

解答题训练1

一、三角函数与解三角形

1 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对应的边分别为 a, b, c , 已知 $a \sin 2B = \sqrt{3}b \sin A$.

(1) 求 B ;

(2) 若 $\cos A = \frac{1}{3}$, 求 $\sin C$ 的值.

答案 (1) $B = \frac{\pi}{6}$.

(2) $\frac{2\sqrt{6}+1}{6}$.

解析 (1) 在 $\triangle ABC$ 中, 由正弦定理可知 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$, 可得 $a \sin B = b \sin A$,

又由 $a \sin 2B = \sqrt{3}b \sin A$ 得 $2a \sin B \cos B = \sqrt{3}b \sin A = \sqrt{3}a \sin B$,

所以 $\cos B = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 得 $B = \frac{\pi}{6}$.

(2) 由 $\cos A = \frac{1}{3}$, 得 $\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$,

则 $\sin C = \sin[\pi - (A + B)] = \sin(A + B)$,

所以, $\sin C = \sin\left(A + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin A + \frac{1}{2} \cos A = \frac{2\sqrt{6}+1}{6}$.

2 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 已知 $b + c = 2a$, $3c \sin B = 4a \sin C$.

(1) 求 $\cos B$ 的值.

(2) 求 $\sin\left(2B + \frac{\pi}{6}\right)$ 的值.

答案 (1) $-\frac{1}{4}$.

(2) $-\frac{3\sqrt{5}+7}{16}$.

解析 (1) 在 $\triangle ABC$ 中, 由正弦定理 $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$,

得 $b \sin C = c \sin B$,

又由 $3c \sin B = 4a \sin C$,

得 $3b \sin C = 4a \sin C$, 即 $3b = 4a$,

又因为 $b + c = 2a$,

得到 $b = \frac{4}{3}a$, $c = \frac{2}{3}a$,

由余弦定理可得

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{a^2 + \frac{4}{9}a^2 - \frac{16}{9}a^2}{2 \cdot a \cdot \frac{2}{3}a} = -\frac{1}{4} .$$

(2) 由(1)可得 $\sin B = \sqrt{1 - \cos^2 B} = \frac{\sqrt{15}}{4}$,

从而 $\sin 2B = 2 \sin B \cos B = -\frac{\sqrt{15}}{8}$,

$\cos 2B = \cos^2 B - \sin^2 B = -\frac{7}{8}$,

$$\begin{aligned} \text{故} \sin\left(2B + \frac{\pi}{6}\right) &= \sin 2B \cos \frac{\pi}{6} + \cos 2B \sin \frac{\pi}{6} \\ &= -\frac{\sqrt{15}}{8} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{7}{8} \times \frac{1}{2} \\ &= -\frac{3\sqrt{5} + 7}{16} . \end{aligned}$$

3 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 为三个内角, 已知 $A = 45^\circ$, $\cos B = \frac{4}{5}$.

(1) 求 $\sin C$ 的值 .

(2) 若 $BC = 10$, D 为 AB 的中点, 求 CD 的长及 $\triangle ABC$ 的面积 .

答案 (1) $\frac{7\sqrt{2}}{10}$.

(2) $\sqrt{37}$, 42 .

解析 (1) 在 $\triangle ABC$ 中, $\cos B = \frac{4}{5} > 0$.

$$\therefore \sin B = \frac{3}{5} .$$

$\therefore$ 在 $\triangle ABC$ 中, $A + B = \pi - C$.

$$\therefore \sin(A + B) = \sin C .$$

$$\therefore \sin C = \sin A \cdot \cos B + \cos A \cdot \sin B = \frac{7\sqrt{2}}{10} .$$

$$(2) \therefore \frac{AB}{\sin C} = \frac{BC}{\sin A} .$$

$$\therefore AB = \frac{BC \cdot \sin C}{\sin A} = 14 .$$

$\therefore D$ 为中点 $\therefore BD = 7$.

$$\therefore CD^2 = BC^2 + BD^2 - 2BC \cdot BD \cdot \cos B$$

$$= 10^2 + 7^2 - 2 \times 10 \times 7 \times \frac{4}{5}$$

$$= 37.$$

$$\therefore CD = \sqrt{37}.$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC \cdot \sin B$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 14 \cdot 10 \cdot \frac{3}{5}$$

$$= 42.$$

4 设 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 所对应的边分别为 a, b, c , 已知 $\frac{a+b}{\sin(A+B)} = \frac{a-c}{\sin A - \sin B}$.

(1) 求角 B .

(2) 若 $b=3, \cos A = \frac{\sqrt{6}}{3}$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

答案

(1) $B = \frac{\pi}{3}.$

(2) $\frac{\sqrt{3} + 3\sqrt{2}}{2}.$

解析

(1) 因为 $\frac{a+b}{\sin(A+B)} = \frac{a-c}{\sin A - \sin B}$,

所以 $\frac{a+b}{c} = \frac{a-c}{a-b},$

所以 $a^2 - b^2 = ac - c^2,$

所以 $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{ac}{2ac} = \frac{1}{2},$ 又因为 $0 < B < \pi,$ 所以 $B = \frac{\pi}{3}.$

(2) 由 $b=3, \cos A = \frac{\sqrt{6}}{3},$ 可得 $\sin A = \frac{\sqrt{3}}{3},$ 由 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B},$ 可得 $a=2,$

而 $\sin C = \sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B = \frac{\sqrt{3} + 3\sqrt{2}}{6},$

所以 $\triangle ABC$ 的面积 $S = \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{\sqrt{3} + 3\sqrt{2}}{2}.$

5 已知函数 $f(x) = (\sqrt{3} \sin \omega x + \cos \omega x) \cos \omega x - \frac{1}{2} (x \in \mathbf{R}, \omega > 0).$ 若 $f(x)$ 的最小正周期为 $4\pi.$

(1) 求 $f(x)$ 的单调递增区间.

(2) 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别是 a, b, c 满足 $(2a-c) \cos B = b \cos C,$ 求函数 $f(A)$ 的取值范围.

答案

(1) $\left[4k\pi - \frac{4\pi}{3}, 4k\pi + \frac{2\pi}{3}\right] (k \in \mathbf{Z}).$

(2) $\left(\frac{1}{2}, 1\right).$

解析

$$\begin{aligned}
 (1) \quad f(x) &= \frac{\sqrt{3}}{2} \sin(2\omega x) + \frac{1}{2} \cos(2\omega x) \\
 &= \sin\left(2\omega x + \frac{\pi}{6}\right), \\
 \therefore 4\pi &= \frac{2\pi}{2\omega}, \text{ 解得 } \omega = \frac{1}{4}, \\
 \therefore f(x) &= \sin\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{6}\right), \\
 \text{由 } -\frac{\pi}{2} + 2k\pi &\leq \frac{1}{2}x + \frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \\
 \text{解得 } 4k\pi - \frac{4\pi}{3} &\leq x \leq \frac{2\pi}{3} + 4k\pi, \quad k \in \mathbf{Z}. \\
 \therefore \text{函数 } f(x) \text{ 的单调递增区间是 } &\left[4k\pi - \frac{4\pi}{3}, \frac{2\pi}{3} + 4k\pi\right], \quad k \in \mathbf{Z}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad (2a - c) \cos B &= b \cos C, \\
 \therefore (2 \sin A - \sin C) \cos B &= \sin B \cos C, \\
 \therefore 2 \sin A \cos B &= \sin(B + C) = \sin A, \\
 \sin A &\neq 0, \\
 \therefore \cos B &= \frac{1}{2}, \quad B \in (0, \pi), \\
 \therefore B &= \frac{\pi}{3}, \\
 \text{函数 } f(A) &= \sin\left(\frac{1}{2}A + \frac{\pi}{6}\right), \\
 \therefore A \in \left(0, \frac{2\pi}{3}\right), \quad &\left(\frac{1}{2}A + \frac{\pi}{6}\right) \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right), \\
 \therefore f(A) &\in \left(\frac{1}{2}, 1\right).
 \end{aligned}$$

6 在锐角 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 且满足 $2b \sin A = \sqrt{3}a$.

- (1) 求角 B 的大小.
- (2) 若 $a + c = 5$, 且 $a > c$, $b = \sqrt{7}$, 求 $\cos(2A + B)$.

答案

$$\begin{aligned}
 (1) \quad B &= \frac{\pi}{3}. \\
 (2) \quad \cos(2A + B) &= -\frac{11}{14}.
 \end{aligned}$$

解析

$$\begin{aligned}
 (1) \quad \text{在 } \triangle ABC \text{ 中, 由 } 2b \sin A &= \sqrt{3}a, \\
 \text{根据正弦定理得: } 2 \sin B \sin A &= \sqrt{3} \sin A, \\
 \therefore \sin A &\neq 0 \quad (A \text{ 为锐角}), \\
 \therefore \sin B &= \frac{\sqrt{3}}{2}. \\
 \therefore \text{由 } B \text{ 为锐角, 可得 } B &= \frac{\pi}{3}.
 \end{aligned}$$

$$(2) \because a+c=5, \textcircled{1} b=\sqrt{7},$$

$$\therefore \text{利用余弦定理: } b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B,$$

$$\text{可得: } 7 = a^2 + c^2 - ac = (a+c)^2 - 3ac,$$

$$\text{解得: } ac=6, \textcircled{2}$$

$$\therefore \text{由}\textcircled{1}\textcircled{2}\text{联立即可解得: } \begin{cases} c=2 \\ a=3 \end{cases}, \text{ 或 } \begin{cases} c=3 \\ a=2 \end{cases} \text{ (由 } a>c \text{, 舍去),}$$

$$\therefore \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{7+4-9}{2 \times \sqrt{7} \times 2} = \frac{\sqrt{7}}{14},$$

$$\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \frac{3\sqrt{21}}{14},$$

$$\sin 2A = 2 \sin A \cos A = \frac{3\sqrt{3}}{14},$$

$$\cos 2A = 2\cos^2 A - 1 = -\frac{13}{14},$$

$$\begin{aligned} \therefore \cos(2A+B) &= \cos\left(2A+\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}\cos 2A - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2A \\ &= \frac{1}{2} \times \left(-\frac{13}{14}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{3\sqrt{3}}{14} = -\frac{11}{14}. \end{aligned}$$

7 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , $f(x) = 2\sin(x-A)\cos x + \sin(B+C)$ ($x \in \mathbf{R}$)

, 函数 $f(x)$ 的图象关于点 $\left(\frac{\pi}{6}, 0\right)$ 对称.

