

立体几何外接球与内切球

一、正方体（长方体）外接球

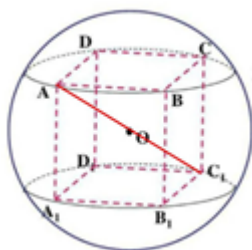


图1-1

长方体外接球： $2R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ （ a, b, c 分别为长方体的长、宽、高）

正方体外接球： $2R = \sqrt{3}a$ （ a 为正方体的棱长）

1 已知一个长方体的同一个顶点出发的三条棱长分别为 $1, \sqrt{2}, \sqrt{6}$ ，则这个长方体外接球的表面积为_____。

答案 9π

解析 长方体外接球的直径 $d = \sqrt{1+2+6} = 3$ ，

$$\therefore \text{半径} r = \frac{d}{2} = \frac{3}{2},$$

$$\therefore \text{长方体外接球的表面积为} S = 4\pi r^2 = 4\pi \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 9\pi.$$

2 棱长为1的正方体的外接球半径为多少？长宽高分别为1、2、3的长方体的外接球半径又是多少？

答案 $\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{14}}{2}$ 。

二、墙角模型（三条线两两垂直）

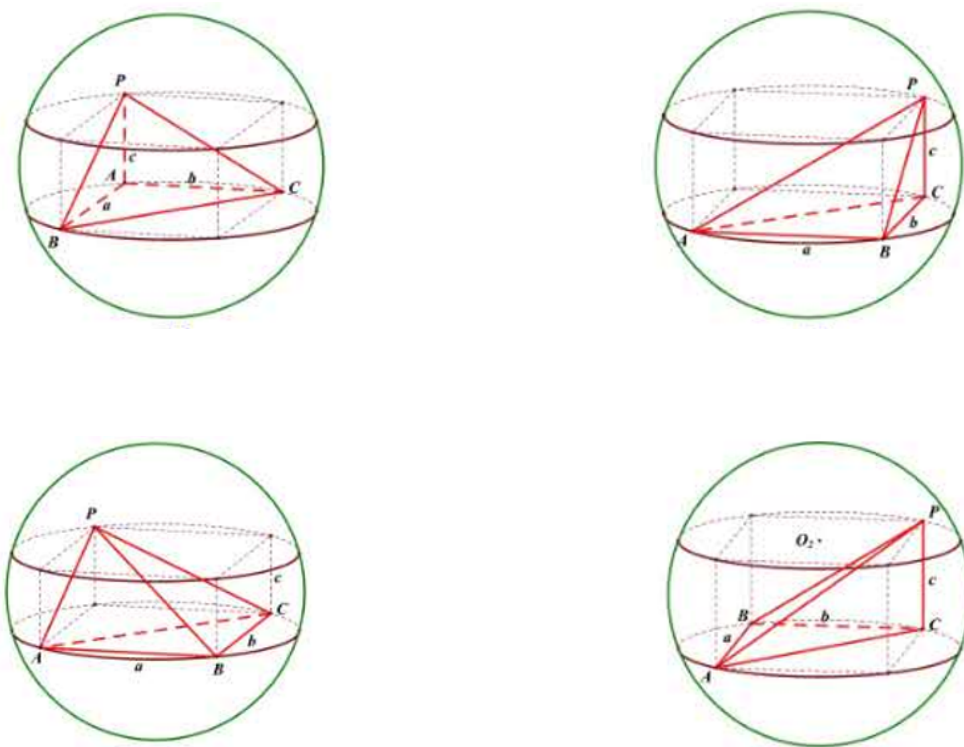


图2-1：三条线两两垂直的常见模型



方法：找到两两垂直的线段(补全图形)，直接用公式 $2R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

- 3 在三棱锥 $A-BCD$ 中，侧棱 AB 、 AC 、 AD 两两垂直， $\triangle ABC$ 、 $\triangle ACD$ 、 $\triangle ADB$ 的面积分别为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 、 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 、 $\frac{\sqrt{6}}{2}$ ，则三棱锥 $A-BCD$ 的外接球的体积为 _____。

答案 $\sqrt{6}\pi$

解析 在三棱锥 $A-BCD$ 中，侧棱 AB 、 AC 、 AD 两两垂直，
补成长方体，两者的外接球是同一个，长方体的体对角线即为球的直径，
设长方体的三度分别为 a 、 b 、 c ，
则有 $\frac{1}{2}ab = \frac{\sqrt{6}}{2}$ ， $\frac{1}{2}bc = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ， $\frac{1}{2}ac = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，
解得： $a = \sqrt{3}$ ， $b = \sqrt{2}$ ， $c = 1$ ，
所以球的直径 $d = \sqrt{3+2+1} = \sqrt{6}$ ，
球的半径 $r = \frac{d}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$ ，
 $\therefore$ 三棱锥 $A-BCD$ 的外接球的体积为：
$$V = \frac{4}{3}\pi \cdot \left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^3 = \sqrt{6}\pi.$$

