

基本不等式（小题）

一、基本不等式

1 已知 $a, b \in \mathbf{R}_+$ ，已知 $\frac{1}{a} + \frac{9}{b} = 2$ ，则 $a + b$ 的最小值为 _____。

答案 8

解析 略

2 已知正数 x, y 满足 $\frac{1}{x} + \frac{3}{y+2} = 1$ ，则 $x + y$ 的最小值为 _____。

答案 $2 + 2\sqrt{3}$

解析 $\because$ 正数 x, y 满足 $\frac{1}{x} + \frac{3}{y+2} = 1$ ，
 $\therefore x + y = (x + y + 2) \left(\frac{1}{x} + \frac{3}{y+2} \right) - 2$
 $= 2 + \frac{y+2}{x} + \frac{3x}{y+2}$
 $\geq 2 + 2\sqrt{\frac{y+2}{x} \cdot \frac{3x}{y+2}} = 2 + 2\sqrt{3}$ ，
 当且仅当 $x = y = 1 + \sqrt{3}$ 时取等号，
 $\therefore x + y$ 的最小值为 $2 + 2\sqrt{3}$ 。
 故答案为： $2 + 2\sqrt{3}$ 。

3 若 $a > 0, b > 0$ ，且 $a + b = 4$ ，则下列不等式恒成立的是（ ）。

A. $\frac{1}{ab} > \frac{1}{2}$

B. $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \leq 1$

C. $\sqrt{ab} \geq 2$

D. $a^2 + b^2 \geq 8$

答案 D

解析 $\because a > 0, b > 0$ 且 $a + b = 4$,

$$\therefore 4 = a + b \geq 2\sqrt{ab},$$

$$\therefore \sqrt{ab} \leq 2, \text{ 即 } ab \leq 4.$$

A: $\because ab \leq 4, \therefore \frac{1}{ab} \geq \frac{1}{4}$, 故A不恒成立;

B: $\because ab \leq 4 = a + b, \therefore \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq 1$, 故B不恒成立;

C: $\because \sqrt{ab} \leq 2, \therefore$ C不恒成立;

$$D: \because a^2 + b^2 \geq \frac{(a+b)^2}{2} = \frac{4^2}{2} = 8, \therefore$$
D恒成立.

故选D.

4 已知 $\log_2(a-2) + \log_2(b-1) \geq 1$, 则 $2a+b$ 取到最小值时, $ab = (\quad)$.

A. 3

B. 4

C. 6

D. 9

答案 D

解析 由于 $\log_2(a-2) + \log_2(b-1) \geq 1$, 可得 $a-2 > 0, b-1 > 0$, 且 $(a-2)(b-1) \geq 2$, 所以

$$2a+b = 2(a-2) + (b-1) + 5 \geq 2\sqrt{2(a-2)(b-1)} + 5 \geq 2\sqrt{2 \times 2} + 5 = 9, \text{ 当 } 2(a-2) = b-1$$

且 $(a-2)(b-1) = 2$ 时等号成立, 解得 $a = b = 3$, 所以 $2a+b$ 取到最小值时 $ab = 3 \times 3 = 9$.

故选D.

5 设正数 x, y 满足 $x+y=1$, 若不等式 $\frac{1}{x} + \frac{a}{y} \geq 4$ 对任意 x, y 成立, 则正实数 a 的取值范围 ($\quad$).

A. $a \geq 4$

B. $a > 1$

C. $a \geq 1$

D. $a > 4$

答案 C

解析 $\frac{1}{x} + \frac{a}{y}$

$$= (x+y) \left(\frac{1}{x} + \frac{a}{y} \right)$$

$$= 1 + \frac{ax}{y} + \frac{y}{x} + a \geq 1 + a + 2\sqrt{a}$$

$$= (\sqrt{a} + 1)^2,$$

$$\text{又} \because \frac{1}{x} + \frac{a}{y} \geq 4,$$

则 $4 \leq (\sqrt{a} + 1)^2$, 解得 $a \geq 1$.

故选C.

6 若 $a, b, c \in \mathbf{R}^*$, 则 $\frac{(a^2 + b^2 + c^2)^2 + 5}{bc + 2ac}$ 的最小值为 ().

