

2020年南开区高一期末模拟

一、选择题

1 已知全集 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ ，集合 $A = \{2, 3, 5, 6\}$ ，集合 $B = \{1, 3, 4, 6, 7\}$ ，则集合 $A \cap \complement_U B =$ () .

A. $\{2, 5\}$

B. $\{3, 6\}$

C. $\{2, 5, 6\}$

D. $\{2, 3, 5, 6, 8\}$

答案 A

解析 $\because \complement_U B = \{2, 5, 8\}$
 $\therefore A \cap \complement_U B = \{2, 5\}$
 故选A .

2 命题“ $\forall x \in [0, +\infty)$ ， $x^3 + x \geq 0$ ”的否定是 () .

A. $\forall x \in (-\infty, 0)$ ， $x^3 + x < 0$

B. $\forall x \in (-\infty, 0)$ ， $x^3 + x \geq 0$

C. $\exists x_0 \in [0, +\infty)$ ， $x_0^3 + x_0 < 0$

D. $\exists x_0 \in [0, +\infty)$ ， $x_0^3 + x_0 \geq 0$

答案 C

解析 $\because$ 命题“ $\forall x \in [0, +\infty)$ ， $x^3 + x \geq 0$ ”，
 $\therefore$ 命题的否定是 $\exists x_0 \in [0, +\infty)$ ， $x_0^3 + x_0 < 0$ ，
 故选C .

3 下列函数中是奇函数的是 () .

A. $y = x + \sin x$

B. $y = |x| - \cos x$

C. $y = x \sin x$

D. $y = |x| \cos x$

答案 A

解析 A, $y = x + \sin x$, 有 $f(-x) = -x - \sin x = -f(x)$, 为奇函数.

B, $y = |x| - \cos x$, $f(-x) = |-x| - \cos(-x) = x \sin x = f(x)$, 为偶函数.

C, $y = x \sin x$, $f(-x) = (-x) \sin(-x) = x \sin x = f(x)$, 为偶函数.

D, $y = |x| \cos x$, $f(-x) = |-x| \cos(-x) = f(x)$, 为偶函数.

故选: A.

4 设 $a, b \in \mathbf{R}$, 则“ $a > b > 1$ ”是“ $a - b < a^2 - b^2$ ”的 ().

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充分必要条件

D. 既不充分也不必要条件

答案 A

解析 设命题 $p: a > b > 1$; 则 $a - b > 0$,

命题 $q: a - b < a^2 - b^2$ 化简得

$$(a - b) < (a + b)(a - b),$$

又 $\because a, b \in \mathbf{R}$,

$\therefore p \Rightarrow q$, q 推不出 p ,

$\therefore p$ 是 q 的充分不必要条件,

即“ $a > b > 1$ ”是“ $a - b < a^2 - b^2$ ”的充分不必要条件,

故选: A.

5 已知 α 是第二象限的角, $P(x, 3)$ 为其终边上的一点, 且 $\sin \alpha = \frac{3}{5}$, 则 $x =$ ().

A. -4

B. ± 4

C. -5

D. ± 5

答案 A

解析 由三角函数的定义可知 $\sin \alpha = \frac{3}{\sqrt{x^2 + 9}} = \frac{3}{5}$, 又已知 α 是第二象限的角,

$\therefore x = -4$ ，故选A.

6 设 $a = 0.99^{3.3}$ ， $b = 3.3^{0.99}$ ， $c = \log_{3.3} 0.99$ ，则（ ）.

A. $c < b < a$

B. $c < a < b$

C. $a < b < c$

D. $a < c < b$

答案 B

解析 $\because 0.99^{3.3} < 0.99^{0.99}$ ， $0.99^{0.99} < 3.3^{0.99}$ ，

$\therefore 0 < a = 0.99^{3.3} < b = 3.3^{0.99}$ ，

又 $c = \log_{3.3} 0.99 < 0$ ，

$\therefore c < a < b$.

故选：B.

7 已知扇形的半径为9，圆心角为 120° ，则扇形的弧长为 _____，面积为 _____.

答案 $1:6\pi$

$2:27\pi$

解析 弧长 $9 \times \frac{2\pi}{3} = 6\pi$ ，面积 $S = \frac{1}{2}lr = 27\pi$.

