

解答题训练3 (数列创新)

一、单调性型

1 已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = \frac{1}{2}a_{n+1} = \frac{a_n}{2a_n + 3} (n \in \mathbf{N}^*)$.

(1) 求证: $\left\{\frac{1}{a_n} + 1\right\}$ 是等比数列, 并求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

(2) 已知数列 $\{b_n\}$, 满足 $b_n = \frac{n(3^n - 1)}{2^n} a_n$.

① 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

② 若不等式 $(-1)^n \lambda < T_n + \frac{n}{2^n}$ 对一切 $n \in \mathbf{N}^*$ 恒成立, 求 λ 的取值范围.

2 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，数列 $\{b_n\}$ 满足： $b_n = na_n$ ，且数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为

$$(n-1)S_n + 2n \quad (n \in \mathbf{N}^*) .$$

(1) 求 a_1, a_2 的值 .

(2) 求证：数列 $\{S_n + 2\}$ 是等比数列 .

(3) 抽去数列 $\{a_n\}$ 中的第1项，第4项，第7项，……，第 $3n-2$ 项，……余下的项顺序不变组成一个新数列 $\{c_n\}$ ，若 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 T_n ，求证：当 n 为奇数时， $\frac{12}{5} < \frac{T_{n+1}}{T_n} \leq 3$.

3 已知数列 $\{a_n\}$ 前 n 项和为 S_n ， $S_n = 2a_n - \frac{1}{2} (n \in \mathbf{N}^+)$ ，数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1 = 1$ ，点 $P(b_n, b_{n+1})$ 在直线 $x - y + 2 = 0$ 上。

(1) 求数列 $\{a_n\}$ ， $\{b_n\}$ 的通项 a_n 和 b_n 。

(2) 令 $c_n = a_n \cdot b_n$ ，求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 T_n 。

(3) 若 $\lambda > 0$ ，求对所有的正整数 n 都有 $2\lambda^2 - k\lambda + 2 > \frac{b_n}{a_{2n}}$ 成立的 k 的范围。

4 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的公比 $q > 1$ ，且 $a_1 + a_3 = 20$ ， $a_2 = 8$ ，

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式．

(2) 设 $b_n = \frac{n}{a_n}$ ， S_n 是数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和，若对任意正整数 n 不等式 $S_n + \frac{n}{2^{n+1}} > (-1)^n a$ 恒成立，求实数 a 的取值范围．

5 已知各项均为正数的数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n ，且满足 $a_2 = 4$ ， $a_{n+1}^2 = 6S_n + 9n + 1$ ， $n \in \mathbf{N}^*$ ，各项均为正数的等比数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1 = a_1$ ， $b_3 = a_2$ 。

(1) 求数列 $\{a_n\}$ ， $\{b_n\}$ 的通项公式。

(2) 若 $c_n = (3n - 2) \cdot b_n$ ，数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 T_n 。

① 求 T_n ；

② 若对任意 $n \geq 2$ ， $n \in \mathbf{N}^*$ ，均有 $(T_n - 5)m \geq 6n^2 - 31n + 35$ 恒成立，求实数 m 的取值范围。

6 已知首项为 $\frac{3}{2}$ 的等比数列 $\{a_n\}$ 不是递减数列，其前 n 项和为 S_n ($n \in \mathbf{N}^*$)，且 $S_3 + a_3$ ， $S_5 + a_5$ ， $S_4 + a_4$ 成等差数列。

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 设 $T_n = S_n - \frac{1}{S_n}$ ($n \in \mathbf{N}^*$)，求数列 $\{T_n\}$ 的最大项的值与最小项的值。

7 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，且 $S_n = 2a_n - 2(n \in \mathbf{N}^*)$ 。

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式。

(2) 若数列 $\{b_n\}$ 满足 $\frac{1}{a_n} = \frac{b_1}{2+1} - \frac{b_2}{2^2+1} + \frac{b_3}{2^3+1} - \cdots + (-1)^{n+1} \frac{b_n}{2^n+1}$ ，求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式。

(3) 在(2)的条件下，设 $c_n = 2^n + \lambda b_n$ ，问是否存在实数 λ 使得数列 $\{c_n\} (n \in \mathbf{N}^*)$ 是单调递增数列？若存在，求出 λ 的取值范围；若不存在，请说明你的理由。

8 已知单调递增的等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_2 + a_3 + a_4 = 28$ ，且 $a_3 + 2$ 是 a_2, a_4 的等差中项．

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式．

(2) 若数列 $\{b_n\}$ 满足 $\frac{1}{a_n} = \frac{b_1}{2+1} - \frac{b_2}{2^2+1} + \frac{b_3}{2^3+1} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{b_n}{2^n+1}$ ，求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式．

(3) 在(2)条件下，设 $c_n = 2^n + \lambda b_n$ ．问是否存在实数 λ 使得数列 $\{c_n\} (n \in \mathbf{N}^*)$ 是单调递增数列？若存在，求出 λ 的取值范围；若不存在，请说明理由．

9 已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \begin{cases} \frac{1}{3}a_n + n, & n \text{ 为奇数} \\ a_n - 3n, & n \text{ 为偶数} \end{cases}$.