(1) 当 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 时, 求 $f(x)$ 的值域.

(2) 若 $a=7$ 且 $\sin B + \sin C = \frac{13\sqrt{3}}{14}$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

答案 (1) 值域为 $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right]$.

(2) $\triangle ABC$ 的面积为 $10\sqrt{3}$.

解析 (1) $f(x) = 2\sin(x-A)\cos x + \sin(B+C)$

$$= 2(\sin x \cos A - \cos x \sin A) \cos x + \sin A$$

$$= 2\sin x \cos x \cos A - 2\cos^2 x \sin A + \sin A$$

$$= \sin 2x \cos A - \cos 2x \sin A = \sin(2x-A),$$

由于函数 $f(x)$ 的图象关于点 $\left(\frac{\pi}{6}, 0\right)$ 对称, 则 $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0$,

即有 $\sin\left(\frac{\pi}{3} - A\right) = 0$, 由 $0 < A < \pi$, 则 $A = \frac{\pi}{3}$,

$$\text{则 } f(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right),$$

由于 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 则 $2x - \frac{\pi}{3} \in \left(-\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$,

$$\text{即有 } -\frac{\sqrt{3}}{2} < \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \leq 1,$$

则值域为 $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right]$.

(2) 由正弦定理可得 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{14}{\sqrt{3}}$,

则 $\sin B = \frac{\sqrt{3}}{14}b$, $\sin C = \frac{\sqrt{3}}{14}c$,

$\sin B + \sin C = \frac{\sqrt{3}}{14}(b+c) = \frac{13\sqrt{3}}{14}$,

即 $b+c=13$,

由余弦定理可得 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$,

即 $49 = b^2 + c^2 - bc = (b+c)^2 - 3bc$,

即有 $bc=40$,

则 $\triangle ABC$ 的面积为 $S = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2} \times 40 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3}$.

二、分布列

8 某商场举行的“三色球”购物摸奖活动规定：在一次摸奖中，摸奖者先从装有3个红球与4个白球的袋中任意摸出3个球，再从装有1个篮球与2个白球的袋中任意摸出1个球，根据摸出4个球中红球与篮球的个数，设一、二、三等奖如下：

奖级	摸出红、蓝球个数	获奖金额
一等奖	3红1蓝	200元
二等奖	3红0蓝	50元
三等奖	2红1蓝	10元

其余情况无奖且每次摸奖最多只能获得一个奖级。

(1) 求一次摸球恰好摸到1个红球的概率；

(2) 求摸奖者在一次摸奖中获奖金额 X 的分布列与期望 $E(X)$.

答案 (1) $\frac{18}{35}$.

(2) 见解析

解析 (1) 设 $A_i (i=0,1,2,3)$ 表示摸到 i 个红球， $B_j (j=0,1)$ 表示摸到 j 个篮球，则 A_i 与 B_j 独立。

恰好摸到1个红球的概率为

$$P(A_1) = \frac{C_3^1 C_4^2}{C_7^3} = \frac{18}{35}.$$

(2) X 的所有可能值为: 0, 10, 50, 200, 且

$$P(X=200) = P(A_3 B_1) = P(A_3)P(B_1) = \frac{C_3^3}{C_7^3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{105},$$

$$P(X=50) = P(A_3 B_0) = P(A_3)P(B_0) = \frac{C_3^3}{C_7^3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{105},$$

$$P(X=10) = P(A_2 B_1) = P(A_2)P(B_1) = \frac{C_3^2 C_4^1}{C_7^3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{12}{105} = \frac{4}{35},$$

$$P(X=0) = 1 - \frac{1}{105} - \frac{2}{105} - \frac{4}{35} = \frac{6}{7}.$$

综上可知, 获奖金额 X 的分布列为

X	0	10	50	200
P	$\frac{6}{7}$	$\frac{4}{35}$	$\frac{2}{105}$	$\frac{1}{105}$

$$\text{从而 } E(X) = 0 \times \frac{6}{7} + 10 \times \frac{4}{35} + 50 \times \frac{2}{105} + 200 \times \frac{1}{105} = 4 \text{ (元)}.$$

9 学校游园活动有这样一个游戏项目: 甲箱子里装有3个白球、2个黑球, 乙箱子里装有1个白球、2个黑球, 这些球除颜色外完全相同, 每次游戏从这两个箱子里各随机摸出2个球, 若摸出的白球不少于2个, 则获奖. (每次游戏结束后将球放回原箱)

(1) 求在1次游戏中,

① 摸出3个白球的概率.

② 获奖的概率.

(2) 求在2次游戏中获奖次数 X 的分布列及数学期望 $E(X)$.

答案 (1) ① $\frac{1}{5}$.
② $\frac{7}{10}$.

(2) 分布列是

X	0	1	2
P	$\frac{9}{100}$	$\frac{21}{50}$	$\frac{49}{100}$

期望 $\frac{7}{5}$.

解析 (1) ① 设“在1次游戏中摸出 i 个白球”为事件 A_i ($i=0, 1, 2, 3$), $P(A_3) = \frac{C_3^2}{C_5^2} \cdot \frac{C_2^1}{C_3^1} = \frac{1}{5}$.

② 设“在1次游戏中获奖”为事件 B ，则 $B = A_2 \cup A_3$ ．

$$\therefore P(A_2) = \frac{C_3^2}{C_5^2} \cdot \frac{C_2^2}{C_3^2} + \frac{C_2^1}{C_5^2} \cdot \frac{C_2^1}{C_3^2} = \frac{1}{2}.$$

且 A_2, A_3 互斥．

$$\therefore P(B) = P(A_2) + P(A_3) = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} = \frac{7}{10}.$$

(2) 由题意可知 X 的所有可能取值为0, 1, 2．

$$P(X=0) = (1 - \frac{7}{10})^2 = \frac{9}{100},$$

$$P(X=1) = C_2^1 \frac{7}{10} (1 - \frac{7}{10}) = \frac{21}{50},$$

$$P(X=2) = (\frac{7}{10})^2 = \frac{49}{100}.$$

所以 X 的分布列是

X	0	1	2
P	$\frac{9}{100}$	$\frac{21}{50}$	$\frac{49}{100}$

$$X \text{ 的数学期望 } E(X) = 0 \times \frac{9}{100} + 1 \times \frac{21}{50} + 2 \times \frac{49}{100} = \frac{7}{5}.$$

10 某大学志愿者协会有6名男同学，4名女同学．在这10名同学中，3名同学来自数学学院，其余7名同学来自物理、化学等其他互不相同的七个学院．现从这10名同学中随机选取3名同学，到希望小学进行支教活动（每位同学被选到的可能性相同）．

(1) 求选出的3名同学是来自互不相同学院的概率．

(2) 设 X 为选出的3名同学中女同学的人数，求随机变量 X 的分布列和数学期望．

答案 (1) $\frac{49}{60}$ ．

(2) 随机变量 X 的分布列是

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{30}$

$$E(X) = \frac{6}{5}.$$

解析 (1) 设“选出的3名同学来自互不相同的学院”为事件 A ，则

$$P(A) = \frac{C_3^1 \cdot C_7^2 + C_3^0 \cdot C_7^3}{C_{10}^3} = \frac{49}{60}.$$

所以，选出的3名同学来自互不相同学院的概率为 $\frac{49}{60}$ ．

(2) 随机变量 X 的所有可能值为0, 1, 2, 3．

$$P(x=k) = \frac{C_4^k \cdot C_6^{3-k}}{C_{10}^3} (k=0, 1, 2, 3).$$

所以, 随机变量 X 的分布列是

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{30}$

$$\text{随机变量 } X \text{ 的数学期望 } E(X) = 0 \times \frac{1}{6} + 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{3}{10} + 3 \times \frac{1}{30} = \frac{6}{5}.$$

11 随着网络营销和电子商务的兴起, 人们的购物方式更具多样化, 某调查机构随机抽取10名购物者进行采访. 5名男性购物者中有3名倾向于选择网购, 2名倾向于选择实体店. 5名女性购物者中有2名倾向于选择网购, 3名倾向于选择实体店.

- (1) 若从10名购物者中随机抽取2名, 其中男, 女各一名, 求至少1名倾向于选择实体店的概率.
- (2) 若从这10名购物者中随机抽取3名, 设 X 表示抽到倾向于选择网购的男性购物者的人数, 求 X 的分布列和数学期望.

