

2020年和平区高二期末模拟

一、选择题

1 已知 F_1, F_2 是椭圆和双曲线的公共焦点, P 是它们的一个公共点, 且 $\angle F_1 P F_2 = \frac{\pi}{3}$, 则椭圆和双曲线的离心率的倒数之和的最大值为 () .

A. 2

B. 4

C. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

D. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

答案 D

解析 设椭圆的长半轴为 a , 双曲线的实半轴为 $a_1 (a > a_1)$, 半焦距为 c ,

由椭圆和双曲线的定义可知,

设 $|PF_1| = r_1$, $|PF_2| = r_2$, $|F_1 F_2| = 2c$,

椭圆和双曲线的离心率分别为 e_1, e_2 ,

$\because \angle F_1 P F_2 = \frac{\pi}{3}$,

$\therefore$ 由余弦定理可得 $4c^2 = (r_1)^2 + (r_2)^2 - 2r_1 r_2 \cos \frac{\pi}{3}$ ①,

在椭圆中, ①化简为即 $4c^2 = 4a^2 - 3r_1 r_2$,

即 $\frac{3r_1 r_2}{4c^2} = \frac{1}{e_1^2} - 1$ ②,

在双曲线中, ①化简为即 $4c^2 = 4a_1^2 + r_1 r_2$,

即 $\frac{r_1 r_2}{4c^2} = -\frac{1}{e_2^2} + 1$ ③,

联立②③得, $\frac{1}{e_1^2} + \frac{3}{e_2^2} = 4$,

由柯西不等式得 $\left(1 + \frac{1}{3}\right) \left(\frac{1}{e_1^2} + \frac{3}{e_2^2}\right) \geq \left(1 \times \frac{1}{e_1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{e_2}\right)^2$,

即 $\left(\frac{1}{e_1} + \frac{1}{e_2}\right)^2 \leq \frac{4}{3} \times 4 = \frac{16}{3}$,

即 $\frac{1}{e_1} + \frac{1}{e_2} \leq \sqrt{\frac{16}{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$, d 当且仅当 $e_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $e_2 = \sqrt{3}$ 时取等号.

法2: 设椭圆的长半轴为 a_1 , 双曲线的实半轴为 $a_2 (a_1 > a_2)$, 半焦距为 c ,

由椭圆和双曲线的定义可知,

设 $|PF_1| = r_1$, $|PF_2| = r_2$, $|F_1 F_2| = 2c$,

椭圆和双曲线的离心率分别为 e_1, e_2 ,

$$\therefore \angle F_1 P F_2 = \frac{\pi}{3},$$

$$\therefore \text{由余弦定理可得 } 4c^2 = (r_1)^2 + (r_2)^2 - 2r_1 r_2 \cos \frac{\pi}{3} = (r_1)^2 + (r_2)^2 - r_1 r_2,$$

$$\text{由 } \begin{cases} r_1 + r_2 = 2a_1 \\ r_1 - r_2 = 2a_2 \end{cases}, \text{ 得 } \begin{cases} r_1 = a_1 + a_2 \\ r_2 = a_1 - a_2 \end{cases},$$

$$\therefore \frac{1}{e_1} + \frac{1}{e_2} = \frac{a_1 + a_2}{c} = \frac{r_1}{c},$$

$$\text{令 } m = \frac{r_1^2}{c^2} = \frac{4r_1^2}{r_1^2 + r_2^2 - r_1 r_2} = \frac{4}{1 + \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 - \frac{r_2}{r_1}} = \frac{4}{\left(\frac{r_2}{r_1} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}},$$

$$\text{当 } \frac{r_2}{r_1} = \frac{1}{2} \text{ 时, } m_{\max} = \frac{16}{3},$$

$$\therefore \left(\frac{r_1}{c}\right)_{\max} = \frac{4\sqrt{3}}{3},$$

$$\text{即 } \frac{1}{e_1} + \frac{1}{e_2} \text{ 的最大值为 } \frac{4\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{法3: 设 } |PF_1| = m, |PF_2| = n, \text{ 则 } \begin{cases} m + n = 2a_1 \\ m - n = 2a_2 \end{cases},$$

$$\text{则 } a_1 + a_2 = m,$$

$$\text{则 } \frac{1}{e_1} + \frac{1}{e_2} = \frac{a_1 + a_2}{c} = \frac{m}{c},$$

$$\text{由正弦定理得 } \frac{m}{\sin(120^\circ - \theta)} = \frac{2c}{\sin 60^\circ},$$

$$\text{即 } \frac{m}{c} = \frac{2 \sin(120^\circ - \theta)}{\sin 60^\circ} = \frac{4}{\sqrt{3}} \sin(120^\circ - \theta) \leq \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}.$$

故选D.