(1) 设 $b_n = a_{2n} - \frac{3}{2}$, 求证: 数列 $\{b_n\}$ 是等比数列.

(2) 设 $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$, 求满足 $S_n > 0$ 的所有正整数 n .

二、分组求和

10 已知正项数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 满足 $S_n = \frac{(a_n + 1)^2}{4} (n \in \mathbf{N}^*)$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 .

(2) 设 $b_n = (-1)^n a_n + (-1)^n a_n^2$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 $2n$ 项和 T_{2n} .

11 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+2} - a_n = d$ ($d \in \mathbf{R}$, 且 $d \neq 0$), $n \in \mathbf{N}^*$, $a_1 = 2$, $a_2 = 2$, 且 a_1, a_3, a_7 成等比数列.

(1) 求 d 的值及数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

(2) 设 $b_n = \frac{(n+1)^2}{a_n \cdot a_{n+1}}$, $c_n = (-1)^n \cdot b_n$, 求数列 $\{c_n\}$ 的前 $2n$ 项和 S_{2n} .

12 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 2$, $a_{n+1} = 2a_n + 2^{n+1}$.

(1) 设 $b_n = \frac{a_n}{2^n}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式.

(2) 求数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n .

(3) 记 $c_n = \frac{(-1)^n(n^2 + 4n + 2)2^n}{a_n a_{n+1}}$, 求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

13 已知数列 $\{a_n\}$ 的前项和为 S_n , $\forall n \in \mathbf{N}^*$ 满足 $\frac{S_{n+1}}{n+1} - \frac{S_n}{n} = \frac{1}{2}$ 且 $a_1 = 1$, 正项数列 $\{b_n\}$ 满足

$$b_{n+1}^2 - b_{n+1} = b_n^2 + b_n \quad (n \in \mathbf{N}^*) , \text{ 其前7项和为42 .}$$

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式 .

(2) 令 $c_n = \frac{b_n}{a_n} + \frac{a_n}{b_n}$, 数列 $\{c_n\}$ 的前项和为 T_n , 若对任意正整数 n , 都有 $T_n \geq 2n + a$, 求实数 a 的取值范围 .

(3) 将数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 的项按照“当 n 为奇数时 , a_n 放在前面 ; 当 n 为偶数时 , b_n 放在前面”的要求进行排列 , 得到一个新的数列 : $a_1, b_1, b_2, a_2, a_3, b_3, b_4, a_4, a_5, b_5, b_6, \dots$, 求这个新数列的前 n 项和 P_n .

14 设 $\{a_n\}$ 是等差数列, $\{b_n\}$ 是等比数列, 已知 $a_1 = 4$, $b_1 = 6$, $b_2 = 2a_2 - 2$, $b_3 = 2a_3 + 4$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式.

(2) 设数列 $\{c_n\}$ 满足 $c_1 = 1$, $c_n = \begin{cases} 1, & 2^k < n < 2^{k+1} \\ b_k, & n = 2^k \end{cases}$, 其中 $k \in \mathbf{N}^*$.

① 求数列 $\{a_{2^n}(c_{2^n} - 1)\}$ 的通项公式.

② 求 $\sum_{i=1}^{2^n} a_i c_i$ ($n \in \mathbf{N}^*$).

15 已知数列 $\{a_n\}$ 是公差为1的等差数列，数列 $\{b_n\}$ 是等比数列，且 $a_3 + a_4 = a_7$ ， $b_2 \cdot b_4 = b_5$ ，

$$a_4 = 4b_2 - b_3, \text{ 数列 } \{c_n\} \text{ 满足: } c_n = \begin{cases} b_{2m-1}, n = 3m - 2 \\ b_{2m}, n = 3m - 1 \\ a_m, n = 3m \end{cases}, \text{ 其中 } m \in \mathbf{N}^*.$$

(1) 求数列 $\{a_n\}$ ， $\{b_n\}$ 的通项公式.

(2) 记 $t_n = c_{3n-2}c_{3n-1} + c_{3n-1}c_{3n} + c_{3n}c_{3n+1} (n \in \mathbf{N}^*)$ ，求数列 $\{t_n\}$ 的前 n 项和.

