

2020年南开区高一期末模拟

一、选择题

1 已知全集 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ ，集合 $A = \{2, 3, 5, 6\}$ ，集合 $B = \{1, 3, 4, 6, 7\}$ ，则集合 $A \cap \complement_U B =$ () .

- A. $\{2, 5\}$ B. $\{3, 6\}$ C. $\{2, 5, 6\}$ D. $\{2, 3, 5, 6, 8\}$

2 命题“ $\forall x \in [0, +\infty)$ ， $x^3 + x \geq 0$ ”的否定是 () .

- A. $\forall x \in (-\infty, 0)$ ， $x^3 + x < 0$ B. $\forall x \in (-\infty, 0)$ ， $x^3 + x \geq 0$
C. $\exists x_0 \in [0, +\infty)$ ， $x_0^3 + x_0 < 0$ D. $\exists x_0 \in [0, +\infty)$ ， $x_0^3 + x_0 \geq 0$

3 下列函数中是奇函数的是 () .

- A. $y = x + \sin x$ B. $y = |x| - \cos x$ C. $y = x \sin x$ D. $y = |x| \cos x$

4 设 $a, b \in \mathbf{R}$ ，则“ $a > b > 1$ ”是“ $a - b < a^2 - b^2$ ”的 () .

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件

5 已知 α 是第二象限的角， $P(x, 3)$ 为其终边上的一点，且 $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ ，则 $x =$ () .

- A. -4 B. ± 4 C. -5 D. ± 5

6 设 $a = 0.99^{3.3}$ ， $b = 3.3^{0.99}$ ， $c = \log_{3.3} 0.99$ ，则 () .

- A. $c < b < a$ B. $c < a < b$ C. $a < b < c$ D. $a < c < b$

7 已知扇形的半径为 9，圆心角为 120° ，则扇形的弧长为 _____，面积为 _____.

8 要得到函数 $y = \sqrt{2} \cos x$ 的图象，只需将函数 $y = \sqrt{2} \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$ 的图象上所有的点（ ）。

- A. 横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ 倍（纵坐标不变），再向左平行移动 $\frac{\pi}{8}$ 个单位长度
- B. 横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ 倍（纵坐标不变），再向右平行移动 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度
- C. 横坐标伸长到原来的 2 倍（纵坐标不变），再向右平行移动 $\frac{\pi}{8}$ 个单位长度
- D. 横坐标伸长到原来的 2 倍（纵坐标不变），再向左平行移动 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度

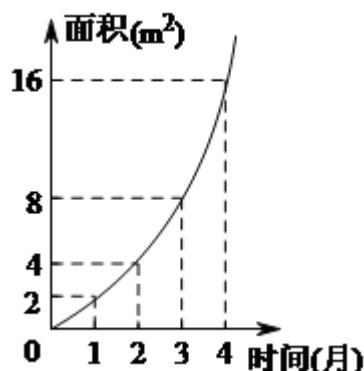
9 已知定义域为 $(-1, 1)$ 的奇函数 $y = f(x)$ 又是减函数，且 $f(a-3) + f(9-a^2) < 0$ ，则 a 的取值范围是（ ）。

- A. $(2\sqrt{2}, 3)$
- B. $(3, \sqrt{10})$
- C. $(2\sqrt{2}, 4)$
- D. $(-2, 3)$

10 最近几年，每年 11 月初，黄浦江上漂浮着的水葫芦便会迅速增长，严重影响了市容景观，为了解决这个环境问题，科研人员进行科研攻关，如图是科研人员在实验室池塘中观察水葫芦面积与时间的函数关系图象，假设其函数关系为指数函数，并给出下列说法：

- ①此指数函数的底数为 2；
- ②在第 5 个月时，水葫芦的面积会超过 30m^2 ；
- ③设水葫芦面积蔓延至 2m^2 、 3m^2 、 6m^2 所需要的时间分别为 t_1 、 t_2 、 t_3 ，则有 $t_1 + t_2 = t_3$ 。

其中正确的说法有（ ）。



- A. ①②
- B. ②③
- C. ①③
- D. ①②③

二、填空题

11 已知 $\cos(\alpha - \beta) = \frac{5}{13}$ ， $\sin \alpha = -\frac{4}{5}$ ， $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ ， $\beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ，则 $\cos \beta$ 的值为 _____。

12 不等式 $x^2 + 2x - 3 < 0$ 的解集是 _____。

13 函数 $f(x) = \frac{3x^2}{\sqrt{1-x}} + \lg(3x+1)$ 的定义域是 _____ .

14 直线 $y = x$ 与函数 $f(x) = \begin{cases} 2, & x > m \\ x^2 + 4x + 2, & x \leq m \end{cases}$ 的图象恰有三个公共点, 则实数 m 的取值范围是 _____ .

15 已知 $xy > 0$, $x + y = 3$, 则 $\frac{x^2}{y+1} + \frac{y^2}{x+2}$ 的最小值为 _____ .

三、解答题

16 计算下列指对数式的值:

(1) $(\log_3 4 - \log_3 32) \log_2 3^{-1}$

(2) $0.3^0 + 3^{1+\log_3 5}$.

17 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 4 - x^2, & x > 0 \\ 2, & x = 0 \\ 1 - 2x, & x < 0 \end{cases}$.

- (1) 求 $f[f(-2)]$ 的值 .
- (2) 求 $f(a^2 + 1) (a \in \mathbf{R})$.
- (3) 当 $-4 \leq x < 3$ 时, 求函数 $f(x)$ 的值域 .

18 已知 α 是第四象限角, 且 $\cos \alpha = \frac{12}{13}$.

- (1) 求 $\sin \alpha$ 和 $\tan \alpha$ 的值 .
- (2) 求 $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \cdot \tan(\pi - \alpha)$ 的值 .

19 已知函数 $f(x) = x^2 - 2ax + a^2 - 1$.

- (1) 若函数 $f(x)$ 在区间 $[0, 2]$ 上是单调的, 求实数 a 的取值范围 .
- (2) 当 $x \in [-1, 1]$ 时, 求函数 $f(x)$ 的最小值 $g(a)$.
- (3) 当 $x \in [-1, 1]$ 时, $f(x) \geq 3$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围 .

20 已知函数 $f(x) = \sin^2 2x + \sqrt{3} \sin 2x \cdot \cos 2x$.

- (1) 求 $f(x)$ 的最小正周期 ;
- (2) 若 $x \in \left[\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{4} \right]$, 求 $f(x)$ 的最大值与最小值 .