2 已知两圆 $x^2 + y^2 = a^2$ 与 $(x - a + 2)^2 + (y - a)^2 = 1$ 在交点处的切线相互垂直, 则实数 a 等于 ().

A. 1

B. 3 或 $\frac{1}{3}$

C. 1 或 $\frac{1}{3}$

D. 1 或 3

答案 D

解析 两圆 $x^2 + y^2 = a^2$ 与, 其圆心为 $(0, 0)$, 半径 $r = |a|$,

$(x - a + 2)^2 + (y - a)^2 = 1$ 其圆心为 $(a - 2, a)$, 半径为 1.

两圆心的距离的平方为: $(a - 2)^2 + a^2$.

两半径分别为 $|a|$ 和 1.

$$\therefore (a - 2)^2 + a^2 = a^2 + 1,$$

解得： $a = 3$ 或 1 .

故选D .

- 3 抛物线 $y^2 = 2px$ 与直线 $2x + y + a = 0$ 交于 A, B 两点, 其中 $A(1, 2)$, 设抛物线焦点为 F , 则 $|FA| + |FB|$ 的值为() .

A. 4

B. 5

C. 6

D. 7

答案 D

解析 把点 $A(1, 2)$ 代入直线 $2x + y + a = 0$, 可得 $2 + 2 + a = 0$, 解得 $a = -4$.

把点 $A(1, 2)$ 代入抛物线 $y^2 = 2px$ 可得 $4 = 2p$, 解得 $p = 2$.

联立直线与抛物线, 化为： $x^2 - 5x + 4 = 0$,

解得 $x = 1$ 或 4 ,

$\therefore |FA| + |FB| = 1 + 4 + 2 = 7$.

故选D .

- 4 在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 4$, $a_2 = 10$, 若 $\{\log_3(a_n - 1)\}$ 为等差数列, 且

$$T_n = \frac{1}{a_2 - a_1} + \frac{1}{a_3 - a_2} + \cdots + \frac{1}{a_{n+1} - a_n} \text{ 等于 } () .$$

A. $\frac{1}{12}(3^n - 1)$

B. $\frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{3^n}\right)$

C. $\frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{3^{n+1}}\right)$

D. $\frac{1}{12}(3^{n+1} - 1)$

答案 B

解析 $\because \{\log_3(a_n - 1)\}$ 为等差数列,

$$\therefore 2\log_3(a_n - 1) = \log_3(a_{n-1} - 1) + \log_3(a_{n+1} - 1) ,$$

$$\therefore \log_3(a_n - 1)^2 = \log_3[(a_{n-1} - 1) \cdot (a_{n+1} - 1)] ,$$

$$\text{即 } (a_n - 1)^2 = (a_{n-1} - 1)(a_{n+1} - 1) ,$$

∴ 数列 $\{a_n - 1\}$ 为等比数列，

首项为 $a_1 - 1 = 3$ ，公比 $q = \frac{a_2 - 1}{a_1 - 1} = 3$ ，

∴ $a_n - 1 = 3 \cdot 3^{n-1} = 3^n$ ，

∴ $a_n = 3^n + 1$ ，

∴ $\frac{1}{a_{n+1} - a_n} = \frac{1}{3^{n+1} + 1 - 3^n - 1} = \frac{1}{2 \times 3^n}$ ，

∴ $T_n = \frac{1}{a_2 - 1} + \frac{1}{a_3 - a_2} + \cdots + \frac{1}{a_{n+1} - a_n}$

$= \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{2 \times 3^2} + \cdots + \frac{1}{2 \times 3^n}$

$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{3^n} \right)$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{3^n} \right)}{1 - \frac{1}{3}}$

$= \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{3^n} \right)$ 。

故选B。

5 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ， $a_5 + a_7 = 14$ ，则 $S_{11} = ()$ 。

A. 140

B. 70

C. 154

D. 77

答案 D

解析 ∵ 等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ， $a_5 + a_7 = 14$ ，

∴ $S_{11} = \frac{11}{2} (a_1 + a_{11}) = \frac{11}{2} (a_5 + a_7) = \frac{11}{2} \times 14 = 77$ 。