- 4 三棱锥 $P-ABC$ 中， PA 、 PB 、 PC 两两垂直， $PA = 1$ ， $PB = PC = \sqrt{2}$ ，已知空间中有一个点到这四个点距离相等，则这个距离是 _____。

答案 $\frac{\sqrt{5}}{2}$

解析 还原成长方体，距离为长方体外接球的半径，
而长方体外接球的直径为体对角线 $\sqrt{1+2+2} = \sqrt{5}$ ，
 $\therefore d = \frac{\sqrt{5}}{2}$ 。

5 若三棱锥的三个侧面两两垂直，且侧棱长均为 $\sqrt{3}$ ，则其外接球的表面积是_____。

答案 9π

解析 方法一：三棱锥的三个侧面两两垂直，说明三棱锥的三条侧棱两两垂直，

设其外接球的半径为 R ，则有 $(2R)^2 = (\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3})^2 = 9$ ，

所以外接球的表面积为 $S = 4\pi R^2 = 9\pi$ 。

方法二：在棱长为 $\sqrt{3}$ 的正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中，以截面 BDA_1 为底面， A 为顶点的三棱锥的三个侧面两两垂直，且侧棱长均为 $\sqrt{3}$ 的三棱锥，而正方体一定有一个外接球，该外接球也是所述三棱锥的外接球，正方体的体对角线是其外接球的直径，于是，所求三棱锥外接球的

表面积是 $4\pi \times \left(\frac{1}{2} \times \sqrt{3} \times \sqrt{3}\right)^2 = 9\pi$ 。

故答案为： 9π 。

6 棱长为1的正四面体的外接球半径为 _____ .

答案 $\frac{\sqrt{6}}{4}$

解析 法一：

将正四面体 $ABCD$ 置于正方体中，正四面体的外接球即为正方体的外接球，正方体的体对角线为球的直径，

正方体的棱长为 $\frac{\sqrt{2}}{2}a$ ，体对角线长为 $\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}a = \frac{\sqrt{6}}{2}a = 2R$ ，

故 $R = \frac{\sqrt{6}}{4}a$.

正四面体的体积 $\frac{4}{3}\pi R^3 = 4\sqrt{3}\pi \Rightarrow R = \sqrt{3}$ ， $V = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^3 - 4 \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^3 = \frac{\sqrt{2}}{12}a^3$ ，

从而正四面体的高 h 满足： $\frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{4}a^2h = \frac{\sqrt{2}}{12}a^3 \Rightarrow h = \frac{\sqrt{6}}{3}a$.

利用体积法直接求内切球的体积：

将正四面体 $ABCD$ 分割成以球心 O 为顶点，以正四面体的四个面为底面的四个相同的三棱锥，

它们的底面与正四面体的底面相同，高为内切球的半径 r ，故 $r = \frac{1}{4}h = \frac{\sqrt{6}}{12}a$.

故外接球可以利用 $R + r = h$ 知， $R = \frac{3}{4}h$.

法二：

如图1， O_1 为底面 $\triangle BCD$ 的中心，

$DO_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}a$ ，高 $h = AO_1 = \sqrt{a^2 - DO_1^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}a$ ，

O 一定在 AO_1 上， $\therefore AO = DO = R$ ， $OO_1 = r = h - R = \frac{\sqrt{6}}{3}a - R$ ，

$\therefore$ 在 $\text{Rt}\triangle OO_1D$ 中， $OD^2 = OO_1^2 + O_1D^2$ ，即 $R^2 = \left(\frac{\sqrt{6}}{3}a - R\right)^2 + \frac{1}{3}a^2$ ，

解得 $R = \frac{\sqrt{6}}{4}a$ ， $r = \frac{\sqrt{6}}{3}a - \frac{\sqrt{6}}{4}a = \frac{\sqrt{6}}{12}a$.

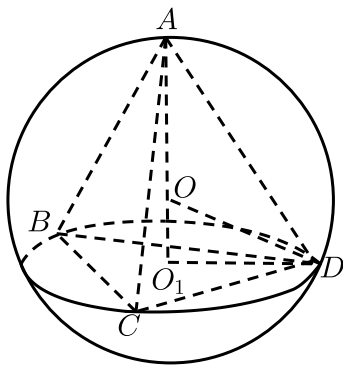


图 1

法三：

如图2， O_1 为底面 $\triangle BCD$ 的中心，则 O 一定在 AO_1 上， AE 为球的大圆直径。

故 $AE \perp O_1D$ ， $AD \perp DE$ ，

设 $AD = a$ ，则 $O_1D = \frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{3}a$ ，

故 $AO_1 = \frac{\sqrt{6}}{3}a$ ， $O_1E = 2R - AO_1 = 2R - \frac{\sqrt{6}}{3}a$ 。

由平面射影定理知， $O_1D^2 = AO_1 \cdot O_1E$ ，即 $\frac{a^2}{3} = \frac{\sqrt{6}}{3}a \cdot \left(2R - \frac{\sqrt{6}}{3}a\right)$ ，

解得 $R = \frac{\sqrt{6}}{4}a$ ， $r = \frac{\sqrt{6}}{3}a - \frac{\sqrt{6}}{4}a = \frac{\sqrt{6}}{12}a$ 。

