

立体几何外接球与内切球

一、正方体（长方体）外接球

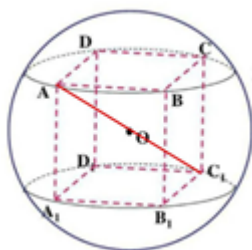


图1-1

长方体外接球： $2R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ （ a, b, c 分别为长方体的长、宽、高）

正方体外接球： $2R = \sqrt{3}a$ （ a 为正方体的棱长）

1 已知一个长方体的同一个顶点出发的三条棱长分别为 $1, \sqrt{2}, \sqrt{6}$ ，则这个长方体外接球的表面积为_____。

2 棱长为1的正方体的外接球半径为多少？长宽高分别为1、2、3的长方体的外接球半径又是多少？

二、墙角模型（三条线两两垂直）

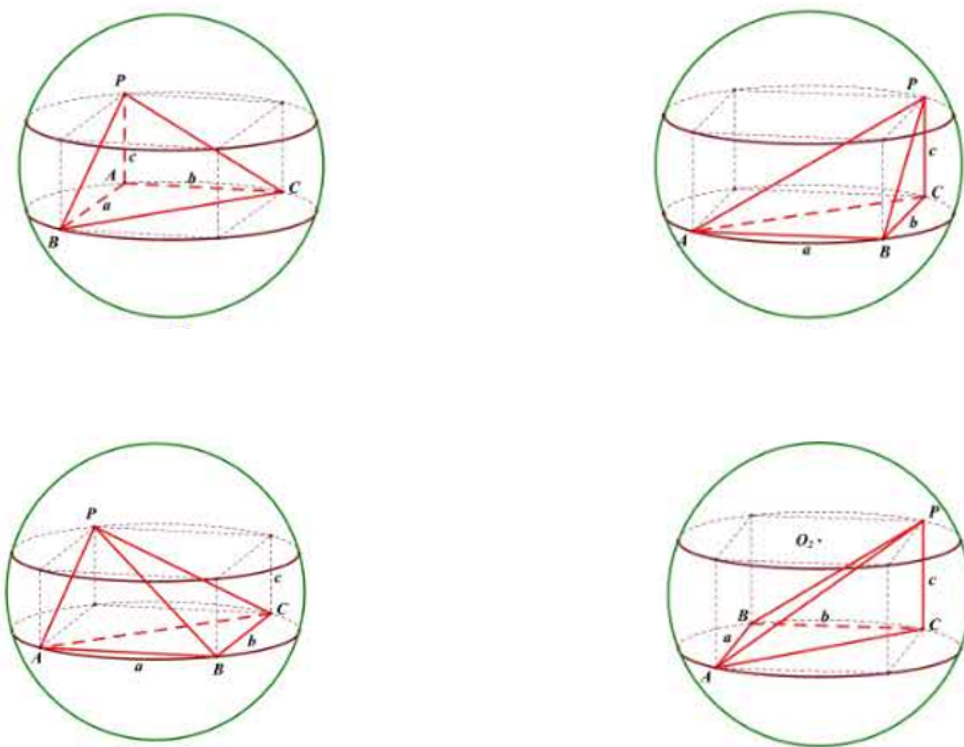


图2-1：三条线两两垂直的常见模型



方法：找到两两垂直的线段(补全图形)，直接用公式 $2R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

- 3 在三棱锥 $A - BCD$ 中，侧棱 AB 、 AC 、 AD 两两垂直， $\triangle ABC$ 、 $\triangle ACD$ 、 $\triangle ADB$ 的面积分别为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 、 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 、 $\frac{\sqrt{6}}{2}$ ，则三棱锥 $A - BCD$ 的外接球的体积为 _____。
- 4 三棱锥 $P - ABC$ 中， PA 、 PB 、 PC 两两垂直， $PA = 1$ ， $PB = PC = \sqrt{2}$ ，已知空间中有一个点到这四个点距离相等，则这个距离是 _____。
- 5 若三棱锥的三个侧面两两垂直，且侧棱长均为 $\sqrt{3}$ ，则其外接球的表面积是 _____。
- 6 棱长为 1 的正四面体的外接球半径为 _____。