故选D。

6 设双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{9} = 1 (a > 0)$ 的渐近线方程为 $3x \pm 2y = 0$ ，则 a 的值为 ()。

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

答案 B

解析 由双曲线的标准方程 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{9} = 1 (a > 0)$ 得双曲线的焦点在 x 轴上， $b^2 = 9$ ，

渐近线方程为 $y = \pm \frac{b}{a}x$,

即 $y = \pm \frac{3}{a}x$,

由已知条件渐近线方程为 $y = \pm \frac{3}{2}x$, 所以 $a = 2$.

7 在平面直角坐标系中, A 、 B 分别是 x 轴和 y 轴上的动点, 若以 AB 为直径的圆 C 与直线 $2x + y - 4 = 0$ 相切, 则圆 C 面积的最小值为 ().

A. $\frac{3}{4}\pi$

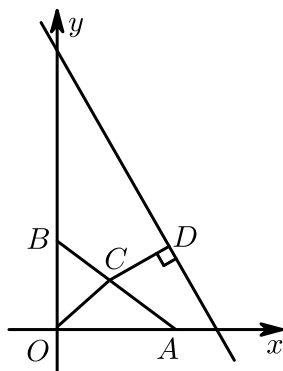
B. $\frac{4}{5}\pi$

C. $(6 - 2\sqrt{5})\pi$

D. $\frac{5}{4}\pi$

答案 B

解析 设圆的半径为 R , 如下图所示, $CD = R$,



根据直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半可知 $OC = R$,

要使圆 O 的面积最小, 那么只需半径 R 最小,

当点 O , C , D 在一条直线上时, 半径取到最小值,

则原点到直线 $2x + y - 4 = 0$ 的距离是 $2R$,

那么 $2R = \frac{|-4|}{\sqrt{5}}$,

所以 $R = \frac{2}{\sqrt{5}}$,

则圆的面积 $S = \pi R^2 = \frac{4}{5}\pi$.

8 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 $S_n - S_{n-1} = 2n - 1$ ($n \geq 2$), 且 $S_2 = 3$, 则 a_1 的值为 ().

A. 0

B. 1

C. 3

D. 5

答案 A

解析 $S_n - S_{n-1} = a_n = 2n - 1$, 所以 $a_2 = 3$, 又 $S_2 = a_1 + a_2 = 3$, 所以 $a_1 = 0$.

9 若直线 $3x + y + a = 0$ 过圆 $x^2 + y^2 + 2x - 4y = 0$ 的圆心 , 则 a 的值为 () .

A. -1

B. 1

C. 3

D. -3

答案 B

解析 圆 $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 5$,

圆心为 $(-1, 2)$,

则 $3 \times (-1) + 2 + a = 0$,

得 $a = 1$,

故选 B .

二、填空题

10 已知点 F 为抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点 , 该抛物线上位于第一象限的点 A 到其准线的距离为 5 , 则直线 AF 的斜率为 _____ .

答案 $\frac{4}{3}$

解析 抛物线准线为 $x = -1$, $F(1, 0)$,

则 $A(4, 4)$, 则 $k_{AF} = \frac{4}{3}$.

11 已知平面 α 的法向量是 $\vec{a} = (3x - 1, -1, x + 5)$, 平面 β 的法向量是 $\vec{b} = (x + 1, x^2 + 3, -x)$, 且 $\alpha \perp \beta$, 则实数 x 的值为 _____ .

答案 -1或4

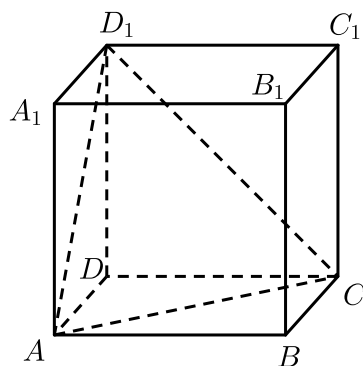
解析 $(3x-1)(x+1) + (-1)(x^2+3) + (x+5)(-x) = 0$,

整理得: $x^2 - 3x - 4 = 0$,

解得: $x = -1$ 或 $x = 4$,

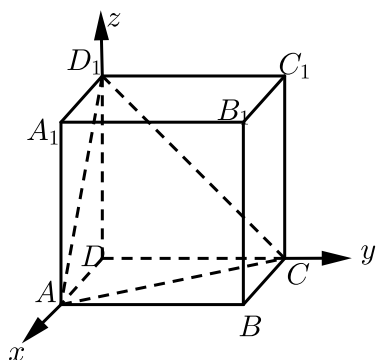
故答案为: $x = -1$ 或 $x = 4$.