综上，我们知当正四面体 $ABCD$ 的棱长为 a ，它的高为 $\frac{\sqrt{6}}{3}a$ ，体积为 $\frac{\sqrt{2}}{12}a^3$ ，外接球半径为 $\frac{\sqrt{6}}{4}a$ ，内切球半径为 $\frac{\sqrt{6}}{12}a$ 。

故答案为： $\frac{\sqrt{6}}{4}$ 。

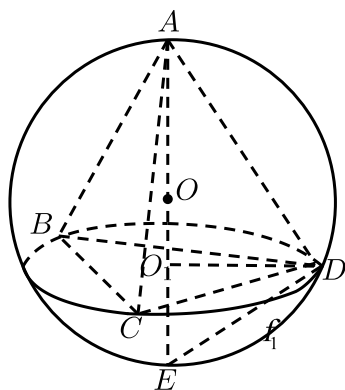


图 2

三、垂面模型（一条直线垂直于一个平面）

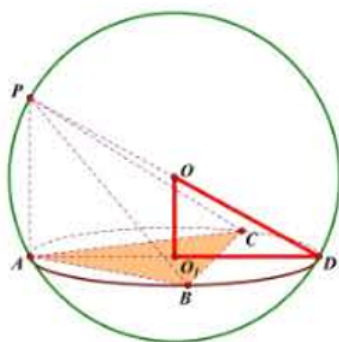


图3-1： $PA \perp$ 平面 ABC



解题步骤

如图3-1, $PA \perp$ 平面 ABC

第一步：将三角形 ABC 画在小圆面上， A 为底面外接圆直径上的一个端点，作外接圆的直径 AD ，连接 PD ，则 PD 必过球心 O ；

第二步： O_1 为三角形 ABC 的外心，所以 $OO_1 \perp$ 平面 ABC ，算出小圆 O_1 的半径 $O_1D = r$ （三角形的外接圆直径算法：利用正弦定理，得 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2r$ ）， $OO_1 = \frac{1}{2}PA$ ；

第三步：利用勾股定理求三棱锥得外接圆半径：

$$\textcircled{1} (2R)^2 = PA^2 + (2r)^2 \Leftrightarrow 2R = \sqrt{PA^2 + (2r)^2}$$

$$\textcircled{2} R^2 = r^2 + OO_1^2 \Leftrightarrow R = \sqrt{r^2 + OO_1^2}$$

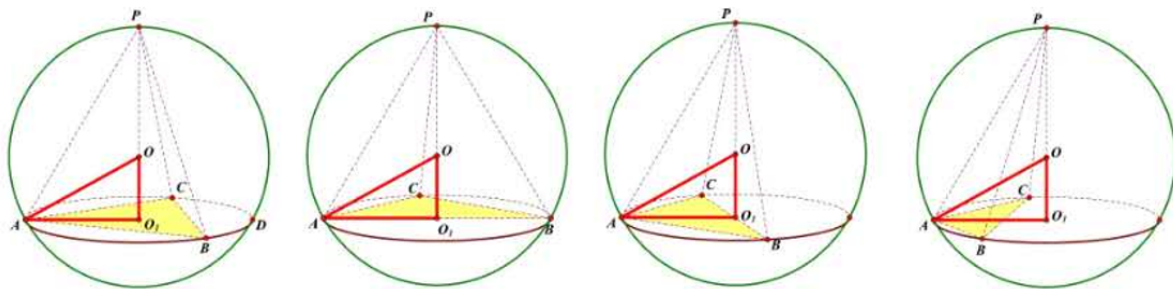


图3-2：P的射影是三角形 ABC 的外心



解题步骤

如图3-2：P的射影是三角形 ABC 的外心 $\Leftrightarrow$ 三棱锥 $P-ABC$ 的三条侧棱相等

第一步：确定球心 O 的位置，取三角形 ABC 的外心 O_1 ，则 P, O, O_1 三点共线

第二步：先算出小圆的半径 O_1 的半径 $AO_1 = r$ ，再算出棱锥的高 $PO_1 = h$

第三步：勾股定理： $OA^2 = O_1A^2 + O_1O^2 \Rightarrow R^2 = (h - R)^2 + r^2$ ，解出 R

7 已知三棱锥 $S-ABC$ 中，底面 ABC 为边长等于 $\sqrt{3}$ 的等边三角形， SA 垂直于底面 ABC ， $SA=1$ ，那么三棱锥 $S-ABC$ 的外接球的表面积为（ ）.

- A. 2π B. 4π C. 5π D. 6π

答案 C

解析 根据已知中底面 $\triangle ABC$ 是边长为 $\sqrt{3}$ 的等边三角形， SA 垂直于底面 ABC ，可得此三棱锥外接球，即为以 $\triangle ABC$ 为底面以 SA 为高的正三棱柱的外接球，
 $\because \triangle ABC$ 是边长为 $\sqrt{3}$ 的正三角形，
 $\therefore \triangle ABC$ 的外接圆半径 $r=1$ ，
 球心到 $\triangle ABC$ 的外接圆圆心的距离 $d=\frac{1}{2}$ ，
 故球的半径 $R=\sqrt{r^2+d^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}$.
 故三棱锥 $S-ABC$ 外接球的表面积 $S=4\pi R^2=5\pi$.
 故选：C.