答案

(1) $\frac{19}{25}$.

(2)

P	0	1	2	3
X	$\frac{7}{24}$	$\frac{21}{40}$	$\frac{7}{40}$	$\frac{1}{120}$

$$E(X) = \frac{9}{10}.$$

解析

(1) 设“至少1名倾向于选择实体店”为事件 A ,

则 $\bar{A}$ 表示事件“随机抽取2名 (其中男, 女各一名) 都选择网购”.

$$\text{则 } P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{C_3^1 \times C_2^1}{C_5^1 \times C_5^1} = \frac{19}{25}.$$

(2) X 的取值为0, 1, 2, 3. $P(X=k) = \frac{C_3^k C_7^{3-k}}{C_{10}^3}$.

$$P(X=0) = \frac{7}{24}, P(X=1) = \frac{21}{40}, P(X=2) = \frac{7}{40}, P(X=3) = \frac{1}{120}.$$

$\therefore X$ 的分布列为

P	0	1	2	3
X	$\frac{7}{24}$	$\frac{21}{40}$	$\frac{7}{40}$	$\frac{1}{120}$

$$\text{期望为 } E(X) = 0 \times \frac{7}{24} + 1 \times \frac{21}{40} + 2 \times \frac{7}{40} + 3 \times \frac{1}{120} = \frac{9}{10}.$$

12 现有10道题，其中6道甲类题，4道乙类题，张同学从中任取3道题解答．

(1) 求张同学至少取到1道乙类题的概率；

(2) 已知所取的3道题中有2道甲类题，1道乙类题．设张同学答对甲类题的概率都是 $\frac{3}{5}$ ，答对每道乙类题的概率都是 $\frac{4}{5}$ ，且各题答对与否相互独立．用 X 表示张同学答对题的个数，求 X 的分布列和数学期望．

答案 (1) $\frac{5}{6}$

(2) X 的分布列为：

X	0	1	2	3
P	$\frac{4}{125}$	$\frac{28}{125}$	$\frac{57}{125}$	$\frac{36}{125}$

$$E(X) = 2.$$

解析 (1) 设事件 A = “张同学所取的3道题至少有1道乙类题”，则有 $\bar{A}$ = “张同学所取的3道题都是甲类题”．

$$\text{因为 } P(\bar{A}) = \frac{C_6^3}{C_{10}^3} = \frac{1}{6}, \text{ 所以 } P(A) = 1 - P(\bar{A}) = \frac{5}{6}.$$

(2) X 所有的可能取值为0, 1, 2, 3.

$$P(X=0) = C_2^0 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^0 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^2 \cdot \frac{1}{5} = \frac{4}{125};$$

$$P(X=1) = C_2^1 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^1 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^1 \cdot \frac{1}{5} + C_2^0 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^0 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^2 \cdot \frac{4}{5} = \frac{28}{125};$$

$$P(X=2) = C_2^2 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^0 \cdot \frac{1}{5} + C_2^1 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^1 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^1 \cdot \frac{4}{5} = \frac{57}{125};$$

$$P(X=3) = C_2^2 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^0 \cdot \frac{4}{5} = \frac{36}{125}.$$

所以 X 的分布列为：

X	0	1	2	3
P	$\frac{4}{125}$	$\frac{28}{125}$	$\frac{57}{125}$	$\frac{36}{125}$

$$\text{所以 } E(X) = 0 \times \frac{4}{125} + 1 \times \frac{28}{125} + 2 \times \frac{57}{125} + 3 \times \frac{36}{125} = 2.$$

13 本着健康、低碳的生活理念，租自行车骑游的人越来越多．某自行车租车点的收费标准是每车每次租车时间不超过两小时免费，超过两小时的部分每小时收费2元（不足1小时的部分按1小时计算）．有甲、乙两人相互独立来该租车点租车骑游（各租一车一次），设甲、乙不超过两小时还车的概率分别为 $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$ ；两小时以上且不超过三小时还车的概率分别为 $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ ；两人租车时间都不

会超过四小时.

(1) 求出甲、乙所付租车费用相同的概率.

(2) 求甲、乙两人所付的租车费用之和为随机变量 ξ , 求 ξ 的分布列与数学期望 $E\xi$.

答案 (1) $P = \frac{5}{16}$.

(2) 分布列如下:

ξ	0	2	4	6	8
P	$\frac{1}{8}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{16}$

$$E\xi = \frac{7}{2}.$$

解析 (1) 所付费用相同即为0, 2, 4元.

设付0元为 $P_1 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$, 付2元为 $P_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$, 付4元为 $P_3 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$
 则所付费用相同的概率为 $P = P_1 + P_2 + P_3 = \frac{5}{16}$

(2) 设甲、乙两个所付的费用之和为 ξ , ξ 可为0, 2, 4, 6, 8

$$P(\xi = 0) = \frac{1}{8}$$

$$P(\xi = 2) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{16}$$

$$P(\xi = 4) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{5}{16}$$

$$P(\xi = 6) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{16}$$

$$P(\xi = 8) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$$

分布列如下:

ξ	0	2	4	6	8
P	$\frac{1}{8}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{16}$

$$\text{所以: } E\xi = \frac{5}{8} + \frac{5}{4} + \frac{9}{8} + \frac{1}{2} = \frac{7}{2}.$$

14 某校为了普及环保知识, 增强学生的环保意识, 在全校组织了一次有关环保知识的竞赛. 经过初赛、复赛, 甲、乙两个代表队 (每队3人) 进入了决赛, 规定每人回答一个问题, 答对为本队赢得10分, 答错得0分. 假设甲队中每人答对的概率均为 $\frac{3}{4}$, 乙队中3人答对的概率分别为 $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{2}{3}$, 且各人回答正确与否相互之间没有影响, 用 x 表示乙队的总得分.

(1) 求 x 的分布列及数学期望.

(2) 求甲、乙两队总得分之和等于30分且甲队获胜的概率.

答案

(1) X 的分布列为

X	0	10	20	30
P	$\frac{1}{60}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{13}{30}$	$\frac{2}{5}$

$$E(X) = \frac{133}{6}.$$

(2) $\frac{9}{128}.$

解析

(1) 由题知, X 的所有可能取值为 0, 10, 20, 30.

$$P(X=0) = \frac{1}{5} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{60},$$

$$P(X=10) = \frac{4}{5} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{3}{20},$$

$$P(X=20) = \frac{4}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} + \frac{4}{5} \times \frac{1}{4} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{13}{30},$$

$$P(X=30) = \frac{4}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{5}.$$

$\therefore X$ 的分布列为:

X	0	10	20	30
P	$\frac{1}{60}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{13}{30}$	$\frac{2}{5}$

$$\therefore E(X) = 0 \times \frac{1}{60} + 10 \times \frac{3}{20} + 20 \times \frac{13}{30} + 30 \times \frac{2}{5} = \frac{133}{6}.$$

(2) 记“甲队得30分, 乙队得0分”为事件 A ,

“甲队得20分, 乙队得10分”为事件 B ,

则 A, B 互斥,

$$\text{又} \because P(A) = \left(\frac{3}{4}\right)^3 \times \frac{1}{60} = \frac{9}{1280},$$

$$P(B) = C_3^2 \left(\frac{3}{4}\right)^2 \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{20} = \frac{81}{1280},$$

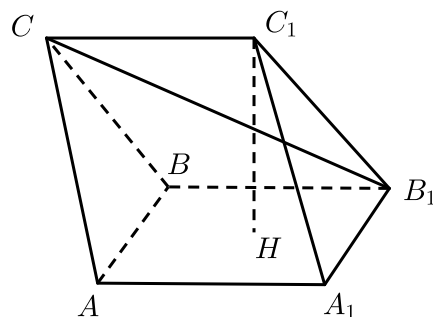
故甲乙两队总得分之和为30分, 且甲队获胜的概率为

$$P(A+B) = P(A) + P(B) = \frac{90}{1280} = \frac{9}{128}.$$

三、立体几何

15 如图, 在三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, H 是正方形 AA_1B_1B 的中心, $AA_1 = 2\sqrt{2}$, $C_1H \perp$ 平面

AA_1B_1B , 且 $C_1H = \sqrt{5}$



- (1) 求异面直线 AC 与 A_1B_1 所成角的余弦值 .
- (2) 求二面角 $A - A_1C_1 - B_1$ 的正弦值 .
- (3) 设 N 为棱 B_1C_1 的中点 , 点 M 在平面 AA_1B_1B 内 , 且 $MN \perp$ 平面 $A_1B_1C_1$, 求线段 BM 的长 .

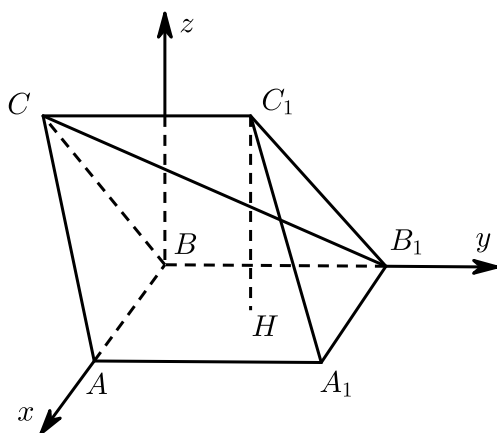
答案

- (1) $\frac{\sqrt{2}}{3}$.
- (2) $\frac{3\sqrt{5}}{7}$.
- (3) $\frac{\sqrt{10}}{4}$.