三、垂面模型（一条直线垂直于一个平面）

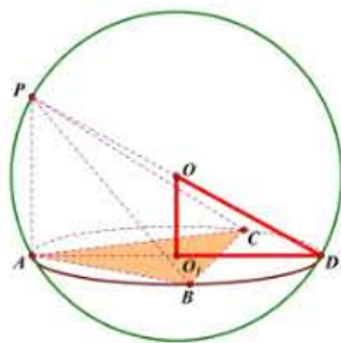


图3-1： $PA \perp$ 平面 ABC



解题步骤

如图3-1， $PA \perp$ 平面 ABC

第一步：将三角形 ABC 画在小圆面上， A 为底面外接圆直径上的一个端点，作外接圆的直径 AD ，连接 PD ，则 PD ，则 PD 必过球心 O ；

第二步： O_1 为三角形 ABC 的外心，所以 $OO_1 \perp$ 平面 ABC ，算出小圆 O_1 的半径 $O_1D = r$ （三角形的外接圆直径算法：利用正弦定理，得 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2r$ ）， $OO_1 = \frac{1}{2}PA$ ；

第三步：利用勾股定理求三棱锥得外接圆半径：

$$\textcircled{1} (2R)^2 = PA^2 + (2r)^2 \Leftrightarrow 2R = \sqrt{PA^2 + (2r)^2}$$

$$\textcircled{2} R^2 = r^2 + OO_1^2 \Leftrightarrow R = \sqrt{r^2 + OO_1^2}$$

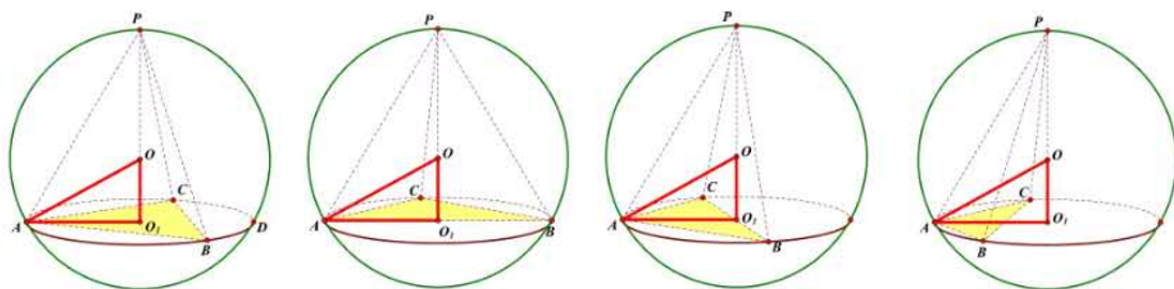


图3-2：P的射影是三角形ABC的外心



解题步骤

如图3-2：P的射影是三角形ABC的外心 $\Leftrightarrow$ 三棱锥P-ABC的三条侧棱相等

第一步：确定球心O的位置，取三角形ABC的外心 O_1 ，则P, O, O_1 三点共线

第二步：先算出小圆的半径 O_1 的半径 $AO_1 = r$ ，再算出棱锥的高 $PO_1 = h$

第三步：勾股定理： $OA^2 = O_1A^2 + O_1O^2 \Rightarrow R^2 = (h - R)^2 + r^2$ ，解出R

- 7 已知三棱锥S-ABC中，底面ABC为边长等于 $\sqrt{3}$ 的等边三角形，SA垂直于底面ABC，SA=1，那么三棱锥S-ABC的外接球的表面积为（ ）。

A. 2π B. 4π C. 5π D. 6π

- 8 在四面体S-ABC中， $SA \perp$ 平面ABC， $\angle BAC = 120^\circ$ ， $SA = AC = 2$ ， $AB = 1$ ，则该四面体的外接球的表面积为（ ）。