8 在四面体 $S-ABC$ 中， $SA\perp$ 平面 ABC ， $\angle BAC=120^\circ$ ， $SA=AC=2$ ， $AB=1$ ，则该四面体的外接球的表面积为（ ）.

- A. 11π B. 7π C. $\frac{10\pi}{3}$ D. $\frac{40\pi}{3}$

答案 D

解析 在 $\triangle ABC$ 中，
 $BC^2=AC^2+AB^2-2AB\cdot BC\cdot\cos 120^\circ=7$ ，
 $BC=\sqrt{7}$ ， $\triangle ABC$ 的外接球直径为 $2r=\frac{BC}{\sin \angle BAC}=\frac{\sqrt{7}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{3}}$ ，
 $\therefore (2R)^2=(2r)^2+SA^2=\left(\frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{3}}\right)^2+4=\frac{40}{3}$ ， $S=\frac{40\pi}{3}$.
 故选D.

四、切瓜模型（两个面互相垂直）

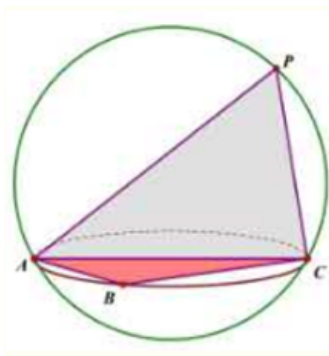


图4-1

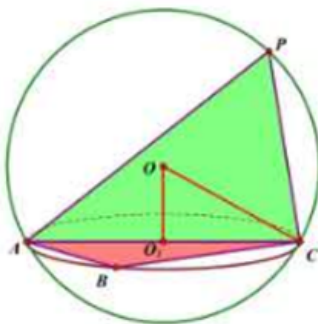


图4-2

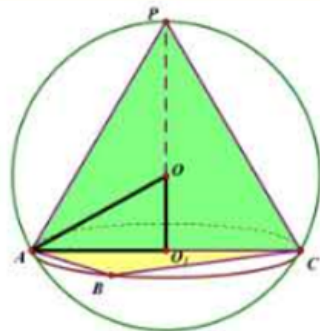


图4-3

【1】如图4-1，平面 $PAC \perp$ 平面 ABC ，且 $AB \perp BC$

(即 AC 为底面外接圆的直径，原因直径所对圆周角为直角)

第一步：易知球心 O 必是三角形 PAC 的外心，即三角形 PAC 的外接圆是大圆，先求出小圆的直径

$$AC = 2r;$$

第二步：在三角形 PAC ，可根据正弦定理 $\frac{AC}{\sin \angle P} = \frac{PC}{\sin \angle PAC} = \frac{AP}{\sin \angle ACP} = 2R$ ，求出 R

【2】如图4-2，平面 $PAC \perp$ 平面 ABC ，且 $AB \perp BC$

(即 AC 为小圆的直径) $OC^2 = O_1C^2 + O_1O^2 \Leftrightarrow R^2 = r^2 + O_1O^2 \Leftrightarrow AC = 2\sqrt{R^2 - O_1O^2}$

【3】如图4-3，平面 $PAC \perp$ 平面 ABC ，且 $AB \perp BC$ (即 AC 为小圆的直径)，且 P 的射影是三角形 ABC 的

外心 $\Leftrightarrow$ 三棱锥 $P-ABC$ 的三条侧棱相等



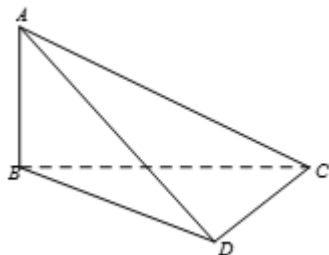
解题步骤

第一步：确定球心 O 的位置，取三角形 ABC 的外心 O_1 ，则 P, O, O_1 三点共线；

第二步：先算出小圆 O_1 的半径 $AO_1 = r$ ，再算出棱锥的高 $PO_1 = h$

第三步：勾股定理： $OA^2 = O_1A^2 + O_1O^2 \Rightarrow R^2 = (h - R)^2 + r^2$ ，解出 R

- 9 如图，已知 $\triangle ABC$ 和 $\triangle BCD$ 所在平面互相垂直， $\angle ABC = \angle BCD = 90^\circ$ ， $AB = a$ ， $BC = b$ ， $CD = c$ ，且 $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ 则三棱锥 $A - BCD$ 的外接球的表面积为 _____ 。



答案 π

解析 因为球心到球面上任意点的距离相等，可以找出一点到 $ABCD$ 四个点的距离相等，又因为直角三角形中斜边上的中点到各顶点距离相等，可知 AD 中点 O 到 A, B, C, D 的距离相等，所以 $AO = \frac{1}{2}$ ，所以 $S = 4\pi \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \pi$ 。