解析

(1) 方法一 :

如图所示 , 建立空间直角坐标系 , 点 B 为坐标原点 .



依题意得 $A(2\sqrt{2}, 0, 0)$, $B(0, 0, 0)$, $C(\sqrt{2}, -\sqrt{2}, \sqrt{5})$

$A_1(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 0)$, $B_1(0, 2\sqrt{2}, 0)$, $C_1(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{5})$

(I) 易得 $\overrightarrow{AC} = (-\sqrt{2}, -\sqrt{2}, \sqrt{5})$, $\overrightarrow{A_1B_1} = (-2\sqrt{2}, 0, 0)$,

于是 $\cos \langle \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{A_1B_1} \rangle = \frac{\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{A_1B_1}}{|\overrightarrow{AC}| \cdot |\overrightarrow{A_1B_1}|} = \frac{4}{3 \times 2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$,

所以异面直线 AC 与 A_1B_1 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

(2) 易知 $\overrightarrow{AA_1} = (0, 2\sqrt{2}, 0)$, $\overrightarrow{A_1C_1} = (-\sqrt{2}, -\sqrt{2}, \sqrt{5})$.

设平面 AA_1C_1 的法向量 $\vec{m} = (x, y, z)$,

$$\text{则} \begin{cases} \vec{m} \cdot \overrightarrow{A_1 C_1} = 0 \\ \vec{m} \cdot \overrightarrow{A A_1} = 0 \end{cases} \text{即} \begin{cases} -\sqrt{2}x - \sqrt{2}y + \sqrt{5}z = 0, \\ 2\sqrt{2}y = 0. \end{cases}$$

不妨令 $x = \sqrt{5}$, 可得 $\vec{m} = (\sqrt{5}, 0, \sqrt{2})$,

同样地, 设平面 $A_1 B_1 C_1$ 的法向量 $\vec{n} = (x, y, z)$,

$$\text{则} \begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{A_1 C_1} = 0, \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{A_1 B_1} = 0. \end{cases} \text{即} \begin{cases} -\sqrt{2}x - \sqrt{2}y + \sqrt{5}z = 0, \\ -2\sqrt{2}x = 0. \end{cases}$$

不妨令 $y = \sqrt{5}$, 可得 $\vec{n} = (0, \sqrt{5}, \sqrt{2})$.

$$\text{于是} \cos \langle \vec{m}, \vec{n} \rangle = \frac{\vec{m} \cdot \vec{n}}{|\vec{m}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{2}{\sqrt{7} \times \sqrt{7}} = \frac{2}{7},$$

$$\text{从而} \sin \langle \vec{m}, \vec{n} \rangle = \frac{3\sqrt{5}}{7}.$$

所以二面角 $A - A_1 C_1 - B$ 的正弦值为 $\frac{3\sqrt{5}}{7}$.

(3) 由 N 为棱 $B_1 C_1$ 的中点,

$$\text{得} N\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{5}}{2}\right).$$

设 $M(a, b, 0)$,

$$\text{则} \overrightarrow{MN} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - a, \frac{3\sqrt{2}}{2} - b, \frac{\sqrt{5}}{2}\right)$$

$$\text{由 } MN \perp \text{平面 } A_1 B_1 C_1, \text{ 得} \begin{cases} \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{A_1 B_1} = 0, \\ \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{A_1 C_1} = 0. \end{cases}$$

$$\text{即} \begin{cases} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - a\right) \cdot (-2\sqrt{2}) = 0, \\ \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - a\right) \cdot (-\sqrt{2}) + \left(\frac{3\sqrt{2}}{2} - b\right) \cdot (-\sqrt{2}) + \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot \sqrt{5} = 0. \end{cases}$$

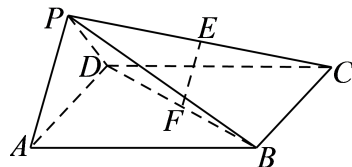
$$\text{解得} \begin{cases} a = \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ b = \frac{\sqrt{2}}{4}. \end{cases} \text{故 } M\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{4}, 0\right).$$

$$\text{因此 } \overrightarrow{BM} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{4}, 0\right),$$

$$\text{所以线段 } BM \text{ 的长为 } |\overrightarrow{BM}| = \frac{\sqrt{10}}{4}.$$

16 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 是边长为 2 的正方形, 侧面 $PAD \perp$ 底面 $ABCD$, 且

$$PA = PD = \frac{\sqrt{2}}{2} AD, E, F \text{ 分别为 } PC, BD \text{ 的中点}.$$



(1) 求证: $EF \parallel$ 平面 PAD .

(2) 求证: 面 $PAB \perp$ 平面 PDC .

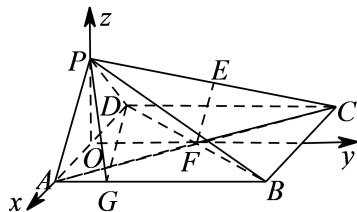
(3) 在线段 AB 上是否存在点 G , 使得二面角 $C-PD-G$ 的余弦值为 $\frac{1}{3}$? 说明理由.

答案

- (1) 证明见解析 .
 (2) 证明见解析 .
 (3) 在线段 AB 上存在点 $G(1, \frac{1}{2}, 0)$, 使得二面角 $C-PD-G$ 的余弦值为 $\frac{1}{3}$.

解析

- (1) 证明 : 连结 $AC \cap BD = F$, $ABCD$ 为正方形 , F 为 AC 中点 ,
 E 为 PC 中点 . $\therefore$ 在 $\triangle CPA$ 中 , $EF \parallel PA$.
 且 $PA \subset$ 平面 PAD , $EF \not\subset$ 平面 $PAD \therefore EF \parallel$ 平面 PAD .
 (2) 证明 : 因为平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$, 平面 $PAD \cap$ 面 $ABCD = AD$.
 $ABCD$ 为正方形 , $CD \perp AD$, $CD \subset$ 平面 $ABCD$
 所以 $CD \perp$ 平面 PAD .
 $\therefore CD \perp PA$
 又 $PA = PD = \frac{\sqrt{2}}{2}AD$, 所以 $\triangle PAD$ 是等腰直角三角形 ,
 且 $\angle APD = \frac{\pi}{2}$, 即 $PA \perp PD$
 又 $CD \cap PD = D$, 且 $CD, PD \subset$ 面 PDC ,
 $\therefore PA \perp$ 面 PDC .
 又 $PA \subset$ 面 PAB ,
 $\therefore$ 面 $PAB \perp$ 面 PDC .
 (3) 如图 , 取 AD 的中点 O , 连结 OP, OF .



- $\therefore PA = PD$, $\therefore PO \perp AD$.
 $\therefore$ 侧面 $PAD \perp$ 底面 $ABCD$,
 平面 $PAD \cap$ 平面 $ABCD = AD$, $\therefore PO \perp$ 平面 $ABCD$,
 而 O, F 分别为 AD, BD 的中点 , $\therefore OF \parallel AB$, 又 $ABCD$ 是正方形 , 故 $OF \perp AD$.
 $\therefore PA = PD = \frac{\sqrt{2}}{2}AD$, $\therefore PA \perp PD$, $OP = OA = 1$.
 以 O 为原点 , 直线 OA, OF, OP 分别为 x, y, z 轴建立空间直角坐标系 ,
 则有 $A(1, 0, 0)$, $F(0, 1, 0)$, $D(-1, 0, 0)$, $P(0, 0, 1)$.

若在 AB 上存在点 G ,使得二面角 $C-PD-G$ 的余弦值为 $\frac{1}{3}$, 连结 PG, DG .

设 $G(1, a, 0) (0 \leq a \leq 2)$.

由(II)知平面 PDC 的法向量为 $\overrightarrow{PA} = (1, 0, -1)$.

设平面 PGD 的法向量为 $\vec{n} = (x, y, z)$. $\because \overrightarrow{DP} = (1, 0, 1), \overrightarrow{GD} = (-2, -a, 0)$,

$\therefore$ 由 $\vec{n} \cdot \overrightarrow{DP} = 0, \vec{n} \cdot \overrightarrow{GD} = 0$ 可得 $\begin{cases} x + 0 \cdot y + z = 0 \\ -2 \cdot x - a \cdot y + 0 \cdot z = 0 \end{cases}$, 令 $x = 1$, 则

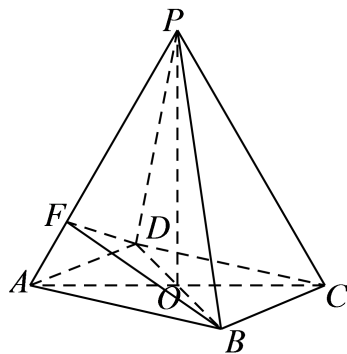
$$y = -\frac{2}{a}, z = -1,$$

$$\text{故 } \vec{n} = (1, -\frac{2}{a}, -1) \cdot \cos \langle \vec{n}, \overrightarrow{PA} \rangle = \frac{\vec{n} \cdot \overrightarrow{PA}}{|\vec{n}| |\overrightarrow{PA}|} = \frac{2}{\sqrt{2} \times \sqrt{2 + \frac{4}{a^2}}} = \sqrt{\frac{2}{2 + \frac{4}{a^2}}} = \frac{1}{3},$$

解得, $a = \frac{1}{2}$.

所以, 在线段 AB 上存在点 $G(1, \frac{1}{2}, 0)$, 使得二面角 $C-PD-G$ 的余弦值为 $\frac{1}{3}$.