A. 11π B. 7π C. $\frac{10\pi}{3}$ D. $\frac{40\pi}{3}$

四、切瓜模型（两个面互相垂直）

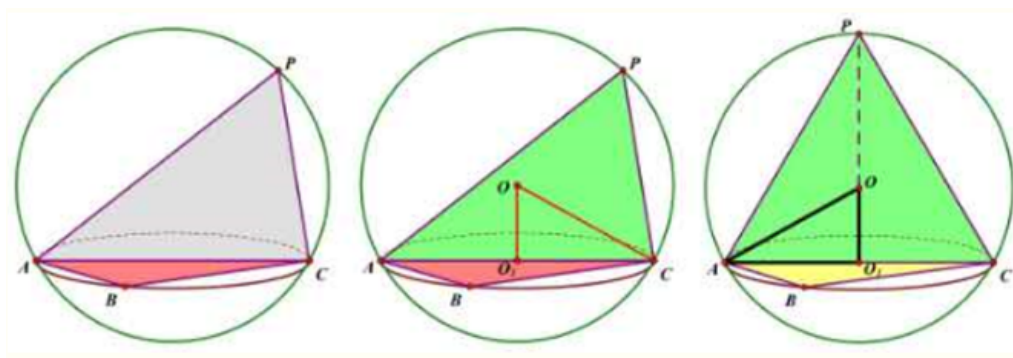


图4-1

图4-2

图4-3

【1】如图4-1，平面 $PAC \perp$ 平面 ABC ，且 $AB \perp BC$

(即 AC 为底面外接圆的直径，原因直径所对圆周角为直角)

第一步：易知球心 O 必是三角形 PAC 的外心，即三角形 PAC 的外接圆是大圆，先求出小圆的直径

$AC = 2r$ ；

第二步：在三角形 PAC ，可根据正弦定理 $\frac{AC}{\sin \angle P} = \frac{PC}{\sin \angle PAC} = \frac{AP}{\sin \angle ACP} = 2R$ ，求出 R

【2】如图4-2，平面 $PAC \perp$ 平面 ABC ，且 $AB \perp BC$

(即 AC 为小圆的直径) $OC^2 = O_1C^2 + O_1O^2 \Leftrightarrow R^2 = r^2 + O_1O^2 \Leftrightarrow AC = 2\sqrt{R^2 - O_1O^2}$

【3】如图4-3，平面 $PAC \perp$ 平面 ABC ，且 $AB \perp BC$ (即 AC 为小圆的直径)，且 P 的射影是三角形 ABC 的

外心 $\Leftrightarrow$ 三棱锥 $P-ABC$ 的三条侧棱相等



解题步骤

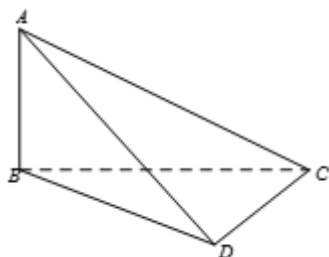
第一步：确定球心 O 的位置，取三角形 ABC 的外心 O_1 ，则 P, O, O_1 三点共线；

第二步：先算出小圆 O_1 的半径 $AO_1 = r$ ，再算出棱锥的高 $PO_1 = h$

第三步：勾股定理： $OA^2 = O_1A^2 + O_1O^2 \Rightarrow R^2 = (h - R)^2 + r^2$ ，解出 R

9

如图，已知 $\triangle ABC$ 和 $\triangle BCD$ 所在平面互相垂直， $\angle ABC = \angle BCD = 90^\circ$ ， $AB = a$ ， $BC = b$ ， $CD = c$ ，且 $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ ，则三棱锥 $A - BCD$ 的外接球的表面积为_____。



10

已知三棱锥 $P - ABC$ 中，侧面 $PAC \perp$ 底面 ABC ， $\angle BAC = 90^\circ$ ， $AB = AC = 4$ ， $PA = \sqrt{10}$ ， $PC = \sqrt{2}$ ，则三棱锥 $P - ABC$ 外接球的表面积为（ ）。