A. $\frac{14}{3}$

B. $2\sqrt{5}$

C. 4

D. 5

答案 C

解析 由

$$a^2 + b^2 + c^2 = a^2 + \frac{4}{5}c^2 + b^2 + \frac{1}{5}c^2 \geq 2 \times \frac{2}{\sqrt{5}}ac + 2 \times \frac{1}{\sqrt{5}}bc = \frac{2}{\sqrt{5}}(2ac + bc),$$

当且仅当 $\frac{1}{2}a = b = \frac{1}{\sqrt{5}}c$ 时取“=”,

所以

$$\frac{(a^2 + b^2 + c^2)^2 + 5}{bc + 2ac} \geq \frac{\frac{4}{5}(2ac + bc)^2 + 5}{bc + 2ac} = \frac{4}{5}(bc + 2ac) + \frac{5}{bc + 2ac} \geq 2 \times 2 = 4,$$

当且仅当 $bc + 2ac = \frac{5}{2}$ 时取“=”,

综上, 当 $\frac{1}{4}a^2 = b^2 = \frac{\sqrt{5}}{10}$, $c^2 = \frac{\sqrt{5}}{2}$ 时, $\frac{(a^2 + b^2 + c^2)^2 + 5}{bc + 2ac}$ 有最小值4,

故选C.

7 解答下列各题:

(1) 已知 $a, b, c \in \mathbf{R}_+$, $a > b$, 则 $2a^2 + \frac{1}{ab} + \frac{1}{a(a-b)} - 10ac + 25c^2$ 的最小值为 ().

A. 2

B. 4

C. $2\sqrt{5}$

D. 5

(2) 已知 $a, b \in \mathbf{R}_+$, $a > b$, 那么 $a^2 + \frac{1}{b(a-b)}$ 的最小值为 ().

A. 2

B. 3

C. 4

D. 5

答案 (1) B

(2) B

解析 (1) $2a^2 + \frac{1}{ab} + \frac{1}{a(a-b)} - 10ac + 25c^2 = (a - 5c)^2 + (ab + \frac{1}{ab}) + [a(a-b) + \frac{1}{a(a-b)}] \geq 4$
 , 当且仅当 $a = 5c, ab = 1, a(a-b) = 1$, 即 $a = \sqrt{2}, b = \frac{\sqrt{2}}{2}, c = \frac{\sqrt{2}}{5}$ 时等号成立.

故选B.

$$(2) \text{ 方法一: } a^2 + \frac{1}{b(a-b)} \geq a^2 + \frac{1}{\left[\frac{b+(a-b)}{2}\right]^2} = a^2 + \frac{4}{a^2} \geq 4\sqrt{a^2 \cdot \frac{4}{a^2}} = 4,$$

当且仅当 $b = a - b$, $a^2 = 2$, 即 $a = \sqrt{2}$, $c = \frac{\sqrt{2}}{5}$ 时等号成立.

方法二:

$$a^2 + \frac{1}{b(a-b)} = (a-2b)^2 + 4b(a-b) + \frac{1}{b(a-b)} \geq 0 + 4\sqrt{4b(a-b) \cdot \frac{1}{b(a-b)}} = 4,$$

当且仅当 $a = 2b$, $4b(a-b) = \frac{1}{b(a-b)}$, 即 $a = \sqrt{2}$, $b = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时等号成立.

故选B.

8 已知 m, n 为正实数, 则当 $\frac{n}{m} = \underline{\hspace{2cm}}$ 时, $\frac{9m}{m+2n} + \frac{2n}{m}$ 取得最小值.

答案 1

解析 $\because m, n$ 为正实数,

$$\therefore \frac{n}{m} > 0,$$

$$\therefore \frac{9m}{m+2n} + \frac{2n}{m}$$

$$= \frac{9}{1 + \frac{2n}{m}} + \frac{2n}{m}$$

$$= \frac{9}{1 + \frac{2n}{m}} + 1 + \frac{2n}{m} - 1$$

$$\geq 2\sqrt{\frac{9}{1 + \frac{2n}{m}} \cdot \left(1 + \frac{2n}{m}\right)} - 1$$

$$= 2 \times 3 - 1 = 5,$$

当且仅当 $\frac{9}{1 + \frac{2n}{m}} = 1 + \frac{2n}{m}$, 即 $\frac{n}{m} = 1$ 时等号成立,

$\therefore$ 当 $\frac{n}{m} = 1$ 时, $\frac{9m}{m+2n} + \frac{2n}{m}$ 取得最小值 5,

综上所述, 当 $\frac{n}{m} = 1$ 时, $\frac{9m}{m+2n} + \frac{2n}{m}$ 取得最小值 5.

9 若对满足条件 $x + y + 8 = xy$ 的正实数 x, y 都有 $(x+y)^2 - a(x+y) + 1 \geq 0$ 恒成立, 则实数 a 的取值范围为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

答案 $\left(-\infty, \frac{65}{8}\right]$

解析 设 $x + y = t$,

$$\text{则 } t + 8 = xy \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = \frac{t^2}{4},$$

$$\therefore t^2 - 4t - 32 \geq 0,$$

$$\therefore t \geq 8 \text{ 或 } t \leq -4 \text{ (舍)},$$

$$\text{不等式化为: } t^2 - at + 1 \geq 0 (t \geq 8) \Leftrightarrow a \leq t + \frac{1}{t} \Leftrightarrow a \leq \frac{65}{8},$$

$$\therefore a \in \left(-\infty, \frac{65}{8}\right].$$

10 若对任意正实数 x , 不等式 $\frac{1}{x^2+1} \leq \frac{a}{x}$ 恒成立, 则实数 a 的最小值为 ().