- 17 如图所示, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面四边形 $ABCD$ 是菱形, $AC \cap BD = O$, $\triangle PAC$ 是边长为2的等边三角形, $PB = PD = \sqrt{6}$, $AP = 4AF$.



- (1) 求证: $PO \perp$ 底面 $ABCD$.
- (2) 求直线 CP 与平面 BDF 所成角的大小.
- (3) 在线段 PB 上是否存在一点 M , 使得 $CM \parallel$ 平面 BDF ? 如果存在, 求 $\frac{BM}{BP}$ 的值, 如果不存在, 请说明理由.

答案 (1) 证明见解析.

(2) 30° .

(3) 存在, 此时 $\frac{BM}{BP} = \frac{1}{3}$.

解析 (1) 因为底面 $ABCD$ 是菱形, $AC \cap BD = O$,

所以 O 为 AC, BD 中点.

又因为 $PA = PC, PB = PD$,

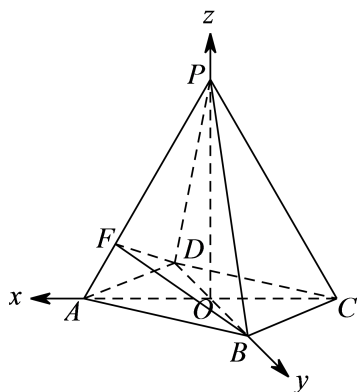
所以 $PO \perp AC, PO \perp BD$,

所以 $PO \perp$ 底面 $ABCD$.

(2) 由底面 $ABCD$ 是菱形可得 $AC \perp BD$,

又由(I)可知 $PO \perp AC, PO \perp BD$.

如图, 以 O 为原点建立空间直角坐标系 $O-xyz$.



由 $\triangle PAC$ 是边长为2的等边三角形, $PB = PD = \sqrt{6}$,

可得 $PO = \sqrt{3}, OB = OD = \sqrt{3}$.

所以 $A(1, 0, 0), C(-1, 0, 0), B(0, \sqrt{3}, 0), P(0, 0, \sqrt{3})$.

所以 $\overrightarrow{CP} = (1, 0, \sqrt{3}), \overrightarrow{AP} = (-1, 0, \sqrt{3})$.

由已知可得 $\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AP} = (\frac{3}{4}, 0, \frac{\sqrt{3}}{4})$

设平面 BDF 的法向量为 $\vec{n} = (x, y, z)$, 则
$$\begin{cases} \sqrt{3}y = 0 \\ \frac{3}{4}x + \frac{\sqrt{3}}{4}z = 0 \end{cases}$$

令 $x = 1$, 则 $z = -\sqrt{3}$, 所以 $\vec{n} = (1, 0, -\sqrt{3})$.

因为 $\cos \langle \overrightarrow{CP}, \vec{n} \rangle = \frac{\overrightarrow{CP} \cdot \vec{n}}{|\overrightarrow{CP}| \cdot |\vec{n}|} = -\frac{1}{2}$,

所以直线 CP 与平面 BDF 所成角的正弦值为 $\frac{1}{2}$,

所以直线 CP 与平面 BDF 所成角的大小为 30° .

(3) 设 $\frac{BM}{BP} = \lambda (0 \leq \lambda \leq 1)$, 则

$\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{CB} + \lambda \overrightarrow{BP} = (1, \sqrt{3}(1-\lambda), \sqrt{3}\lambda)$.

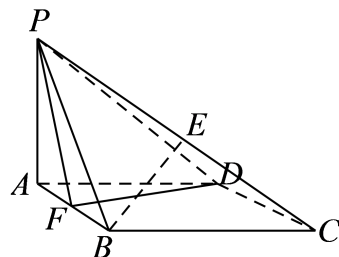
若使 $CM \parallel$ 平面 BDF , 需且仅需 $\overrightarrow{CM} \cdot \vec{n} = 0$ 且 $CM \not\subset$ 平面 BDF ,

解得 $\lambda = \frac{1}{3} \in [0, 1]$,

所以在线段 PB 上存在一点 M , 使得 $CM \parallel$ 平面 BDF .

此时 $\frac{BM}{BP} = \frac{1}{3}$.

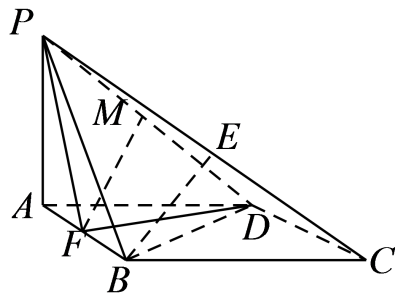
- 18 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 是菱形, $\angle BAD = 60^\circ$, $AB = 2$, $PA = 1$, $PA \perp$ 平面 $ABCD$, E 是 PC 的中点, F 是 AB 的中点.



- (1) 求证: $BE \parallel$ 平面 PDF .
- (2) 求证: 平面 $PDF \perp$ 平面 PAB .
- (3) 求平面 PAB 与平面 PCD 所成的锐二面角的大小.

- 答案**
- (1) 证明见解析.
 - (2) 证明见解析.
 - (3) 60° .

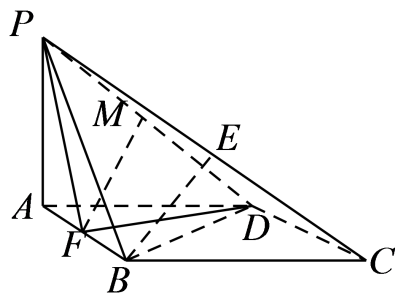
- 解析** (1) 证明: 取 PD 中点为 M , 连 ME , MF .



$\because E$ 是 PC 的中点, $\therefore ME$ 是 $\triangle PCD$ 的中位线,
 $\therefore ME$ 平行且等于 $\frac{1}{2}CD$.
 $\because F$ 是 AB 中点且 $ABCD$ 是菱形, $\therefore AB$ 平行且等于 CD , $\therefore ME$ 平行且等于 $\frac{1}{2}AB$.
 $\therefore ME$ 平行且等于 FB , $\therefore$ 四边形 $MEBF$ 是平行四边形. 从而 $BE \parallel MF$.
 $\because BE \not\subset$ 平面 PDF , $MF \subset$ 平面 PDF ,
 $\therefore BE \parallel$ 平面 PDF .

(2) 证明: $\because PA \perp ABCD, DF \subset ABCD,$

$\therefore DF \perp PA$. 连接 BD ,



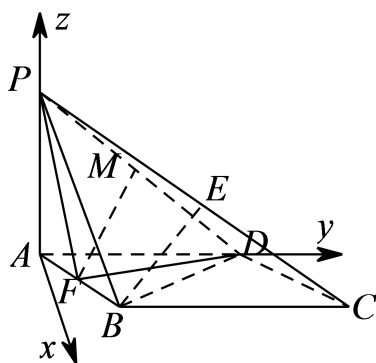
$\because$ 底面 $ABCD$ 是菱形, $\angle BAD = 60^\circ$, $\therefore \triangle DAB$ 为正三角形.

$\because F$ 是 AB 的中点, $\therefore DF \perp AB$.

$\because PA \cap AB = A, \therefore DF \perp$ 平面 PAB .

$\because DF \subset$ 平面 $PDF, \therefore$ 平面 $PDF \perp$ 平面 PAB .

(3) 建立如图所示的坐标系,



则 $P(0, 0, 1), C(\sqrt{3}, 3, 0), D(0, 2, 0), F\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0\right),$

由 (2) 知 $DF \perp$ 平面 $PAB, \therefore \overrightarrow{DF} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{2}, 0\right)$ 是平面 PAB 的一个法向量,

设平面 PCD 的一个法向量为 $\vec{n} = (x, y, z),$

由 $\vec{n} \cdot \overrightarrow{DC} = \sqrt{3}x + y = 0$, 且由 $\vec{n} \cdot \overrightarrow{PD} = 2y - z = 0,$

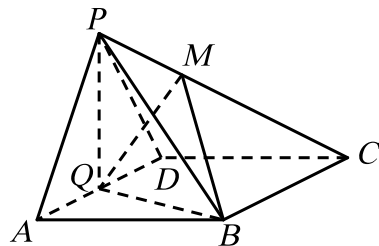
在以上二式中令 $y = \sqrt{3}$, 则得 $x = -1, z = 2\sqrt{3},$

$\therefore \vec{n} = (-1, \sqrt{3}, 2\sqrt{3}).$ 设平面 PAB 与平面 PCD 所成锐角为 $\theta,$

$$\text{则 } \cos \theta = \frac{\left| -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{3} \right|}{\sqrt{\frac{3}{4} + \frac{9}{4}} \cdot \sqrt{1 + 3 + 12}} = \frac{1}{2},$$

故平面 PAB 与平面 PCD 所成锐角为 60° .

19 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为菱形, $\angle BAD = 60^\circ$, Q 为 AD 的中点.



- (1) 若 $PA = PD$, 求证: 平面 $PQB \perp$ 平面 PAD .
- (2) 点 M 在线段 PC 上, $PM = tPC$, 试确定实数 t 的值, 使 $PA \parallel$ 平面 MQB .
- (3) 在 (2) 的条件下, 若平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$, 且 $PA = PD = AD = 2$, 求二面角 $M-BQ-C$ 的大小.

答案 (1) 证明见解析

(2) $t = \frac{1}{3}$

(3) 60° .