8 要得到函数 $y = \sqrt{2} \cos x$ 的图象，只需将函数 $y = \sqrt{2} \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$ 的图象上所有的点（ ）.

A. 横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ 倍（纵坐标不变），再向左平行移动 $\frac{\pi}{8}$ 个单位长度

B. 横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ 倍（纵坐标不变），再向右平行移动 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度

C. 横坐标伸长到原来的2倍（纵坐标不变），再向右平行移动 $\frac{\pi}{8}$ 个单位长度

D. 横坐标伸长到原来的2倍（纵坐标不变），再向左平行移动 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度

答案 D

解析 据三角形函数图象性质，首先需将横坐标伸长到原来的2倍，得到 $y = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ ，

再向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位可得 $y = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{2} \cos x$,

故本题正确答案为D.

- 9 已知定义域为 $(-1, 1)$ 的奇函数 $y = f(x)$ 又是减函数, 且 $f(a-3) + f(9-a^2) < 0$, 则 a 的取值范围是().

- A. $(2\sqrt{2}, 3)$ B. $(3, \sqrt{10})$ C. $(2\sqrt{2}, 4)$ D. $(-2, 3)$

答案 A

解析 $\because f(a-3) + f(9-a^2) < 0$,

$$\therefore f(a-3) < -f(9-a^2) = f(a^2-9)$$

又 $\because y = f(x)$ 在 $(-1, 1)$ 上单调递减,

$$\therefore \begin{cases} -1 < a-3 < 1 \\ a-3 > a^2-9 \\ -1 < a^2-9 < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 < a < 4 \\ -2 < a < 3 \\ -\sqrt{10} < a < -2\sqrt{2} \text{ 或 } 2\sqrt{2} < a < \sqrt{10} \end{cases}$$

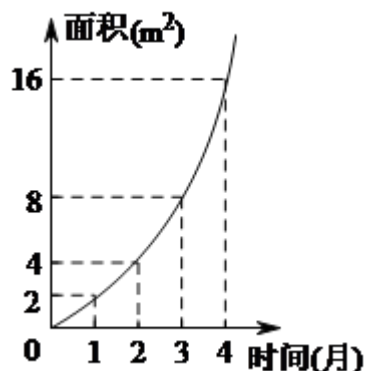
$$\therefore a \in (2\sqrt{2}, 3).$$

故选A.

- 10 最近几年, 每年11月初, 黄浦江上漂浮着的水葫芦便会迅速增长, 严重影响了市容景观, 为了解决这个环境问题, 科研人员进行科研攻关, 如图是科研人员在实验室池塘中观察水葫芦面积与时间的函数关系图象, 假设其函数关系为指数函数, 并给出下列说法:

- ①此指数函数的底数为2;
②在第5个月时, 水葫芦的面积会超过 30m^2 ;
③设水葫芦面积蔓延至 2m^2 、 3m^2 、 6m^2 所需要的时间分别为 t_1 、 t_2 、 t_3 , 则有 $t_1 + t_2 = t_3$.

其中正确的说法有().



- A. ①② B. ②③ C. ①③ D. ①②③

答案 D

解析 由图得其关系为指数函数，

①因图象过(4,16)点，所以指数函数的底数为2，故①正确．

②当 $t = 5$ 时， $s = 32 > 30$ ，故②正确．

③由图得 $t_1 = \log_2 2 = 1$ ， $t_2 = \log_2 3$ ， $t_3 = \log_2 6$ ，

则 $t_1 + t_2 = t_3$ ，故③正确，

综上可知①②③正确．

故选：D．

二、填空题

11 已知 $\cos(\alpha - \beta) = \frac{5}{13}$ ， $\sin \alpha = -\frac{4}{5}$ ， $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ ， $\beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ，则 $\cos \beta$ 的值为_____．

答案 $\frac{63}{65}$

解析 $\cos(\alpha - \beta) = \frac{5}{13}$ ， $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ ， $\beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ， $\sin \alpha = -\frac{4}{5}$ ，

$$\therefore \cos \alpha = \frac{3}{5}，$$

$$\therefore \alpha - \beta \in (-\pi, 0)，$$

$$\therefore \sin(\alpha - \beta) = -\frac{12}{13}，$$

$$\therefore \cos \beta = \cos[\alpha - (\alpha - \beta)]$$

$$= \cos \alpha \cdot \cos(\alpha - \beta) + \sin \alpha \cdot \sin(\alpha - \beta)，$$

$$\cos \beta = \frac{3}{5} \times \frac{5}{13} + \left(-\frac{4}{5}\right) \times \left(-\frac{12}{13}\right) = \frac{63}{65}．$$

12 不等式 $x^2 + 2x - 3 < 0$ 的解集是_____．

答案 $\{x | -3 < x < 1\}$

解析 不等式 $x^2 + 2x - 3 < 0$ ，即 $(x + 3)(x - 1) < 0$ ，

解得 $-3 < x < 1$.