10 已知三棱锥 $P-ABC$ 中，侧面 $PAC \perp$ 底面 ABC ， $\angle BAC = 90^\circ$ ， $AB = AC = 4$ ， $PA = \sqrt{10}$ ， $PC = \sqrt{2}$ ，则三棱锥 $P-ABC$ 外接球的表面积为（ ）。

A. 24π

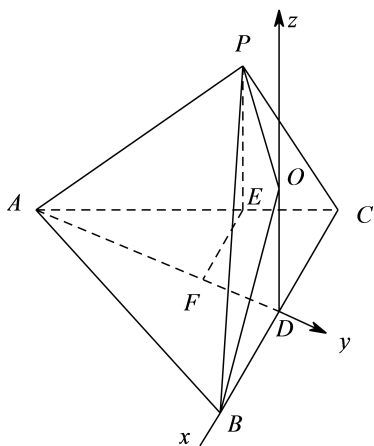
B. 28π

C. 32π

D. 36π

答案 D

解析 取 BC 中点 D ，连结 AD ，过 P 作 $PE \perp$ 平面 ABC ，交 AC 于 E ，过 E 作 $EF \parallel BC$ ，交 AD 于 F ，以 D 为原点， DB 为 x 轴， AD 为 y 轴，过 D 作平面 ABC 的垂线为 z 轴，建立空间直角坐标系，



$$\text{则 } DA = DB = DC = \frac{1}{2}\sqrt{16+16} = 2\sqrt{2},$$

$$\sqrt{AP^2 - AE^2} = \sqrt{PC^2 - CE^2}, \text{ 即 } \sqrt{10 - AE^2} = \sqrt{2 - (4 - AE)^2},$$

$$\text{解得 } AE = 3, CE = 1, PE = 1, AF + EF = \frac{3\sqrt{2}}{2},$$

$$\text{则 } B = (2\sqrt{2}, 0, 0), \text{ 则 } OB = OP,$$

$$\therefore \sqrt{(2\sqrt{2}-0)^2 + (0-t)^2} = \sqrt{\left(0 + \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(0 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + (t-1)^2},$$

$$\text{解得 } t = -1.$$

$$\therefore \text{三棱锥 } P-ABC \text{ 外接球半径 } R = \sqrt{(2\sqrt{2}-0)^2 + (0+1)^2} = 3,$$

$$\therefore \text{三棱锥 } P-ABC \text{ 外接球的表面积为 } S = 4\pi R^2 = 4\pi \times 9 = 36\pi.$$

故选 D.

五、汉堡模型（直棱柱的外接球，圆柱的外接球）

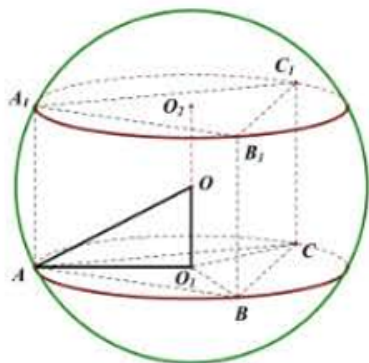


图5-1

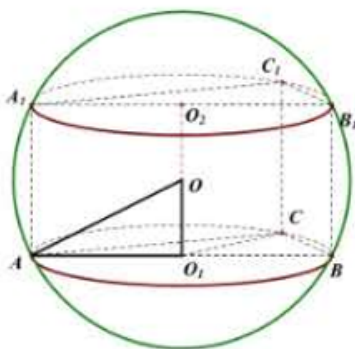


图5-2

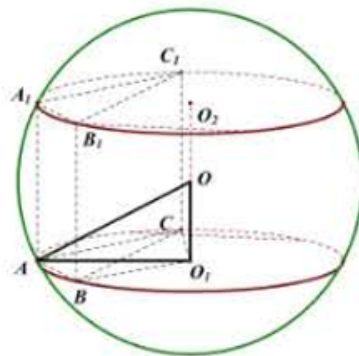


图5-3



解题步骤

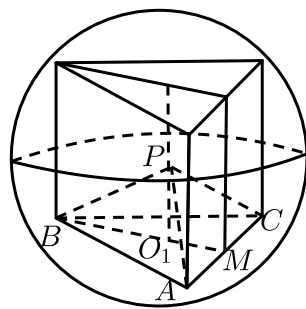
如图5-1, 5-2, 5-3, 直棱柱内接于球（同时直棱柱也内接于圆柱，棱柱的上下底面可以是任意三角形）

第一步：确定球心 O 的位置， O_1 是三角形 ABC 的外心，则 $OO_1 \perp$ 平面 ABC ；

第二步：算出小圆 O_1 的半径 $AO_1 = r$, $OO_1 = \frac{1}{2}AA_1 = \frac{1}{2}h$ （ $AA_1 = h$ 也是圆柱的高）

第三步：勾股定理： $OA^2 = O_1A^2 + O_1O^2 \Rightarrow R^2 = \left(\frac{h}{2}\right)^2 + r^2 \Rightarrow R = \sqrt{r^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2}$, 解出 R

11 已知正三棱柱底面边长是2，外接球的表面积是 16π ，则该三棱柱的体积为（ ）.



