1)}{x^2}$$

$$\because x \in (0, +\infty),$$

$$\therefore e^x - x - 1 > e^0 - 0 - 1 = 0,$$

可得：函数 $g(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减，在 $(1, +\infty)$ 上单调递增。

$$(2) \text{ 不等 } f(x) + \frac{1}{2}(3x^2 - 2x - 2k) \leq 0 \text{ 有解}$$

$$\Leftrightarrow (e^x + \frac{1}{2}x^2 - x - 1)_{\min} \leq k,$$

$$\text{令 } h(x) = e^x + \frac{1}{2}x^2 - x - 1,$$

$$h'(x) = e^x + x - 1 \text{ 在 } \mathbb{R} \text{ 上单调递增, 且 } h'(0) = 0,$$

$$\therefore \text{函数 } h(x) \text{ 在 } (-\infty, 0) \text{ 上单调递减, 在 } (0, +\infty) \text{ 上单调递增,}$$

$$\therefore x = 0 \text{ 时, 使得 } h(x) \text{ 取得极小值即最小值,}$$

$$h(x)_{\min} = h(0) = 0,$$

$$k \geq h(x)_{\min} = 0,$$

$$\therefore k \text{ 的取值范围是 } [0, +\infty).$$

18 若数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，且 $S_n = n^2 + n$ ，等比数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n ，且 $T_n = 2^n + m$ ， $n \in \mathbf{N}^*$ 。

(1) 求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式。

(2) 求数列 $\{a_n \cdot b_n\}$ 的前 n 项和 Q_n 。

答案

$$(1) \quad b_n = 2^{n-1}, n \in \mathbf{N}^*.$$

$$(2) \quad Q_n = 2 + (n-1) \cdot 2^{n+1}.$$

解析

$$(1) \quad S_n = n^2 + n, \text{ 可得 } a_1 = S_1 = 2,$$

$$\text{当 } n \geq 2 \text{ 时, } a_n = S_n - S_{n-1} = n^2 + n - (n-1)^2 - (n-1) = 2n,$$

$$\text{上式对 } n = 1 \text{ 也成立, 则 } a_n = 2n, n \in \mathbf{N}^*,$$

$$\text{等比数列 } \{b_n\} \text{ 的前 } n \text{ 项和 } T_n, \text{ 且 } T_n = 2^n + m,$$

$$\text{可得 } b_1 = T_1 = 2 + m,$$

$$n \geq 2 \text{ 时, } b_n = T_n - T_{n-1} = 2^n + m - 2^{n-1} - m = 2^{n-1},$$

$$\text{由等比数列 } \{b_n\}, \text{ 可得 } 2 + m = 1, \text{ 即 } m = -1,$$

则 $b_n = 2^{n-1}$, $n \in \mathbf{N}^*$.

(2) 设 $c_n = a_n \cdot b_n = n \cdot 2^n$,

前 n 项和 $Q_n = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 8 + \cdots + n \cdot 2^n$,

$2Q_n = 1 \cdot 4 + 2 \cdot 8 + 3 \cdot 16 + \cdots + n \cdot 2^{n+1}$,

两式相减可得 $-Q_n = 2 + 4 + 8 + \cdots + 2^n - n \cdot 2^{n+1} = \frac{2(1-2^n)}{1-2} - n \cdot 2^{n+1}$,

化简可得 $Q_n = 2 + (n-1) \cdot 2^{n+1}$.

19 已知函数 $f(x) = \ln x - \frac{a(x-1)}{x+2}$.

(1) 若 $a = 4$, 求函数 $f(x)$ 的单调区间.

(2) 若函数 $f(x)$ 在区间 $(0, 1]$ 内单调递增, 求实数 a 的取值范围.

(3) 若 $x_1, x_2 \in \mathbf{R}^+$, 且 $x_1 \leq x_2$, 求证: $(\ln x_1 - \ln x_2)(x_1 + 2x_2) \leq 3(x_1 - x_2)$.

答案

(1) $f(x)$ 在 $(0, 4 - 2\sqrt{3})$ 递增, 在 $(4 - 2\sqrt{3}, 4 + 2\sqrt{3})$ 递减, 在 $(4 + 2\sqrt{3}, +\infty)$ 递增.

(2) $a \leq 3$.

(3) 证明见解析.

解析

(1) $f(x)$ 的定义域是 $(0, +\infty)$,

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{3a}{(x+2)^2} = \frac{x^2 + (4-3a)x + 4}{x(x+2)^2},$$

$$a = 4 \text{ 时, } f'(x) = \frac{x^2 - 8x + 4}{x(x+2)^2},$$

由 $f'(x) > 0$, 解得: $0 < x < 4 - 2\sqrt{3}$ 或 $x > 4 + 2\sqrt{3}$,

由 $f'(x) < 0$, 解得: $4 - 2\sqrt{3} < x < 4 + 2\sqrt{3}$,

故 $f(x)$ 在 $(0, 4 - 2\sqrt{3})$ 递增, 在 $(4 - 2\sqrt{3}, 4 + 2\sqrt{3})$ 递减, 在 $(4 + 2\sqrt{3}, +\infty)$ 递增.

(2) $\because$ 函数 $f(x)$ 在区间 $(0, 1]$ 内单调递增,

$\therefore x^2 + (4-3a)x + 4 \geq 0$ 在区间 $(0, 1]$ 内恒成立,

即 $3a \leq \frac{4}{x} + x + 4$ 在区间 $(0, 1]$ 内恒成立,

$\therefore y = \frac{4}{x} + x + 4$ 在 $x = 1$ 时取得最小值 9,

$\therefore a \leq 3$.

(3) 证明: $x_1 = x_2$, 不等式显然成立;

$x_1 \neq x_2$, 只要证明 $\ln \frac{x_1}{x_2} \leq \frac{3(x_1 - x_2)}{x_1 + 2x_2}$,

令 $t = \frac{x_1}{x_2} \in (0, 1)$, 则只要证明 $\ln t - \frac{3(t-1)}{t+2} \leq 0$ 即可 ,

由 (2) 可得 $f(x) = \ln x - \frac{3(x-1)}{x+2}$ 在 $(0, 1]$ 上是增函数 ,

$\therefore f(x) \leq f(1) = 0$,

$\therefore \ln t - \frac{3(t-1)}{t+2} \leq 0$,

$\therefore$ 不等式成立 .