- 12 如图, 在正四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 底面边长为2, 直线 CC_1 与平面 ACD_1 所成角的正弦值为 $\frac{1}{3}$, 则正四棱柱的高为 _____.



答案 4

解析 以 D 为原点, 以 DA, DC, DD_1 为坐标轴建立空间坐标系如图示,



设 $DD_1 = a$, 则 $A(2, 0, 0)$, $C(0, 2, 0)$, $D_1(0, 0, a)$,

则 $\overrightarrow{AC} = (-2, 2, 0)$, $\overrightarrow{AD_1} = (-2, 0, a)$, $\overrightarrow{CC_1} = (0, 0, a)$,

设平面 ACD_1 的法向量为 $\vec{n} = (x, y, z)$, 则 $\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{AD_1} = 0 \end{cases}$,

$\therefore \begin{cases} -2x + 2y = 0 \\ -2x + az = 0 \end{cases}$, 令 $x = 1$ 可得 $\vec{n} = \left(1, 1, \frac{2}{a}\right)$,

$$\begin{aligned} \text{故 } \cos \langle \vec{n}, \overrightarrow{CC_1} \rangle &= \frac{\vec{n} \cdot \overrightarrow{CC_1}}{|\vec{n}| |\overrightarrow{CC_1}|} = \frac{2}{a \times \sqrt{\frac{4}{a^2} + 2}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{2a^2 + 4}}. \end{aligned}$$

$\therefore$ 直线 CC_1 与平面 ACD_1 所成角的正弦值为 $\frac{1}{3}$,

$$\therefore \frac{2}{\sqrt{2a^2 + 4}} = \frac{1}{3}, \text{ 解得: } a = 4.$$

13 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 33$, $a_{n+1} - a_n = 2n$, 则 $\frac{a_n}{n}$ 的最小值为 _____.

答案

$$\frac{21}{2}$$

解析

方法一: 当 $n \geq 2$ 时

$$\begin{cases} a_n - a_{n-1} = 2(n-1) \\ a_{n-1} - a_{n-2} = 2(n-2) \\ \vdots \\ a_2 - a_1 = 2 \cdot 1 \end{cases}$$

相加得:

$$a_n - a_1 = 2[1 + 2 + \cdots + (n-1)]$$

$$= 2 \cdot \frac{n(n-1)}{2} = n^2 - n$$

$$\therefore a_1 = 33,$$

$$\therefore a_n = n^2 - n + 33 (n \geq 2),$$

$$\text{当 } n = 1 \text{ 时, } a_1 = 33,$$

$$\therefore a_n = n^2 - n + 33 (n \in \mathbf{N}^*).$$

$$\therefore \frac{a_n}{n} = \frac{n^2 - n + 33}{n} = n + \frac{33}{n} - 1,$$

当且仅当 $n = \frac{33}{n}$ 即 $n = \sqrt{33}$ 时, 取最小值,

$$\therefore n \in \mathbf{N}^*, \text{ 当 } n = 5 \text{ 时, } \frac{a_n}{n} = \frac{53}{5},$$

$$\text{当 } n = 6 \text{ 时, } \frac{a_n}{n} = \frac{21}{2} < \frac{53}{5},$$

$$\therefore \frac{a_n}{n} \text{ 的最小值为 } \frac{21}{2}.$$

方法二: $\because a_{n+1} - a_n = 2n,$

$$\therefore a_n - a_{n-1} = 2(n-1),$$

$$\therefore a_n = (a_n - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_{n-2}) + \cdots + (a_2 - a_1) + a_1$$

$$= (2n-2) + (2n-4) + \cdots + 2 + 33$$

$$= n^2 - 2n + 33 (n \geq 2),$$

又 $a_1 = 33$ 适合上式,

$$\therefore a_n = n^2 - n + 33,$$

$$\therefore \frac{a_n}{n} = n + \frac{33}{n} - 1.$$

$$\text{令 } f(x) = x + \frac{33}{x} - 1 (x > 0), \text{ 则 } f'(x) = 1 - \frac{33}{x^2},$$

$$\text{令 } f'(x) = 0 \text{ 得 } x = \sqrt{33},$$

$\therefore$ 当 $0 < x < \sqrt{33}$ 时, $f'(x) < 0$, 当 $x > \sqrt{33}$ 时, $f'(x) > 0$,