解析 (1) 若 $PA = PD$, Q 为 AD 的中点,

所以 $PQ \perp AD$,

底面 $ABCD$ 为菱形, $\angle BAD = 60^\circ$, 所以 $BQ \perp AD$.

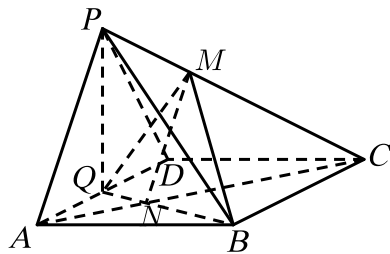
又 $PQ \cap BQ = Q$,

所以 $AD \perp$ 面 PQB , 又 $AD \subset$ 面 PAD ,

所以面 $PQB \perp$ 面 PAD .

(2) 当 $t = \frac{1}{3}$ 时, $PA \parallel$ 面 MQB .

连接 AC , BQ 交于 N , 连接 MN .



因为 $AQ \parallel BC$,

所以 $\frac{AN}{NC} = \frac{AQ}{BC} = \frac{1}{2}$.

因为 $PA \parallel$ 面 MQB , $PA \subset$ 面 PAC ,

面 $MQB \cap$ 面 $PAC = MN$,

所以 $MN \parallel PA$.

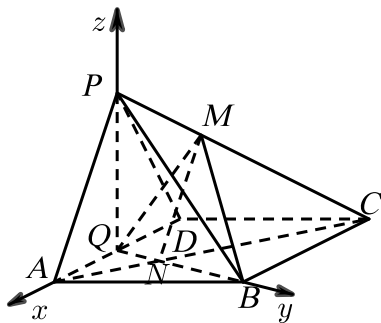
所以 $\frac{PM}{MC} = \frac{AN}{NC} = \frac{1}{2}$, 所以 $PM = \frac{1}{3}PC$.

(3) 平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$, 平面 $PAD \cap$ 平面 $ABCD = AD$,

又 $BQ \perp AD$, $BQ \subset$ 面 $ABCD$,

所以 $BQ \perp$ 面 PAD .

以 Q 为原点, $\overrightarrow{QA}$, $\overrightarrow{QB}$, $\overrightarrow{QP}$ 为 x , y , z 轴正方向建立空间直角坐标系,



$Q(0, 0, 0)$, $P(0, 0, \sqrt{3})$, $B(0, \sqrt{3}, 0)$,

$C(-2, \sqrt{3}, 0)$, $M\left(-1, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

易得, 面 BQC 的法向量为 $\overrightarrow{QP} = (0, 0, \sqrt{3})$,

设面 MBQ 的法向量为 $\vec{n} = (x, y, z)$.

$\overrightarrow{QB} = (0, \sqrt{3}, 0)$, $\overrightarrow{PA} = (1, 0, -\sqrt{3})$,

$$\begin{cases} \overrightarrow{QB} \cdot \vec{n} = 0 \\ \overrightarrow{PA} \cdot \vec{n} = 0 \end{cases}, \begin{cases} \sqrt{3}y = 0 \\ x - \sqrt{3}z = 0 \end{cases}$$

解得 $y = 0$, 令 $z = 1$, 所以 $x = \sqrt{3}$.

所以 $\vec{n} = (\sqrt{3}, 0, 1)$.

$$\cos \langle \overrightarrow{QB}, \vec{n} \rangle = \frac{\overrightarrow{QB} \cdot \vec{n}}{|\overrightarrow{QB}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot 2} = \frac{1}{2},$$

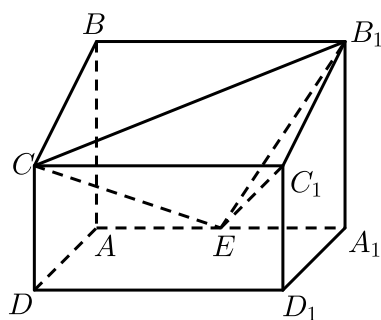
由图可知二面角 $M - BQ - C$ 为锐角,

所以二面角 $M - BQ - C$ 的大小为 60° .

20

如图, 四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 侧棱 $A_1A \perp$ 底面 $ABCD$, $AB \parallel DC$, $AB \perp AD$,

$AD = CD = 1$, $AA_1 = AB = 2$, E 为棱 AA_1 的中点.



- (1) 证明 $B_1C_1 \perp CE$.
- (2) 求二面角 $B_1 - CE - C_1$ 的正弦值 .
- (3) 设点 M 在线段 C_1E 上, 且直线 AM 与平面 ADD_1A_1 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{2}}{6}$, 求线段 AM 的长 .

答案 (1) 见解析.

- (2) 二面角 $B_1 - CE - C_1$ 的正弦值为 $\frac{\sqrt{21}}{7}$.
- (3) $AM = \sqrt{2}$.

解析 (1) (方法一) 如图, 以点 A 为原点建立空间直角坐标系, 依题意得

$$A(0, 0, 0), B(0, 0, 2), C(1, 0, 1)$$

$$B_1(0, 2, 2), C_1(1, 2, 1), E(0, 1, 0)$$

易得 $\overrightarrow{B_1C_1} = (1, 0, -1)$, $\overrightarrow{CE} = (-1, 1, -1)$, 于是 $\overrightarrow{B_1C_1} \cdot \overrightarrow{CE} = 0$, 所以 $B_2C_2 \perp CE$.

(方法二)

因为侧棱 $CC_1 \perp$ 底面 $A_1B_1C_1D_1$, $B_1C_1 \subset$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$, 所以 $CC_1 \perp B_1C_1$, 经计算可得 $B_1E = \sqrt{5}$, $B_1C_1 = \sqrt{2}$, $EC_1 = \sqrt{3}$, 从而 $B_1E^2 = B_1C_1^2 + EC_1^2$, 所以在 $\triangle B_1EC_1$ 中,

$$B_1C_1 \perp C_1E, \forall CC_1, C_1E \subset$$

平面 CC_1E , $CC_1 \cap C_1E = C_1$, $\therefore B_1C_1 \perp$ 平面 CC_1E , 又 $CE \subset$ 平面 CC_1E , $B_1C_1 \perp CE$.

(2) (方法一)

$$\overrightarrow{B_2C} = (1, -2, -1), \text{ 设平面 } B_1CE \text{ 的法向量 } \mathbf{m} = (x, y, z)$$

则 $\begin{cases} \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{B_1C} = 0 \\ \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{CE} = 0 \end{cases}$ 即 $\begin{cases} x - 2y - z = 0 \\ -x + y - z = 0 \end{cases}$ 消去 x , 得 $y + 2z = 0$, 不妨令 $z = 1$, 可得一个法向

量为 $\mathbf{m} = (-3, -2.1)$ 由 (1) $B_2C_2 \perp CE$, 又 $CC_2 \perp B_1C_1$, 可得 $B_1C_1 \perp$ 平面 CEC_1 , 故

$\overrightarrow{B_1C_1} = (1, 0, -1)$, 为平面 CEC_1 的一个法向量, 于是

$$\cos \langle \vec{m}, \overrightarrow{B_1 C_1} \rangle = \frac{\vec{m} \cdot \overrightarrow{B_2 C_1}}{|\vec{m}| \cdot |\overrightarrow{B_2 C_1}|} = \frac{-4}{\sqrt{14} \times \sqrt{2}} = -\frac{2\sqrt{7}}{7}, \text{ 所以二面角 } B_1 - CE - C_1 \text{ 的正弦值为 } \frac{\sqrt{21}}{7}.$$

(方法二)

过 B_1 作 $B_1 G \perp CE$ 于点 G , 连接 $C_1 G$, 由 (1) $B_1 C_1 \perp CE$, 故 $CE \perp$ 平面 $B_1 C_1 G$, 得

$$CE \perp C_1 G, \therefore \angle B_1 G C_1$$

为二面角 $B_1 - CE - C_1$ 的平面角, 在 $\triangle CC_1 E$ 中, 由 $CE = C_1 E = \sqrt{3}$, $CC_1 = 2$, 可得

$$C_1 G = \frac{2\sqrt{6}}{3}. \text{ 在 } Rt\triangle B_1 C_1 G \text{ 中, } B_1 G = \frac{\sqrt{42}}{3} \therefore \sin \angle B_1 G C_1 = \frac{\sqrt{21}}{7}, \text{ 即二面角}$$

$$B_1 - CE - C_1 \text{ 的正弦值为 } \frac{\sqrt{21}}{7}.$$

(3) (方法一)

$$\overrightarrow{AE} = (0, 1, 0), \overrightarrow{EC_1} = (1, 1, 1), \text{ 设 } \overrightarrow{EM} = \lambda \overrightarrow{EC_1} = (\lambda, \lambda, \lambda), 0 \leq \lambda \leq 1, \text{ 有}$$

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EM} = (\lambda, \lambda + 1, \lambda).$$

可取 $\overrightarrow{AB} = (0, 0, 2)$ 为平面 $ADD_1 A_1$ 的一个法向量, 设 θ 为直线 AM 与平面 $ADD_1 A_1$ 所成的角, 则

$$\sin \theta = \left| \cos \langle \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB} \rangle \right| = \frac{|\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{AM}| \cdot |\overrightarrow{AB}|} = \frac{2\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + (\lambda + 1)^2 + \lambda^2} \times 2} = \frac{\lambda}{\sqrt{3\lambda^2 + 2\lambda + 1}}$$

$$\text{于是 } \frac{\lambda}{\sqrt{3\lambda^2 + 2\lambda + 1}} = \frac{\sqrt{2}}{6},$$

$$\text{解得 } \lambda = \frac{1}{3}, \text{ 所以 } AM = \sqrt{2}.$$

(方法二)