A. 24π

B. 28π

C. 32π

D. 36π

五、汉堡模型（直棱柱的外接球，圆柱的外接球）

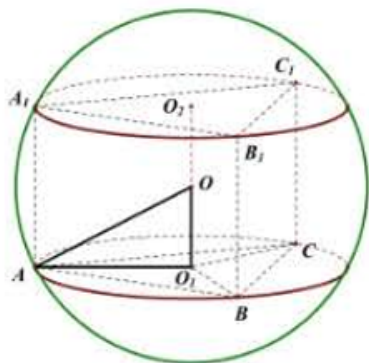


图5-1

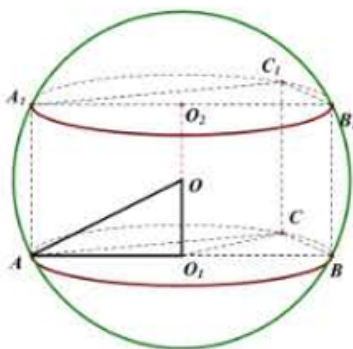


图5-2

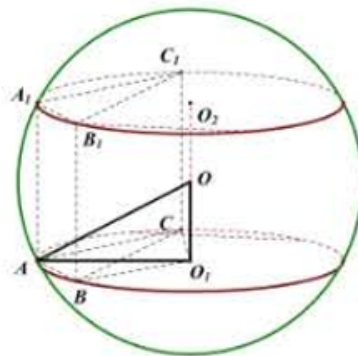


图5-3



解题步骤

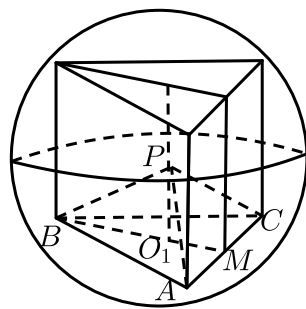
如图5-1, 5-2, 5-3, 直棱柱内接于球（同时直棱柱也内接于圆柱，棱柱的上下底面可以是任意三角形）

第一步：确定球心 O 的位置， O_1 是三角形 ABC 的外心，则 $OO_1 \perp$ 平面 ABC ；

第二步：算出小圆 O_1 的半径 $AO_1 = r$, $OO_1 = \frac{1}{2}AA_1 = \frac{1}{2}h$ （ $AA_1 = h$ 也是圆柱的高）

第三步：勾股定理： $OA^2 = O_1A^2 + O_1O^2 \Rightarrow R^2 = \left(\frac{h}{2}\right)^2 + r^2 \Rightarrow R = \sqrt{r^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2}$, 解出 R

- 11 已知正三棱柱底面边长是2，外接球的表面积是 16π ，则该三棱柱的体积为（ ）。



- A. $2\sqrt{2}$ B. $2\sqrt{3}$ C. $4\sqrt{2}$ D. $4\sqrt{3}$

- 12 已知正四棱柱的底面边长为2，侧面积为24，则此正四棱柱的外接球表面积为 _____。

- 13 正三棱柱的底面边长为 $\sqrt{3}$ ，高为2，则这个三棱柱的外接球的表面积为（ ）。

- A. 4π B. $8\sqrt{2}\pi$ C. $\frac{8\sqrt{2}}{3}\pi$ D. 8π

- 14 已知三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 的侧棱垂直于底面，各顶点都在同一球面上，若该棱柱体的体积为 $\sqrt{3}$ ， $BC = \sqrt{3}$ ， $AC = 1$ ， $\angle ACB = 90^\circ$ ，则此球的体积等于（ ）。

- A. $\frac{40\sqrt{10}}{3}\pi$ B. $\frac{64\sqrt{2}}{3}\pi$ C. $\frac{8\sqrt{2}}{3}\pi$ D. 8π