即 $f(x)$ 在区间 $(0, \sqrt{33})$ 上递减; 在区间 $(\sqrt{33}, +\infty)$ 上递增, 又 $5 < \sqrt{33} < 6$,

$$\text{且 } f(5) = 5 + \frac{33}{5} - 1 = \frac{53}{5}, f(6) = 6 + \frac{33}{6} - 1 = \frac{21}{2},$$

$$\therefore f(5) > f(6),$$

$$\therefore \text{当 } n = 6 \text{ 时, } \frac{a_n}{n} \text{ 有最小值 } \frac{21}{2}.$$

14 若点 $P(1, 1)$ 为圆 $C: (x-3)^2 + y^2 = 9$ 的弦 MN 的中点, 则弦 MN 所在直线的方程为 _____.

答案 $2x - y - 1 = 0$

解析 圆心为 $C(3, 0)$, 直线 PC 的斜率 $k_{PC} = -\frac{1}{2}$, 则弦 MN 所在直线的斜率 $k = 2$, 则弦 MN 所在直线的方程为 $y - 1 = 2(x - 1)$, 即 $2x - y - 1 = 0$.

三、解答题

15 已知公差为 0 的等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $S_4 = a_7 + 9$, 且 a_1, a_4, a_{13} 成等比数列.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

(2) 求数列 $\left\{\frac{1}{S_n}\right\}$ 的前 n 项和公式.

答案 (1) $a_n = 2n + 1$.

$$(2) T_n = \frac{n+1}{2(n+2)}.$$

解析 (1) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d ,

则由 $S_4 = a_7 + 9$, a_1, a_4, a_{13} 成等比数列,

$$\text{可得} \begin{cases} 4a_1 + 6d = a_1 + 6d + 9 \\ (a_1 + 3d)^2 = a_1(a_1 + 12d) \end{cases} ,$$

解得 $a_1 = 3, d = 2$,

$$\therefore a_n = 3 + 2(n-1) = 2n + 1 .$$

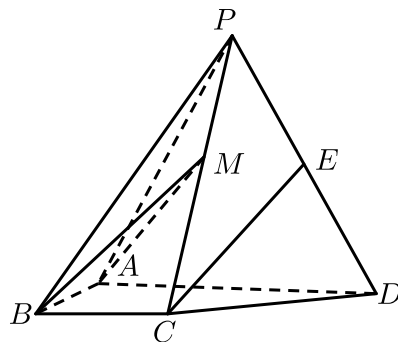
$$(2) S_n = \frac{(3 + 2n + 1)n}{2} = n(n+2) ,$$

$$\therefore \frac{1}{S_n} = \frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) ,$$

$\therefore$ 数列 $\left\{ \frac{1}{S_n} \right\}$ 的前 n 项和

$$T_n = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{n+2} \right) = \frac{n+1}{2(n+2)} .$$

- 16 如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 中, 侧面 PAD 为等边三角形且垂直于底面 $ABCD$, $AB = BC = \frac{1}{2}AD$, $\angle BAD = \angle ABC = 90^\circ$, E 是 PD 的中点.



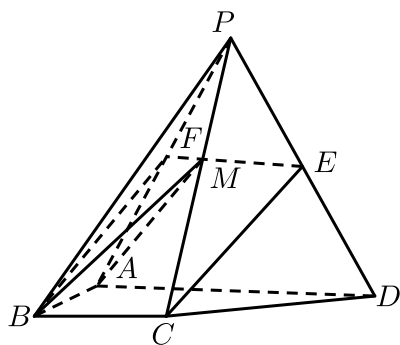
- (1) 证明: 直线 $CE \parallel$ 平面 PAB .
- (2) 点 M 在棱 PC 上, 且直线 BM 与底面 $ABCD$ 所成角为 45° , 求二面角 $M-AB-D$ 的余弦值.

答案

- (1) 证明见解析.
- (2) $\frac{\sqrt{10}}{5}$.