三、证明拓展型

16 已知数列 $\{a_n\}$ 满足条件 $a_1 = 1$, $a_2 = \sqrt{2}$, 对于 $\forall n \in \mathbf{N}^*$, 都有 $a_{n+2} = \sqrt{2}a_n$.

(1) 设 $b_n = a_{2n} - a_{2n-1}$, 求证: $\{b_n\}$ 为等比数列.

(2) 设 $c_n = \sum_{k=1}^n b_k$, 求证: $\sum_{k=1}^n \frac{1}{c_k} < 4 + 3\sqrt{2}$.

17 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 2$, $a_{n+1} = 2(S_n + n + 1)$ ($n \in \mathbf{N}^*$), 令 $b_n = a_n + 1$.

(1) 求证: $\{b_n\}$ 是等比数列.

(2) 记数列 $\{nb_n\}$ 的前 n 项和为 T_n , 求 T_n .

(3) 求证: $\frac{1}{2} - \frac{1}{2 \times 3^n} < \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \cdots + \frac{1}{a_n} < \frac{11}{16}$.

18 设 $\{a_n\}$ 是等比数列，公比大于0，其前 n 项和为 $S_n (n \in \mathbf{N}^*)$ ， $\{b_n\}$ 是等差数列。已知 $a_1 = 1$ ，

$$a_3 = a_2 + 2, a_4 = b_3 + b_5, a_5 = b_4 + 2b_6.$$

(1) 求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式。

(2) 设数列 $\{S_n\}$ 的前 n 项和为 $T_n (n \in \mathbf{N}^*)$ 。

① 求 T_n 。

② 证明 $\sum_{k=1}^n \frac{(T_k + b_{k+2}) b_k}{(k+1)(k+2)} = \frac{2^{n+2}}{n+2} - 2 (n \in \mathbf{N}^*)$ 。

19 设数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1 = \frac{1}{2}$ ，且 $a_{n+1} = \begin{cases} \frac{1}{2} * a_n, & (n \text{ 是偶数}) \\ a_n + \frac{1}{4}, & (n \text{ 是奇数}) \end{cases}$ ，记 $b_n = a_{2n-1} - \frac{1}{4}, n = 1, 2, 3, \dots$

- (1) 求 a_2, a_3 ；
- (2) 判断数列 $\{b_n\}$ 是否为等比数列，并证明你的结论；
- (3) 证明 $b_1 + 3b_2 + 5b_3 + \dots + (2n-1)b_n < \frac{3}{2}$.

20 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 满足： $S_n = a(S_n - a_n + 1)$ ，（ a 为常数， $a \neq 0$ ， $a \neq 1$ ）。

（1）求 $\{a_n\}$ 的通项公式。

（2）设 $b_n = a_n + S_n$ ，若数列 $\{b_n\}$ 为等比数列，求 a 的值。

（3）在满足条件（2）的情形下， $c_n = \frac{a_{n+1}}{(a_n + 1)(a_{n+1} + 1)}$ ，若数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 T_n ，且对任意的 $n \in \mathbf{N}^*$ 满足 $T_n < \lambda^2 + \frac{2}{3}\lambda$ ，求实数 λ 的取值范围。

21 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的公比 $q > 1$ ，且 $a_3 + a_4 + a_5 = 28$ ， $a_4 + 2$ 是 a_3 ， a_5 的等差中项．

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式．

(2) 试比较 $\sum_{k=1}^n \frac{a_k}{(a_{k+1} - 1)(a_{k+2} - 1)}$ 与 $\frac{1}{2}$ 的大小，并说明理由．

(3) 若数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n = \log_2 a_{n+1}$ ($n \in \mathbf{N}^*$)，在每两个 b_k 与 b_{k+1} 之间都插入 2^{k-1} ($k \in \mathbf{N}^*$) 个 2，使得数列 $\{b_n\}$ 变成了一个新的数列 $\{c_p\}$ ，试问：是否存在正整数 m ，使得数列 $\{c_p\}$ 的前 m 项的和 $S_m = 2019$ ？如果存在，求出 m 的值；如果不存在，说明理由．

22 在数列 $\{a_n\}$ 中, 已知 $a_1 = \frac{1}{3}$, $a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n - \frac{2}{3^{n+1}}$, $n \in \mathbf{N}^*$, 设 S_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和.

(1) 求证: 数列 $\{3^n a_n\}$ 是等差数列.

(2) 求 S_n .

(3) 是否存在正整数 $p, q, r (p < q < r)$, 使 S_p, S_q, S_r 成等差数列? 若存在, 求出 p, q, r 的值; 若不存在, 说明理由.