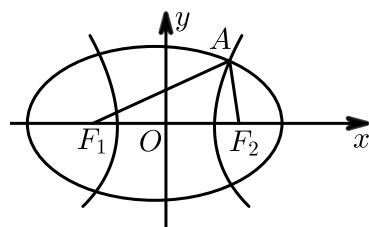


2020天津一中高二期末

一、选择题

- 1 若直线 $l_1: x + ay + 6 = 0$ 与 $l_2: (a - 2)x + 3y + 2a = 0$ 平行, 则 l_1 与 l_2 间的距离为().
 A. $\sqrt{2}$ B. $\frac{8\sqrt{2}}{3}$ C. $\sqrt{3}$ D. $\frac{8\sqrt{3}}{3}$
- 2 曲线 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ 与曲线 $\frac{x^2}{25-k} + \frac{y^2}{9-k} = 1 (k < 9)$ 的().
 A. 长轴长相等 B. 短轴长相等 C. 离心率相等 D. 焦距相等
- 3 已知 S_n 是等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 则“ $S_n < na_n$ 对 $n \geq 2$ 恒成立”是“数列 $\{a_n\}$ 为递增数列”的().
 A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件
 C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件
- 4 设 $\{a_n\}$ 是首项为 a_1 , 公差为 -1 的等差数列, S_n 为其前 n 项和, 若 S_1, S_2, S_4 成等比数列, 则 $a_1 =$ ().
 A. 2 B. -2 C. $\frac{1}{2}$ D. $-\frac{1}{2}$
- 5 已知直线 $(2a + 1)x + (3a - 1)y - 4a + 3 = 0 (a \in \mathbf{R})$ 恒过定点 p , 则过点 p 抛物线的标准方程是().
 A. $y^2 = -\frac{1}{2}x$ 或 $x^2 = 4y$ B. $x^2 = -\frac{1}{2}y$ 或 $y^2 = 4x$
 C. $x^2 = \frac{1}{2}y$ 或 $y^2 = -4x$ D. $y^2 = \frac{1}{2}x$ 或 $x^2 = -4y$
- 6 如图 F_1, F_2 是双曲线 $C_1: x^2 - \frac{y^2}{8} = 1$ 与椭圆 C_2 的公共焦点, 点 A 是 C_1, C_2 在第一象限内的公共点, 若 $|F_1F_2| = |F_1A|$, 则 C_2 的离心率是().



- A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{4}{5}$ C. $\frac{3}{5}$ D. $\frac{2}{5}$

7 已知 $\{a_n\}$ 是首项为1的等比数列， S_n 是 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，且 $9S_3 = S_6$ ，则数列 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 的前5项和为（ ）。

- A. $\frac{15}{8}$ 或5 B. $\frac{31}{16}$ 或5 C. $\frac{31}{16}$ D. $\frac{15}{8}$

8 已知 a 为常数，若曲线 $y = ax^2 + 3x - \ln x$ 存在与直线 $x + y - 1 = 0$ 垂直的切线，则实数 a 的取值范围是（ ）。

- A. $\left[-\frac{1}{2}, +\infty\right)$ B. $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right]$ C. $[-1, +\infty)$ D. $(-\infty, -1]$

9 已知点 P 是抛物线 $x = \frac{1}{4}y^2$ 上的一个动点，则点 P 到点 $A(0, 2)$ 的距离与点 P 到 y 轴的距离之和的最小值为（ ）。

- A. 2 B. $\sqrt{5}$ C. $\sqrt{5} - 1$ D. $\sqrt{5} + 1$

10 设 F_1, F_2 分别为双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点，双曲线上存在一点 P 使得 $|PF_1| + |PF_2| = 3b$ ， $|PF_1| \cdot |PF_2| = \frac{9}{4}ab$ ，则该双曲线的离心率为（ ）。

- A. $\frac{4}{3}$ B. $\frac{5}{3}$ C. $\frac{9}{4}$ D. 3

二、填空题

11 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$ ， $a_n = 2a_{n-1} + 1 (n \in \mathbf{N}^*, n \geq 2)$ ，则 $a_2 =$ _____， $a_{10} =$ _____。

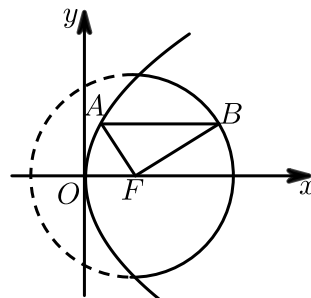
12 若圆 $x^2 + y^2 = 4$ 与圆 $x^2 + y^2 + 2ay - 6 = 0 (a > 0)$ 的公共弦长为 $2\sqrt{3}$ ，则 $a =$ _____。

13 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的两条渐近线均和圆 $C: x^2 + y^2 - 6x + 5 = 0$ 相切, 且双曲线的右焦点为圆 C 的圆心, 则该双曲线的方程为 _____.