- 15 一个六棱柱的底面是正六边形，侧棱垂直于底面，所有棱的长都为1，顶点都在同一个球面上，则该球的体积为（ ）。

- A. 20π B. $\frac{20\sqrt{5}\pi}{3}$ C. 5π D. $\frac{5\sqrt{5}\pi}{6}$

六、内切球问题

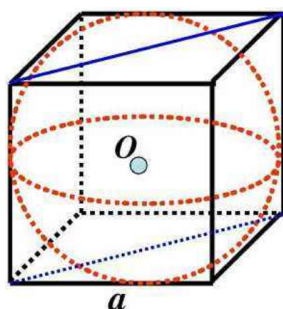


图6-1：正方体内切球

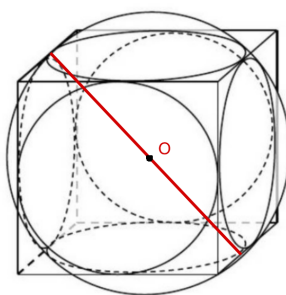


图6-2：正方体棱切球

【1】如图6-1，正方体内切球直径： $2R = a$ （ a 为正方体棱长）

【2】如图6-2正方体的棱切球直径=面对角线长，即 $2R = \sqrt{2}a$ （ a 为正方体棱长）

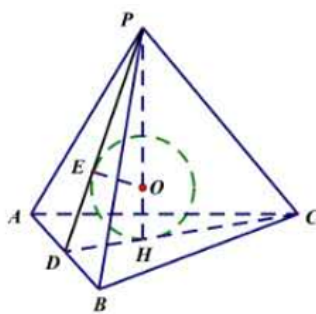


图6-3：正三棱锥内切球

【3】如图6-3，三棱锥 $P-ABC$ 是正三棱锥，求内切球半径。

第一步：先作出内切球的截面图， E, H 分别为两个三角形的外心；

第二步：求 $DH = \frac{1}{3}BD$, $PO = PH - r$, PD 是侧面三角形 ABP 的高；

第三步：由三角形 POE 相似于三角形 PDH , 建立等式： $\frac{OE}{DH} = \frac{PO}{PD}$, 解出 r

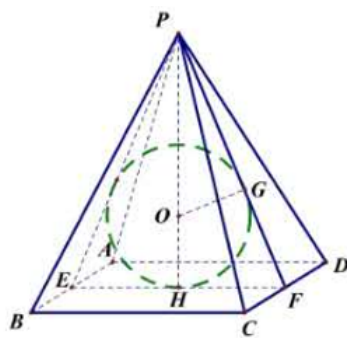


图6-4：正四棱锥内切球

【4】如图6-4，四棱锥 $P-ABC$ 是正四棱锥，求其内切球的半径

第一步：先作出内切球的截面图， P, O, H 三点共线；

第二步：求 $FH = \frac{1}{2}BC$, $PO = PH - r$, PF 是侧面三角形 PCD 的高；

第三步：由三角形 POG 相似于 PFH , 建立等式： $\frac{OG}{HF} = \frac{PO}{PF}$, 解出 r



三棱锥内切球问题解题步骤

题设：三棱锥 $P-ABC$ 是任意三棱锥，求其内切球半径

方法：等体积法，即内切球球心与四个面构成的四个三棱锥的体积之和相等

第一步：先算出四个表面积和整个锥体的面积；

第二步：设内切球半径为 r

建立等式： $V_{P-ABC} = V_{O-ABC} + V_{O-PAB} + V_{O-PAC} + V_{O-PBC}$

$$\Rightarrow V_{P-ABC} = \frac{1}{3}S_{\Delta ABC} \cdot r + \frac{1}{3}S_{\Delta PAB} \cdot r + \frac{1}{3}S_{\Delta PAC} \cdot r + \frac{1}{3}S_{\Delta PBC} \cdot r = \frac{1}{3}(S_{\Delta ABC} + S_{\Delta PAB} + S_{\Delta PAC} + S_{\Delta PBC}) \cdot r$$

第三步：解出 $r = \frac{3V_{P-ABC}}{S_{O-ABC} + S_{O-PAB} + S_{O-PBC}}$

16 若一个正三棱柱存在外接球与内切球，则它的外接球与内切球表面积之比为（ ）。

- A. 3:1 B. 4:1 C. 5:1 D. 6:1

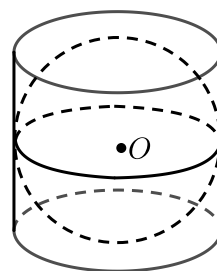
17 正四面体的内切球和外接球的半径之比为（ ）。

- A. 1:2 B. 1:3 C. 1:4 D. 1:9

18 已知正三棱锥 $P-ABC$ 的底面的边长为 6，侧棱长为 $\sqrt{21}$ ，则该三棱锥的内切球的半径为 _____

19 正方体的棱长为 a ，求其外接球、棱切球和内切球的半径。

20 如图是古希腊数学家阿基米德的墓碑文，墓碑上刻着一个圆柱，圆柱内有一个内切球，这个球的直径恰好与圆柱的高相等。相传这个图形表达了阿基米德最引以自豪的发现。我们来重温这个伟大发现。经计算球的体积等于圆柱体积的 _____ 倍。



外接球与内切球小结