解析

- (1) 作点 F 为 PA 的中点,



连接 BF 、 EF ,

$\because E$ 、 F 是 PD 、 PA 的中点 ,

$\therefore EF \parallel AD$ 且 $EF = \frac{1}{2}AD$,

$\because AB = BC = \frac{1}{2}AD$,

$\angle BAD = \angle ABC = 90^\circ$,

$\therefore BC \parallel AD$ 且 $BC = \frac{1}{2}AD$,

$\therefore BC \parallel EF$ 且 $BC = EF$,

$\therefore$ 四边形 $BFEC$ 是平行四边形 ,

$\therefore CE \parallel BF$,

又 $\because BF \subset$ 平面 PAB ,

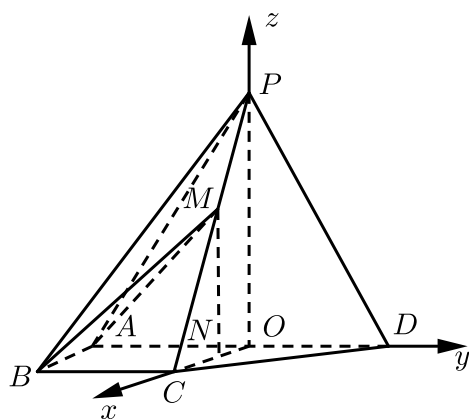
$CE \not\subset$ 平面 PAB ,

$\therefore CE \parallel$ 平面 PAB .

(2) 取 AD 中点 O , 连接 PO , CO ,

由于 $\triangle PAD$ 是正三角形 ,

$\therefore PO \perp AD$,



又 $\because$ 平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$,

平面 $PAD \cap$ 平面 $ABCD = AD$,

$\therefore PO \perp$ 平面 $ABCD$,

故以 O 为原点, OC, OD, OP 为 x, y, z 轴建立空间直角坐标系,

$$\text{设 } AB = BC = \frac{1}{2}AD = 1,$$

$$\text{则 } OA = OD = AB = CO = 1,$$

又 $\triangle POC$ 为直角三角形,

$$|OC| = \frac{\sqrt{3}}{3}|OP|,$$

$$\therefore \angle PCO = 60^\circ,$$

作 $MN \perp CO$, 垂足为 N ,

$\therefore MN \perp$ 平面 $ABCD$,

$$\text{设 } CN = t, \text{ 则 } MN = \sqrt{3}t, BN = \sqrt{t^2 + 1},$$

易知 $\angle MBN$ 为 BN 与平面 $ABCD$ 所成角为 45° ,

$$\therefore \sqrt{3}t = \sqrt{t^2 + 1},$$

$$\therefore t = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\therefore ON = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, MN = \frac{\sqrt{6}}{2},$$

$$\therefore A(0, -1, 0), B(1, -1, 0),$$

$$M\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{6}}{2}\right), D(0, 1, 0),$$

$$\text{则 } \overrightarrow{AB} = (1, 0, 0), \overrightarrow{AD} = (0, 2, 0), \overrightarrow{AM} = \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, 1, \frac{\sqrt{6}}{2}\right),$$

设平面 MAB 的法向量为 $\vec{n} = (a, b, c)$,

$$\therefore \begin{cases} \overrightarrow{AB} \cdot \vec{n} = 0 \\ \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 \end{cases},$$

$$\text{即 } \begin{cases} a = 0 \\ b + \frac{\sqrt{6}}{2}c = 0 \end{cases},$$

$$\text{可取 } \vec{n} = (0, \sqrt{6}, -2),$$

取平面 DAB 的法向量 $\vec{m} = (0, 0, 1)$,

$$\therefore \cos \langle \vec{n}, \vec{m} \rangle = \frac{\vec{n} \cdot \vec{m}}{|\vec{n}| |\vec{m}|} = \frac{-2}{\sqrt{10} \cdot 1} = -\frac{\sqrt{10}}{5},$$

$\therefore$ 二面角 $M-AB-D$ 是锐角,

$$\therefore \text{二面角 } M-AB-D \text{ 的余弦值为 } \frac{\sqrt{10}}{5}.$$

17 设椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的上顶点为 A , 右顶点为 B , 已知 $\sqrt{2}|OA| = |OB|$ (O 为原点).

(1) 求椭圆的离心率.

(2)

设点 $B(\sqrt{2}, 0)$ ，直线 $l: y = kx + m (m \neq \pm 1)$ 与椭圆交于两个不同点 M, N ，直线 AM 与 x 轴交于点 E ，直线 AN 与 x 轴交于点 F ，若 $\overrightarrow{OE} \cdot \overrightarrow{OF} = -6$ ，求证：直线 l 经过定点。

答案

(1) $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(2) 证明见解析 .