14 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$, 且 $a_{n+1} - a_n = n + 1 (n \in \mathbf{N}^*)$, 则数列 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 的前 10 项和为 _____.

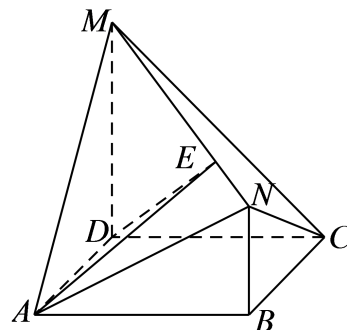
15 椭圆 $\Gamma: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左右焦点分别为 F_1, F_2 , 焦距为 $2c$, 若直线 $y = \sqrt{3}(x + c)$ 与椭圆 Γ 的一个交点 M 满足 $\angle MF_1F_2 = 2\angle MF_2F_1$, 则该椭圆的离心率等于 _____.

16 如图所示, 点 F 是抛物线 $y^2 = 8x$ 的焦点, 点 A, B 分别在抛物线 $y^2 = 8x$ 及圆 $(x - 2)^2 + y^2 = 16$ 的实线部分上运动, 且 AB 总是平行于 x 轴, 则 $\triangle FAB$ 的周长的取值范围是 _____.



三、解答题

17 如图, 四边形 $ABCD$ 是边长为 2 的正方形, $MD \perp$ 平面 $ABCD$, $NB \parallel MD$, 且 $NB = 1, MD = 2$.



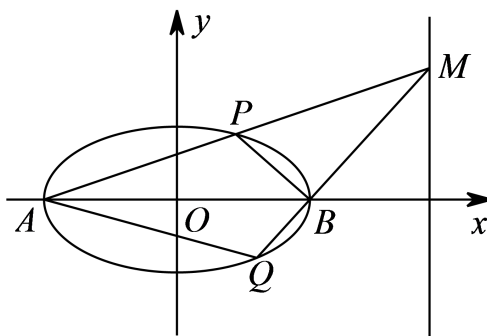
(1) 求证: $AM \parallel$ 平面 BCN .

(2) 求 AN 与平面 MNC 所成角的正弦值.

(3) E 为直线 MN 上一点, 且平面 $ADE \perp$ 平面 MNC , 求 $\frac{ME}{MN}$ 的值.

- 18 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{1}{2}$ ，以椭圆长、短轴四个端点为顶点的四边形的面积为 $4\sqrt{3}$ 。

- (1) 求椭圆 C 的方程。
- (2) 如图所示，记椭圆的左、右顶点分别为 A 、 B ，当动点 M 在定直线 $x = 4$ 上运动时，直线 AM 、 BM 分别交椭圆于两点 P 、 Q ，求四边形 $APBQ$ 面积的最大值。



- 19 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的公差 $d > 0$ ，首项 $a_1 = 1$ ，且 $2a_1$ ， $a_2 + 1$ ， $a_3 + 3$ 成等比数列。

- (1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式。
- (2) 求数列 $\left\{ \frac{1}{a_n a_{n+1}} \right\}$ 的前 n 项和 P_n 。
- (3) 比较 P_n 与 $\frac{2^n}{n^2}$ 的大小。

- 20 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ， $a_1 = 1$ ， $a_{n+1} = \lambda S_n + 1 (n \in \mathbf{N}^*, \lambda > 0)$ ，且 a_1 ， $a_2 + 2$ ， $a_3 + 3$ 成等比数列。

- (1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式。
- (2) 设 $b_{n+1} = 2b_n + a_{n+1}$ ， $b_1 = 2$ ，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n 。
- (3) 设 $c_n = \frac{a_{n+1}}{(1+a_n)(1+a_{n+1})}$ ， R_n 是数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和，若对任意 $n \in \mathbf{N}^*$ 均有 $R_n < \lambda$ 恒成立，求 λ 的最小值。