A. $2\sqrt{2}$

B. $2\sqrt{3}$

C. $4\sqrt{2}$

D. $4\sqrt{3}$

答案 C

解析 ∵该三棱柱外接球的表面积是 16π ,

$$\therefore 4\pi R^2 = 16\pi,$$

∴该球的半径 $R = 2$,

又正三棱柱底面边长是2,

$$\therefore \text{底面三角形的外接圆半径 } r = \frac{2}{3}\sqrt{4-1} = \frac{2\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore \text{该三棱柱的侧棱长是 } 2\sqrt{2^2 - \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{4\sqrt{6}}{3}.$$

$$\therefore \text{该三棱柱的体积为 } \frac{\sqrt{3}}{4} \times 4 \times \frac{4\sqrt{6}}{3} = 4\sqrt{2},$$

故选：C.

12 已知正四棱柱的底面边长为2，侧面积为24，则此正四棱柱的外接球表面积为_____。

答案 17π

解析 设正四棱柱的高为 h ，

则该正四棱柱的侧面积为 $4 \times 2 \times h = 24$ ，

解得 $h = 3$ 。

底面正方形的外接圆直径为 $2r = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$ ，

设外接球的半径为 R ，

则 $2R = \sqrt{(2r)^2 + h^2} = \sqrt{17}$ ，

因此，该正四棱柱的外接球的表面积为 $4\pi R^2 = \pi \times (2R)^2 = 17\pi$ 。

故答案为： 17π 。

13 正三棱柱的底面边长为 $\sqrt{3}$ ，高为2，则这个三棱柱的外接球的表面积为（ ）。

A. 4π

B. $8\sqrt{2}\pi$

C. $\frac{8\sqrt{2}}{3}\pi$

D. 8π

答案 D

解析 由正三棱柱的底面边长为 $\sqrt{3}$ ，

得底面所在平面截其外接球所成的圆 O 的半径 $r = 1$ ，

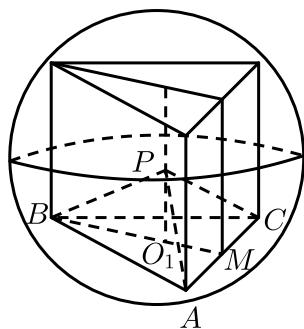
又由正三棱柱的高为2，则球心到圆 O 的球心距 $d = 1$ ，

根据球心距，截面圆半径，球半径构成直角三角形，

满足勾股定理，我们易得球半径 R 满足： $R^2 = r^2 + d^2 = 2$ ， $\therefore R = \sqrt{2}$ ，

$\therefore$ 外接球的表面积 $S = 4\pi R^2 = 8\pi$ 。

故选D。



14 已知三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 的侧棱垂直于底面，各顶点都在同一球面上，若该棱柱体的体积为 $\sqrt{3}$ ， $BC = \sqrt{3}$ ， $AC = 1$ ， $\angle ACB = 90^\circ$ ，则此球的体积等于（ ）。

A. $\frac{40\sqrt{10}}{3}\pi$

B. $\frac{64\sqrt{2}}{3}\pi$

C. $\frac{8\sqrt{2}}{3}\pi$

D. 8π

答案 C

解析 $\because$ 三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 的侧棱垂直于底面，棱柱的体积为 $\sqrt{3}$ ， $BC = \sqrt{3}$ ， $AC = 1$ ，

$$\angle ACB = 90^\circ,$$

$$\therefore \frac{1}{2} \times \sqrt{3} \times 1 \times AA_1 = \sqrt{3},$$

$$\therefore AA_1 = 2,$$

$$\because BC = \sqrt{3}, AC = 1, \angle ACB = 90^\circ, \text{ 则 } \triangle ABC \text{ 外接圆的半径 } R = 1,$$

$$\therefore \text{ 外接球的半径为 } \sqrt{1+1} = \sqrt{2},$$

$$\therefore \text{ 球的体积等于 } \frac{4}{3}\pi \cdot (\sqrt{2})^3 = \frac{8\sqrt{2}}{3}\pi,$$

故选 C。

15 一个六棱柱的底面是正六边形，侧棱垂直于底面，所有棱的长都为1，顶点都在同一个球面上，则该球的体积为（ ）.

A. 20π

B. $\frac{20\sqrt{5}\pi}{3}$

C. 5π

D. $\frac{5\sqrt{5}\pi}{6}$

答案 D

解析 作出六棱柱的最大对角面与外截球的截面，如右图，

则该截面矩形分别以底面外接圆直径和六棱柱高为两边，

设球心为 O ，正六棱柱的上下底面中心分别为 O_1 ， O_2 ，则球心 O 是 O_1 ， O_2 的中点.