解析

(1) 设椭圆的半焦距为 c ，由已知有 $a = \sqrt{2}b$ ，

$$\text{又由 } a^2 = b^2 + c^2 ,$$

$$\text{消去 } b \text{ 得 } a^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2 + c^2 ,$$

$$\text{解得 } \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2} ,$$

$$\text{所以，椭圆的离心率为 } \frac{\sqrt{2}}{2} .$$

(2) 由点 $B(\sqrt{2}, 0)$ 知 $a = \sqrt{2}$ ，又 $\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，

$$\text{所以 } c = b = 1 ,$$

$$\text{所以椭圆的方程为 } \frac{x^2}{2} + y^2 = 1 ,$$

$$\text{设 } M(x_1, y_1), N(x_2, y_2) ,$$

$$\text{则直线 } AM \text{ 的方程为 } y = \frac{y_1 - 1}{x_1}x + 1 ,$$

$$\text{令 } y = 0 , \text{ 得点 } E \text{ 的横坐标 } x_E = -\frac{x_1}{y_1 - 1} ,$$

$$\text{所以点 } E\left(-\frac{x_1}{y_1 - 1}, 0\right) ,$$

$$\text{同理，点 } F\left(-\frac{x_2}{y_2 - 1}, 0\right) ,$$

$$\text{由 } \begin{cases} y = kx + m \\ \frac{x^2}{2} + y^2 = 1 \end{cases} \text{ 得 } (1 + 2k^2)x^2 + 4kmx + 2m^2 - 2 = 0 ,$$

$$\text{则 } x_1 + x_2 = -\frac{4km}{1 + 2k^2} , x_1x_2 = \frac{2m^2 - 2}{1 + 2k^2} ,$$

$$\text{所以 } \overrightarrow{OE} \cdot \overrightarrow{OF} = \left(-\frac{x_1}{y_1 - 1}\right) \cdot \left(-\frac{x_2}{y_2 - 1}\right)$$

$$= \frac{x_1}{kx_1 + m - 1} \cdot \frac{x_2}{kx_2 + m - 1}$$

$$= \frac{x_1x_2}{k^2x_1x_2 + k(m-1)(x_1+x_2) + (m-1)^2}$$

$$= \frac{\frac{2m^2 - 2}{1 + 2k^2}}{k^2 \cdot \frac{2m^2 - 2}{1 + 2k^2} + k(m-1) \cdot \left(-\frac{4km}{1 + 2k^2}\right) + (m-1)^2}$$

$$= 2 \frac{1+m}{m-1} ,$$

$$\text{所以 } 2 \frac{1+m}{m-1} = -6 ,$$

解得 $m = \frac{1}{2}$, 此时 $\Delta = 2k^2 - m^2 + 1 = 2k^2 + \frac{3}{4} > 0$,
所以直线 l 经过定点 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$.

18 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 满足 $S_n = \frac{n^2 + n}{2} (n \in \mathbf{N})$.

- (1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 .
- (2) 设 $b_n = a_n \cdot 3^{a_n} (n \in \mathbf{N})$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

答案

- (1) $a_n = n$.
- (2) $T_n = \frac{3}{4} + \left(\frac{n}{2} - \frac{1}{4}\right) \cdot 3^{n+1}$.

解析

- (1) 当 $n \geq 2$,

$$a_n = S_n - S_{n-1} = n ,$$

当 $n = 1$ 时 ,

$$a_1 = S_1 = 1 ,$$

符合上式 ,

综上 , $a_n = n$.

- (2) $b_n = n \cdot 3^n$,

$$\text{则 } T_n = 1 \cdot 3^1 + 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3^3 + \cdots + n \cdot 3^n ,$$

$$3T_n = 1 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^3 + 3 \cdot 3^4 + \cdots + n \cdot 3^{n+1} ,$$

$$\therefore -2T_n = 3 + 3^2 + \cdots + 3^n - n \cdot 3^{n+1} = \frac{3(1-3^n)}{1-3} - n \cdot 3^{n+1} ,$$

$$\therefore T_n = \frac{3}{4} + \left(\frac{n}{2} - \frac{1}{4}\right) \cdot 3^{n+1} .$$