连接 $D_1 E$, 过点 M 作 $MH \perp ED_1$ 于点 H , 可得 $MH \perp$ 平面 $ADD_1 A_1$, 连接 AH , 则

$\angle MAH$ 为直线 AM 与平面 $ADD_1 A_1$ 所成的角.

$$\text{设 } AM = x, \text{ 从而在 } Rt\triangle AHM, \text{ 有 } MH = \frac{\sqrt{2}}{6}x, AH = \frac{\sqrt{34}}{6}x, \text{ 在 } Rt\triangle C_1 D_1 E \text{ 中,}$$

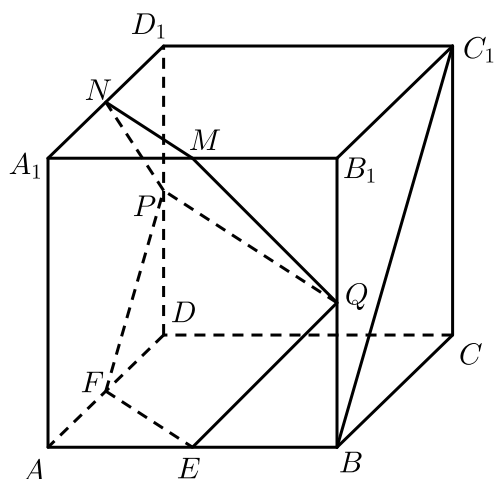
$$C_1 D_1 = 1, ED_1 = \sqrt{2}$$

$$\text{得 } EH = \sqrt{2}MH = \frac{1}{3}x, \text{ 在 } \triangle AEH \text{ 中, } \angle AEH = 135^\circ, AE = 1, \text{ 由}$$

$$AH^2 = AE^2 + EH^2 - 2AE \cdot EH \cos 135^\circ, \text{ 得 } \frac{17}{18}x^2 = 1 + \frac{1}{9}x^2 + \frac{\sqrt{2}}{3}x, \text{ 整理得}$$

$$5x^2 - 2\sqrt{2}x - 6 = 0, \text{ 解得 } x = \sqrt{2}, \text{ 所以线段 } AM \text{ 的长为 } \sqrt{2}.$$

21 如图, 在棱长为 2 的正方体 $ABCD - A_1 B_1 C_1 D_1$ 中, E, F, M, N 分别是棱 $AB, AD, A_1 B_1, A_1 D_1$ 的中点, 点 P, Q 分别在棱 DD_1, BB_1 上移动, 且 $DP = BQ = \lambda (0 < \lambda < 2)$.

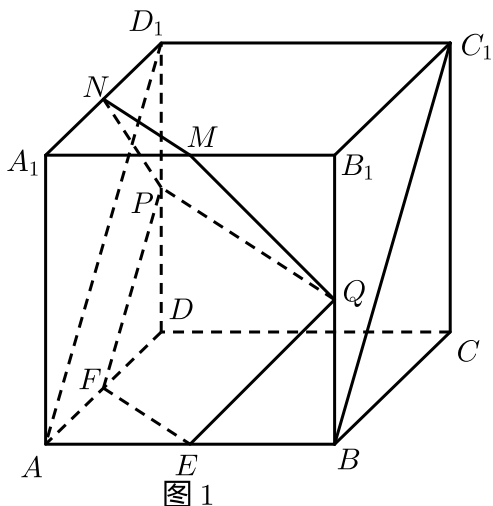


- (1) 当 $\lambda = 1$ 时, 证明: 直线 $BC_1 \parallel$ 平面 $EFPQ$;
- (2) 是否存在 λ , 使平面 $EFPQ$ 与面 $PQMN$ 所成的角为直角? 若存在, 求出 λ 的值; 若不存在, 说明理由.

答案 (1) 证明见解析.

(2) 存在, $\lambda = 1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$.

解析 (1) 如图1, 连接 AD_1 , 由 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 是正方体, 知 $AD_1 \parallel BC_1$, 当 $\lambda = 1$ 时, P 是 DD_1 的中点, 又 F 是 AD 的中点, 所以 $FP \parallel AD_1$. 所以 $BC_1 \parallel FP$.
而 $FP \subset$ 平面 $EFPQ$, 且 $BC_1 \not\subset$ 平面 $EFPQ$,
故直线 $BC_1 \parallel$ 平面 $EFPQ$.



- (2) 如图2, 连接 BD , 因为 E, F 分别是 AB, AD 的中点,
所以 $EF \parallel BD$, 且 $EF = \frac{1}{2}BD$, 又 $DP = BQ, DP \parallel BQ$,
所以四边形 $PQBD$ 是平行四边形, 故 $PQ \parallel BD$

从而 $EF \parallel PQ$, 且 $EF = \frac{1}{2}PQ$.

在 $Rt\triangle EBQ$ 和 $Rt\triangle FDP$ 中 , 因为

$$BQ = DP = \lambda, BE = DF = 1 ,$$

于是 $EQ = FP = \sqrt{1 + \lambda^2}$, 所以四边形

$EF PQ$ 是等腰梯形 .

同理可证四边形 $PQ MN$ 是等腰梯形 .

分别取 EF, PQ, MN 的中点为 H, O, G , 连接

OH, OG ,

则 $GO \perp PQ, HO \perp PQ$, 而 $GO \cap HO = O$,

故 $\angle GOH$ 是面 $EF PQ$ 与面 $PQ MN$ 所成的二面角的平面角 .

若存在 λ , 使面 $EF PQ$ 与面 $PQ MN$ 所成的二面角为直二面角 , 则 $\angle GOH = 90^\circ$.

连接 EM, FN , 则由 $EF \parallel MN$, 且 $EF = MN$, 知四边形 $EF MN$ 是平行四边形 .

连接 GH , 因为 H, G 是 EF, MN 的中点 , 所以 $GH = ME = 2$.

$$\text{在 } \triangle GOH \text{ 中 , } GH^2 = 4, OH^2 = 1 + \lambda^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \lambda^2 + \frac{1}{2} ,$$

$$OG^2 = (2 - \lambda)^2 + \left(\frac{2\sqrt{2}}{4}\right)^2 = (2 - \lambda)^2 + \frac{1}{2} ,$$

$$\text{由 } OG^2 + OH^2 = GH^2 , \text{ 得 } (2 - \lambda)^2 + \frac{1}{2} + \lambda^2 + \frac{1}{2} = 4 , \text{ 解得 } \lambda = 1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2} ,$$

故存在 $\lambda = 1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$, 使面 $EF PQ$ 与面 $PQ MN$ 所成的二面角为直二面角 .

向量方法 :

以 D 为原点 , 射线 DA, DC, DD_1 分别为 x, y, z 轴的正半轴建立如图3所示的空间直角坐

标系 $D - xyz$, 由已知得

$$B(2, 2, 0), C_1(0, 2, 2), E(2, 1, 0),$$

$$F(1, 0, 0), P(0, 0, \lambda)$$

$$\vec{BC_1} = (-2, 0, 2) ,$$

$$\vec{FP} = (-1, 0, \lambda) , \vec{FE} = (1, 1, 0)$$

(I) 证明 : 当 $\lambda = 1$ 时 ,

$$\vec{FP} = (-1, 0, 1) , \text{ 因为}$$

$$\vec{BC_1} = (-2, 0, 2) , \text{ 所以}$$

$$\vec{BC_1} = 2\vec{FP} , \text{ 即 } BC_1 \parallel FP .$$

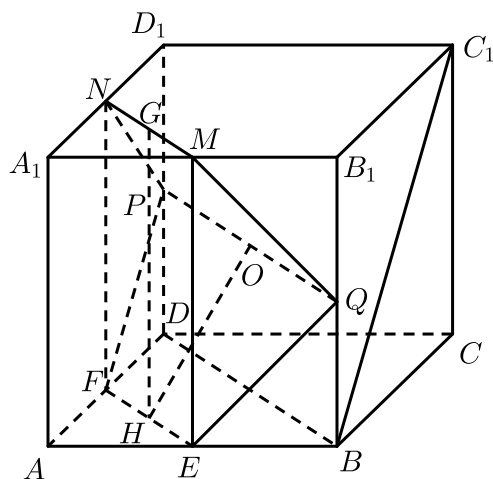


图 2

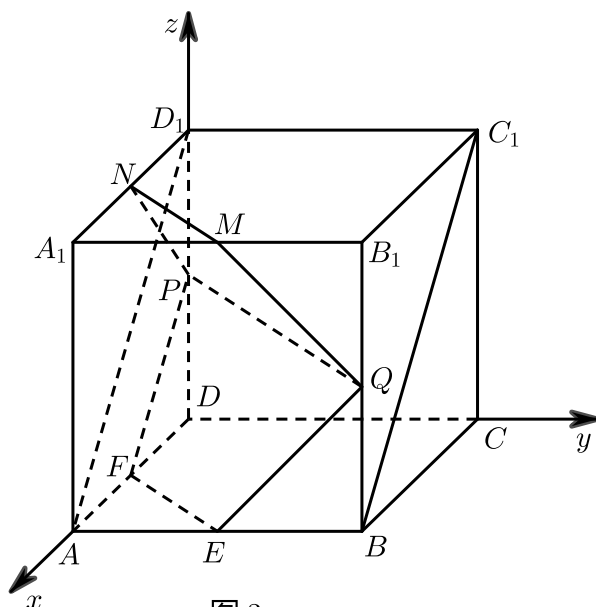


图 3

而 $FP \subset$ 平面 $EFPPQ$, 且 $BC_1 \not\subset$ 平面 $EFPPQ$, 故直线 $BC_1 //$ 平面 $EFPPQ$.