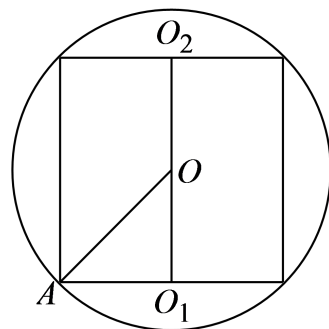
$\because$ 正六棱柱底面边长为1，侧棱长为1，

$\therefore$ 在 $\text{Rt} \triangle AO_1O$ 中， $AO_1 = 1$ ， $O_1O = \frac{1}{2}$ ，可得

$$AO = \sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2},$$

因此，该球的体积为 $V = \frac{4}{3}\pi \cdot \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^3 = \frac{5\sqrt{5}\pi}{6}$.

故选：D.



六、内切球问题

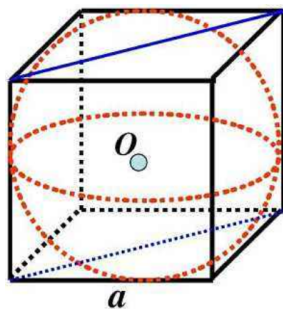


图6-1：正方体内切球

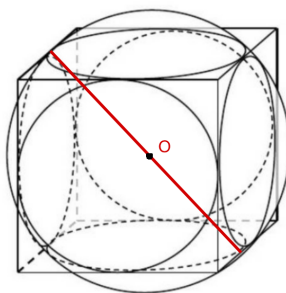


图6-2：正方体棱切球

【1】如图6-1，正方体内切球直径： $2R = a$ （ a 为正方体棱长）

【2】如图6-2正方体的棱切球直径=面对角线长，即 $2R = \sqrt{2}a$ （ a 为正方体棱长）

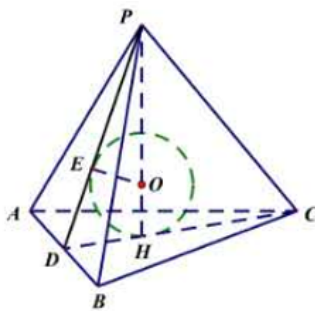


图6-3：正三棱锥内切球

【3】如图6-3，三棱锥 $P-ABC$ 是正三棱锥，求内切球半径。

第一步：先作出内切球的截面图， E, H 分别为两个三角形的外心；

第二步：求 $DH = \frac{1}{3}BD$, $PO = PH - r$, PD 是侧面三角形 ABP 的高；

第三步：由三角形 POE 相似于三角形 PDH , 建立等式： $\frac{OE}{DH} = \frac{PO}{PD}$, 解出 r

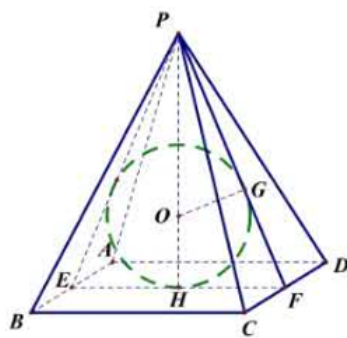


图6-4：正四棱锥内切球

【4】如图6-4，四棱锥 $P-ABCD$ 是正四棱锥，求其内切球的半径

第一步：先作出内切球的截面图， P, O, H 三点共线；

第二步：求 $FH = \frac{1}{2}BC$, $PO = PH - r$, PF 是侧面三角形 PCD 的高；

第三步：由三角形 POG 相似于 PFH , 建立等式： $\frac{OG}{HF} = \frac{PO}{PF}$, 解出 r



三棱锥内切球问题解题步骤

题设：三棱锥 $P-ABC$ 是任意三棱锥，求其内切球半径

方法：等体积法，即内切球球心与四个面构成的四个三棱锥的体积之和相等

第一步：先算出四个表面积和整个锥体的面积；

第二步：设内切球半径为 r

建立等式： $V_{P-ABC} = V_{O-ABC} + V_{O-PAB} + V_{O-PAC} + V_{O-PBC}$

$$\Rightarrow V_{P-ABC} = \frac{1}{3}S_{\triangle ABC} \cdot r + \frac{1}{3}S_{\triangle PAB} \cdot r + \frac{1}{3}S_{\triangle PAC} \cdot r + \frac{1}{3}S_{\triangle PBC} \cdot r = \frac{1}{3}(S_{\triangle ABC} + S_{\triangle PAB} + S_{\triangle PAC} + S_{\triangle PBC}) \cdot r$$

$$\text{第三步：解出 } r = \frac{3V_{P-ABC}}{S_{O-ABC} + S_{O-PAB} + S_{O-PBC}}$$

16 若一个正三棱柱存在外接球与内切球，则它的外接球与内切球表面积之比为（ ）。

A. 3:1

B. 4:1

C. 5:1

D. 6:1

答案

C

解析

设正三棱柱底面正三角形的边长为 a ，内切球半径为 R_1 ， R_2 ，当球内切于正三棱柱时，球的

$$\text{半径 } R_1 = \frac{\frac{\sqrt{3}a}{2} \times \frac{1}{3}}{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{3}a}{6}, \text{ 故正棱柱的高为 } 2 \times \frac{\sqrt{3}a}{6} = \frac{\sqrt{3}a}{3}.$$

当球外接正三棱柱时，球心是上下底面中心连接的中点，且球心与正三棱柱两个底面三角形

构成两个正三棱柱。所以 $R_2^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{6}a\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2$,

$$\text{所以 } R_2 = \frac{\sqrt{15}a}{6}.$$

所以外接球与内切球半径之比为

$$R_2 : R_1 = \frac{\sqrt{15}a}{6} : \frac{\sqrt{3}a}{6} = \sqrt{5} : 1.$$

所以外接球与内切球表面积之比为 5:1.