故答案为 : $\{x | -3 < x < 1\}$.

13 函数 $f(x) = \frac{3x^2}{\sqrt{1-x}} + \lg(3x+1)$ 的定义域是 _____ .

答案 $\left(-\frac{1}{3}, 1\right)$

解析 方法一 : 自变量 x 需满足 $\begin{cases} 1-x > 0 \\ 3x+1 > 0 \end{cases}$, 解得 $x \in \left(-\frac{1}{3}, 1\right)$.

方法二 : 由 $\begin{cases} 1-x > 0 \\ 3x+1 > 0 \end{cases}$, 解得 : $-\frac{1}{3} < x < 1$.

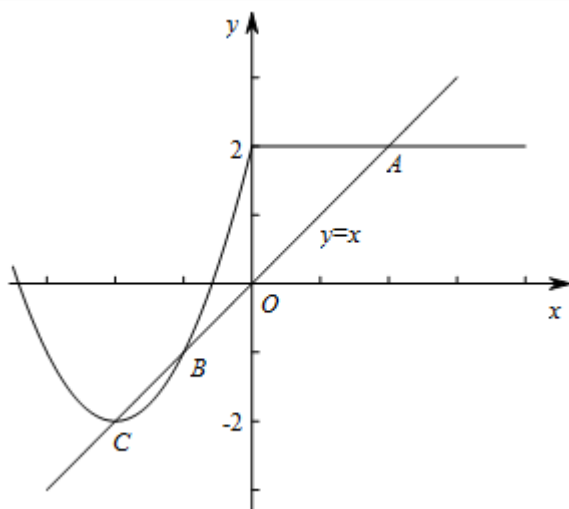
$\therefore$ 函数 $f(x) = \frac{3x^2}{\sqrt{1-x}} + \lg(3x+1)$ 的定义域是 $\left(-\frac{1}{3}, 1\right)$.

故答案为 : $\left(-\frac{1}{3}, 1\right)$.

14 直线 $y = x$ 与函数 $f(x) = \begin{cases} 2, & x > m \\ x^2 + 4x + 2, & x \leq m \end{cases}$ 的图象恰有三个公共点 , 则实数 m 的取值范围是 _____ .

答案 $[-1, 2)$

解析 根据题意 , 直线 $y = x$ 与射线 $y = 2 (x > m)$ 有一个交点 $A(2, 2)$,



并且与抛物线 $y = x^2 + 4x + 2$ 在 $(-\infty, m]$ 上的部分有两个交点 B 、 C ,

由 $\begin{cases} y = x \\ y = x^2 + 4x + 2 \end{cases}$, 连解得 $B(-1, -1)$, $C(-2, -2)$,

∵ 抛物线 $y = x^2 + 4x + 2$ 在 $(-\infty, m]$ 上的部分必须包含 B 、 C 两点，

且点 $A(2, 2)$ 一定在射线 $y = 2(x > m)$ 上，才能使 $y = f(x)$ 图象与 $y = x$ 有 3 个交点，

∴ 实数 m 的取值范围是 $-1 \leq m < 2$ 。

故答案为 $-1 \leq m < 2$ 。

15 已知 $xy > 0$ ， $x + y = 3$ ，则 $\frac{x^2}{y+1} + \frac{y^2}{x+2}$ 的最小值为 _____。

答案 $\frac{3}{2}$

解析 方法一：原式 $= \left(\frac{x^2}{y+1} + \frac{y^2}{x+2} \right) [(y+1) + (x+2)] \times \frac{1}{6}$
 $= \left[x^2 + y^2 + \frac{x^2(x+2)}{y+1} + \frac{y^2(y+1)}{x+2} \right] \times \frac{1}{6}$
 $\geq \frac{1}{6} \times (x^2 + y^2 + 2xy)$
 $= \frac{1}{6} \times (x+y)^2$
 $= \frac{3}{2}$ 。