(II) 设平面 $EFPPQ$ 的一个法向量为 $\vec{n} = (x, y, z)$, 则

$$\text{由 } \begin{cases} \vec{FE} \cdot \vec{n} = 0, \\ \vec{FP} \cdot \vec{n} = 0, \end{cases} \text{ 可得 } \begin{cases} x + y = 0, \\ -x + \lambda z = 0, \end{cases} \text{ 于是可取 } \vec{n} = (\lambda, -\lambda, 1) .$$

同理可得平面 $MNPQ$ 的一个法向量为 $\vec{m} = (\lambda - 2, 2 - \lambda, 1)$.

若存在 λ , 使面 $EFPPQ$ 与面 $PQMN$ 所成的二面角为直二面角 ,

$$\text{则 } \vec{m} \cdot \vec{n} = (\lambda - 2, 2 - \lambda, 1) \cdot (\lambda, -\lambda, 1) = 0 , \text{ 即 } \lambda(\lambda - 2) - \lambda(2 - \lambda) + 1 = 0 ,$$

$$\text{解得 } \lambda = 1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2} .$$

故存在 $\lambda = 1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$, 使面 $EFPPQ$ 与面 $PQMN$ 所成的二面角为直二面角 .

四、限时训练

本部分共2个解答题 , 限时30分钟.

22 已知点 $A(1, \sqrt{2})$ 是离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 椭圆 $C: \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 (a > b > 0)$ 上的一点 . 斜率为 $\sqrt{2}$ 的直线 BD 交椭圆 C 于 B, D 两点 , 且 A, B, D 三点不重合 .

(1) 求椭圆 C 的方程 .

(2) 求证 : 直线 AB, AD 的斜率之和为定值 .

(3) $\triangle ABD$ 的面积是否存在最大值 ? 若存在 , 求出这个最大值 ; 若不存在 , 说明理由 ?

答案

(1) $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} = 1 .$

(2) 证明见解析 .

(3) 存在 , $\sqrt{2}$.

解析

(1) $\because e = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{c}{a} , \frac{1}{b^2} + \frac{2}{a^2} = 1 , a^2 = b^2 + c^2 ,$

$$\therefore a = 2 , b = \sqrt{2} , c = \sqrt{2} ,$$

$$\therefore \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} = 1 .$$

(2) 设 $D(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 直线 AB, AD 的斜率分别为 : k_{AB}, k_{AD} ,

$$\begin{aligned} \therefore k_{AD} + k_{AB} &= \frac{y_1 - \sqrt{2}}{x_1 - 1} + \frac{y_2 - \sqrt{2}}{x_2 - 1} \\ &= 2\sqrt{2} + b \left[\frac{x_1 + x_2 - 2}{x_1 x_2} \right] (*) , \end{aligned}$$

$$\text{联立} \begin{cases} y = \sqrt{2}x + b \\ 2x^2 + y^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow 4x^2 + 2\sqrt{2}bx + b^2 - 4 = 0,$$

$$\Delta = -8b^2 + 64 > 0,$$

$$\therefore -2\sqrt{2} < b < 2\sqrt{2}$$

$$\therefore x_1 + x_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}b \text{ ①}, x_1x_2 = \frac{b^2 - 4}{4} \text{ ②},$$

$$\text{将①、②式代入(*)式整理得 } 2\sqrt{2} + b \left[\frac{x_1 + x_2 - 2}{x_1x_2(x_1 + x_2) + 1} \right] = 0,$$

$$\text{即 } k_{AD} + k_{AB} = 0.$$

$$(3) \because |BD| = \sqrt{1 + (\sqrt{2})^2} |x_1 - x_2| = \sqrt{3} \frac{\sqrt{\Delta}}{4}$$

$$= \sqrt{3} \frac{\sqrt{64 - 8b^2}}{4} = \frac{\sqrt{6}}{2} \sqrt{8 - b^2},$$

$$\text{设 } d \text{ 为点 } A \text{ 到直线 } BD \text{ 的距离, } \therefore d = \frac{|b|}{\sqrt{3}},$$

$$\therefore S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} |BD| d = \frac{\sqrt{2}}{4} \sqrt{(8 - b^2)b^2} \leq \sqrt{2},$$

当且仅当 $b = \pm 2$ 时取等号,

$$\text{又 } \because \pm 2 \in (-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}),$$

$$\therefore \text{当 } b = \pm 2 \text{ 时, } S_{\triangle ABD \max} = \sqrt{2}.$$

23 已知函数 $f(x) = \ln x - 2ax$ (其中 $a \in \mathbf{R}$).

(1) 当 $a = 1$ 时, 求函数 $f(x)$ 的图象在 $x = 1$ 处的切线方程.

(2) 若 $f(x) \leq 1$ 恒成立, 求 a 的取值范围.

(3) 设 $g(x) = f(x) + \frac{1}{2}x^2$, 且函数 $g(x)$ 有极大值点 x_0 , 求证: $x_0 f(x_0) + 1 + ax_0^2 > 0$.

答案 (1) $x + y + 1 = 0$.

(2) $\left[\frac{1}{2e^2}, +\infty \right)$.

(3) 证明见解析.

解析

(1) 当 $a = 1$ 时, $f(x) = \ln x - 2x$, 则 $f'(x) = \frac{1}{x} - 2, x > 0$,

$$\therefore f(1) = -2, f'(1) = -1,$$

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 的图象在 $x = 1$ 处的切线方程为 $y - (-2) = -(x - 1)$, 即 $x + y + 1 = 0$.

(2) 不等式 $f(x) \leq 1$, 即 $\ln x - 2ax \leq 1, \therefore 2ax \geq \ln x - 1$,

$$\because x > 0, \therefore 2a \geq \frac{\ln x - 1}{x} \text{ 恒成立},$$

$$\text{令 } \varphi(x) = \frac{\ln x - 1}{x} (x > 0), \text{ 则 } \varphi'(x) = \frac{2 - \ln x}{x^2},$$

当 $0 < x < e^2$ 时, $\varphi'(x) > 0$, $\varphi(x)$ 单调递增, 当 $x > e^2$ 时, $\varphi'(x) < 0$, $\varphi(x)$ 单调递减,

$\therefore$ 当 $x = e^2$ 时, $\varphi(x)$ 取得极大值, 也为最大值,

$$\text{故 } \varphi(x)_{\max} = \varphi(e^2) = \frac{1}{e^2},$$

由 $2a \geq \frac{1}{e^2}$, 得 $a \geq \frac{1}{2e^2}$, $\therefore$ 实数 a 的取值范围是 $\left[\frac{1}{2e^2}, +\infty\right)$.

$$(3) \text{ 由 } g(x) = f(x) + \frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2}x^2 - 2ax + \ln x, \text{ 得 } g'(x) = x + \frac{1}{x} - 2a = \frac{x^2 - 2ax + 1}{x},$$

① 当 $-1 \leq a \leq 1$ 时, $g(x)$ 单调递增无极值点, 不符合题意;

② 当 $a > 1$ 或 $a < -1$ 时, 令 $g'(x) = 0$, 设 $x^2 - 2ax + 1 = 0$ 的两根为 x_0 和 x' ,

$\therefore x_0$ 为函数 $g(x)$ 的极大值点, $\therefore 0 < x_0 < x'$,

由 $x_0 x' = 1$, $x_0 + x' = 2a > 0$, 知 $a > 1$, $0 < x_0 < 1$,

$$\text{又由 } g'(x_0) = x_0 + \frac{1}{x_0} - 2a = 0, \text{ 得 } a = \frac{x_0^2 + 1}{2x_0},$$

$$\therefore x_0 f(x_0) + 1 + ax_0^2 = x_0 \ln x_0 - \frac{x_0^2 + x_0}{1} + 1$$

$$= -\frac{x_0^3}{2} - \frac{x_0}{2} + x_0 \ln x_0 + 1, \quad 0 < x_0 < 1,$$

$$\text{令 } h(x) = -\frac{x^3}{2} - \frac{x}{2} + x \ln x + 1, \quad x \in (0, 1), \text{ 则 } h'(x) = -\frac{3x^2}{2} + \frac{1}{2} + \ln x,$$

$$\text{令 } \mu(x) = -\frac{3x^2}{2} + \frac{1}{2} + \ln x, \quad x \in (0, 1), \text{ 则 } \mu'(x) = -3x + \frac{1}{x} = \frac{1 - 3x^2}{x},$$

当 $0 < x < \frac{\sqrt{3}}{3}$ 时, $\mu'(x) > 0$, 当 $\frac{\sqrt{3}}{3} < x < 1$ 时, $\mu'(x) < 0$,

$$\therefore \mu(x)_{\max} = \mu\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \ln \frac{\sqrt{3}}{3} < 0, \therefore h'(x) < 0,$$

$\therefore h(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减, $\therefore h(x) > h(1) = 0$,

$$\therefore x_0 f(x_0) + 1 + ax_0^2 > 0.$$