故选 C.

17 正四面体的内切球和外接球的半径之比为 () .

A. 1:2

B. 1:3

C. 1:4

D. 1:9

答案 B

解析

设棱长为 a , 外接球的半径为 R , 内切球的半径为 r , 则 $R^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{6}}{3}a - R\right)^2$,

解得 $R = \frac{\sqrt{6}}{4}a$, $r = \frac{\sqrt{6}}{3}a - \frac{\sqrt{6}}{4}a = \frac{\sqrt{6}}{12}a$, 有 $r:R = 1:3$.

故选B.

18 已知正三棱锥 $P-ABC$ 的底面的边长为6, 侧棱长为 $\sqrt{21}$, 则该三棱锥的内切球的半径为 _____

答案 1

解析

体积法. P 到底面的高为 $\sqrt{(\sqrt{21})^2 - (2\sqrt{3})^2} = 3$, 侧面积为 $\frac{1}{2} \times 6 \times \sqrt{21-9} = 6\sqrt{3}$, 底面积为 $\frac{\sqrt{3}}{4} \times 6^2 = 9\sqrt{3}$, 所以 $\frac{1}{3} \times 9\sqrt{3} \times 3 = \frac{r}{3} (6\sqrt{3} \times 3 + 9\sqrt{3})$, 解得 $r = 1$.

19 正方体的棱长为 a , 求其外接球、棱切球和内切球的半径.

答案

外接球半径为 $\frac{\sqrt{3}}{2}a$.

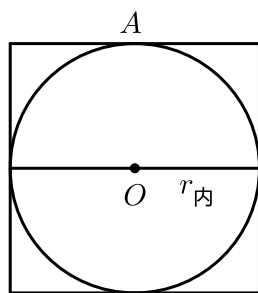
棱切球半径为 $\frac{\sqrt{2}}{2}a$.

内切球半径为 $\frac{a}{2}$.

解析

若正方体的棱长为 a ,

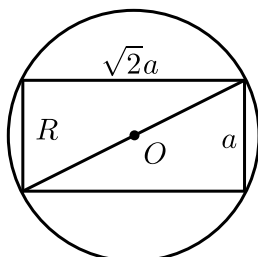
(1) 正方体的内切球与各面的切点为正方体各面的中心, 所以经过正方体相对两面的中心且与棱平行的截面, 则球的一个大圆是其正方形截面的内切圆, 如图(1)所示, 则 $r_{\text{内}} = \frac{1}{2}a$;



(1)

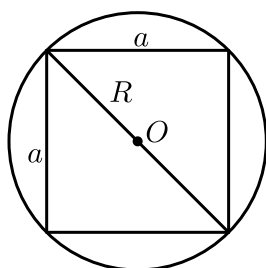
(2) 正方体的外接球与正方体的连结点为正方体各个顶点，故应作正方体的对角面，则球的一个大圆为对角面矩形外接圆，如图(2)所示，

设球的半径为 R ，则 $(2R)^2 = (\sqrt{2}a)^2 + a^2$ ，则 $R = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ ；



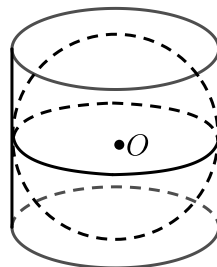
(2)

(3) 与正方体的各棱均相切的球与正方体相连接的是正方体各棱的中点，应作出经过正方体一组平行棱中点的截面，则球的轴截面是其正方形截面的外接圆，如图(3)所示，则球的半径为 $\frac{\sqrt{2}}{2}a$ 。



(3)

20 如图是古希腊数学家阿基米德的墓碑文，墓碑上刻着一个圆柱，圆柱内有一个内切球，这个球的直径恰好与圆柱的高相等．相传这个图形表达了阿基米德最引以自豪的发现．我们来重温这个伟大发现．经计算球的体积等于圆柱体积的 _____ 倍．



答案 $\frac{2}{3}$

解析 因为圆柱内切一个球，
 所以圆柱的底面半径与球的半径相等，
 不妨设为 r ，
 则圆柱的高为 $2r$ ，
 所以 $V_{\text{圆柱}} = \pi r^2 \cdot 2r = 2\pi r^3$ ，
 $V_{\text{球}} = \frac{4}{3}\pi r^3$ ，
 所以球与圆柱的体积之比为 $2:3$ ，即球的体积等于圆柱体积的 $\frac{2}{3}$ 倍．

外接球与内切球小结