故答案为： $\frac{3}{2}$ 。

方法二： $xy > 0$ ， $x + y = 3$ ，可得 $x > 0$ ， $y > 0$ ，

由柯西不等式可得

$$[(y+1) + (x+2)] \left(\frac{x^2}{y+1} + \frac{y^2}{x+2} \right) \geq \left[\sqrt{y+1} \cdot \frac{x}{\sqrt{y+1}} + \sqrt{x+2} \cdot \frac{y}{\sqrt{x+2}} \right]^2$$

$$= (x+y)^2 = 9，$$

$$\text{可得 } \frac{x^2}{y+1} + \frac{y^2}{x+2} \geq \frac{9}{x+y+3} = \frac{3}{2}，$$

$$\text{当 } \frac{y+1}{x} = \frac{x+2}{y}，$$

$$\text{即有 } x = \frac{4}{3}，y = \frac{5}{3} \text{ 时，}$$

$$\frac{x^2}{y+1} + \frac{y^2}{x+2} \text{ 最小值为 } \frac{3}{2}，$$

故答案为： $\frac{3}{2}$ 。

三、解答题

计算下列指对数式的值:

(1) $(\log_3 4 - \log_3 32) \log_2 3^{-1}$

(2) $0.3^0 + 3^{1+\log_3 5}$.

答案

(1) 3

(2) 16

解析

(1) 原式 $= (\log_3 32 - \log_3 4) \cdot \log_2 3 = \log_3 8 \cdot \log_2 3 = 3 \log_3 2 \cdot \log_2 3 = 3$ (换底公式)

(2) 原式 $= 1 + 3^{\log_3 15} = 1 + 15 = 16$

17

已知函数 $f(x) = \begin{cases} 4 - x^2, & x > 0 \\ 2, & x = 0 \\ 1 - 2x, & x < 0 \end{cases}$.

(1) 求 $f[f(-2)]$ 的值.

(2) 求 $f(a^2 + 1) (a \in \mathbf{R})$.

(3) 当 $-4 \leq x < 3$ 时, 求函数 $f(x)$ 的值域.

答案

(1) -21.

(2) $f(a^2 + 1) = -a^4 - 2a^2 + 3$.

(3) $(-5, 9]$.

解析

(1) 根据题意可得 $f(-2) = 1 - (-4) = 5$,

$f[f(-2)] = f(5) = 4 - 25 = -21$.

(2) 由于 $a^2 + 1 > 0$,

故 $f(a^2 + 1) = 4 - (a^2 + 1)^2 = -a^4 - 2a^2 + 3$.

(3) ① 当 $-4 \leq x < 0$ 时, $f(x) = 1 - 2x$, 所以 $1 < f(x) \leq 9$;

② 当 $x = 0$ 时, $f(0) = 2$;

③ 当 $0 < x < 3$ 时, $f(x) = 4 - x^2$, 所以 $-5 < f(x) < 4$,

故当 $-4 \leq x < 3$ 时, 函数 $f(x)$ 的值域是 $(-5, 9]$.

18

已知 α 是第四象限角，且 $\cos \alpha = \frac{12}{13}$.

(1) 求 $\sin \alpha$ 和 $\tan \alpha$ 的值 .

(2) 求 $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \cdot \tan(\pi - \alpha)$ 的值 .

答案

$$(1) \sin \alpha = -\frac{5}{13}, \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\frac{5}{12} .$$

$$(2) \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \cdot \tan(\pi - \alpha) = \frac{5}{13}$$

解析

$$(1) \text{ 由 } \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \text{ 得 } \sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} ,$$

$\because \alpha$ 是第四象限角， $\sin \alpha < 0$,

$$\therefore \sin \alpha = -\frac{5}{13}, \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\frac{5}{12} .$$

$$(2) \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \cdot \tan(\pi - \alpha) = \cos \alpha \cdot (-\tan \alpha) = -\sin \alpha = \frac{5}{13} .$$

19 已知函数 $f(x) = x^2 - 2ax + a^2 - 1$.

(1) 若函数 $f(x)$ 在区间 $[0, 2]$ 上是单调的，求实数 a 的取值范围 .

(2) 当 $x \in [-1, 1]$ 时，求函数 $f(x)$ 的最小值 $g(a)$.

(3) 当 $x \in [-1, 1]$ 时， $f(x) \geq 3$ 恒成立，求实数 a 的取值范围 .

答案

$$(1) a \geq 2 \text{ 或 } a \leq 0 .$$

$$(2) g(a) = \begin{cases} a^2 - 2a, & a > 1 \\ -1, & -1 < a \leq 1 \\ a^2 + 2a, & a \leq -1 \end{cases} .$$

$$(3) a \text{ 的取值范围为 } (-\infty, -3] \cup [3, +\infty) .$$

解析

$$(1) f(x) = x^2 - 2ax + a^2 - 1 = (x - a)^2 - 1, \text{ 对称轴上为 } x = a ,$$

$\therefore f(x)$ 在区间 $[0, 2]$ 上是单调的， $\therefore a \geq 2$ 或 $a \leq 0$.

$$(2) \text{ 当 } a \leq -1 \text{ 时，} f(x) \text{ 在区间 } [-1, 1] \text{ 上单调递增，} f(x)_{\min} = f(-1) = a^2 + 2a, \text{ 即}$$

$g(a) = a^2 + 2a$; 当 $-1 < a \leq 1$ 时， $f(x)$ 在区间 $[-1, a]$ 上单调递减，在 $(a, 1]$ 上单调递增；

$\therefore f(x)_{\min} = f(a) = -1$ ，即 $g(a) = -1$. 当 $a > 1$ 时， $f(x)$ 在区间 $[-1, 1]$ 上单调递减，

$f(x)_{\min} = f(1) = a^2 - 2a$ ，即 $g(a) = a^2 - 2a$;

$$\text{综上, } g(a) = \begin{cases} a^2 - 2a, & a > 1 \\ -1, & -1 < a \leq 1 \\ a^2 + 2a, & a \leq -1 \end{cases}.$$

(3) 由题意知, $x \in [-1, 1]$, $f(x) \geq 3$ 恒成立, 则 $f(x)_{\min} \geq 3$;

由(2)知, 当 $a > 1$ 时, $f(x)_{\min} = g(a) = a^2 - 2a \geq 3$, 解得 $a \geq 3$ 或 $a \leq -1$,

即 $a \geq 3$; 当 $-1 < a \leq 1$ 时, $f(x)_{\min} = g(a) = -1$, 不满足 $f(x)_{\min} \geq 3$, 舍去;

当 $a \leq -1$ 时, $f(x)_{\min} = g(a) = a^2 + 2a \geq 3$, 解得 $a \geq 1$ 或 $a \leq -3$, 即 $a \leq -3$;

综上, a 的取值范围为 $(-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$.

20 已知函数 $f(x) = \sin^2 2x + \sqrt{3} \sin 2x \cdot \cos 2x$.

(1) 求 $f(x)$ 的最小正周期;

(2) 若 $x \in \left[\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{4}\right]$, 求 $f(x)$ 的最大值与最小值.

答案

(1) $\frac{\pi}{2}$.

(2) 最大值 $\frac{3}{2}$; 最小值 1.

解析

$$\begin{aligned} (1) \quad f(x) &= \frac{1 - \cos 4x}{2} + \sqrt{3} \sin 2x \cdot \cos 2x \\ &= \frac{1 - \cos 4x}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 4x \\ &= \sin\left(4x - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

因为 $T = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$, 所以 $f(x)$ 的最小正周期是 $\frac{\pi}{2}$.

(2) 由(1)得, $f(x) = \sin\left(4x - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{1}{2}$.

因为 $\frac{\pi}{8} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$, 所以 $\frac{\pi}{3} \leq 4x - \frac{\pi}{6} \leq \frac{5\pi}{6}$,

所以 $\frac{1}{2} \leq \sin\left(4x - \frac{\pi}{6}\right) \leq 1$,

所以 $1 \leq \sin\left(4x - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{1}{2} \leq \frac{3}{2}$.

所以, 当 $x = \frac{\pi}{6}$ 时, $f(x)$ 取得最大值 $\frac{3}{2}$;

当 $x = \frac{\pi}{4}$ 时, $f(x)$ 取得最小值 1.