A. 1

B. $\sqrt{2}$

C. $\frac{1}{2}$

D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

答案 C

解析 因为 $\frac{1}{x^2+1} \leq \frac{a}{x}$, 即 $a \geq \frac{x}{x^2+1}$,

$$\text{而 } \frac{x}{x^2+1} = \frac{1}{x + \frac{1}{x}} \leq \frac{1}{2} \text{ (当且仅当 } x = 1 \text{ 时取等号)},$$

$$\text{所以 } a \geq \frac{1}{2},$$

答案: C.

11 已知关于 x 的不等式 $2x + \frac{2}{x-a} \geq 7$ 在 $x \in (a, +\infty)$ 上恒成立, 则实数 a 的最小值为 _____.

答案 $\frac{3}{2}$

解析 方法一: $\because x > a, \therefore x - a > 0$,

$$\therefore 2x + \frac{2}{x-a} = 2(x-a) + \frac{2}{x-a} + 2a$$

$$\geq 2\sqrt{2(x-a) \cdot \frac{2}{x-a}} + 2a = 2a + 4,$$

$$\text{即 } 2a + 4 \geq 7, \text{ 所以 } a \geq \frac{3}{2}, \text{ 即 } a \text{ 的最小值为 } \frac{3}{2},$$

当且仅当 $x = a + 1$ 时取等号.

方法二：由 $2x + \frac{2}{x-a} \geq 7$ ，得 $x + \frac{1}{x-a} \geq \frac{7}{2}$ ，
 即 $x - 1 + \frac{1}{x-a} \geq \frac{7}{2} - a$ ，其中 $x \in (a, +\infty)$ ，
 因为 $x - 1 + \frac{1}{x-a} \geq 2$ ，所以 $\frac{7}{2} - a \leq 2$ ，
 解得 $a \geq \frac{3}{2}$ ，即 a 的最小值为 $\frac{3}{2}$ 。

12 若 $x + \frac{3}{x} + 3y + \frac{4}{y} = 12$ ，($x > 0, y > 0$)，则 $x + \frac{4}{y}$ 的最小值为 _____。

答案 3

解析 $x + \frac{3}{x} + 3y + \frac{4}{y} = 12$ ($x > 0, y > 0$)，
 $\Rightarrow \left(x + \frac{4}{y}\right) + \left(3y + \frac{3}{x}\right) = 12$ ，
 令 $a = x + \frac{4}{y}$ ， $b = y + \frac{1}{x}$ ，则： $a + 3b = 12$ ，
 $\therefore ab = \left(x + \frac{4}{y}\right) \left(y + \frac{1}{x}\right) = xy + 4 + 1 + \frac{4}{xy} \geq 5 + 4 = 9$ ，
 (当且仅当 $xy = \frac{4}{xy}$ ，即 $xy = 2$ 时取=)，
 又 $3b = 12 - a$ ，
 $\therefore ab \geq 9 \Leftrightarrow 3ab \geq 27$ ，
 $\Leftrightarrow a(12 - a) \geq 27$ ，
 $\Leftrightarrow a^2 - 12a + 27 \leq 0$ ，
 $\Leftrightarrow (a - 3)(a - 9) \leq 0$ ，
 $\Leftrightarrow 3 \leq a \leq 9$ ，
 $\therefore a$ 的最小值为 3，即 $x + \frac{4}{y}$ 的最小值为 3。

13 若 $a, b, c > 0$ 且 $(a+c)(a+b) = 4 - 2\sqrt{3}$ ，则 $2a + b + c$ 的最小值为 ()。

A. $\sqrt{3} - 1$

B. $\sqrt{3} + 1$

C. $2\sqrt{3} + 2$

D. $2\sqrt{3} - 2$

答案 D

解析 $\because a, b, c > 0$ 且 $(a+b)(a+c) = 4 - 2\sqrt{3}$ ，

则 $2a + b + c = (a + b) + (a + c) \geq 2\sqrt{(a + b)(a + c)} = 2\sqrt{4 - 2\sqrt{3}} = 2(\sqrt{3} - 1)$, 当且仅当 $a + b = a + c = \sqrt{3} - 1$ 时取等号 .

故选 : D .

14 若实数 a, b 满足 $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} = \sqrt{ab}$, 则 ab 的最小值为 ()

A. $\sqrt{2}$

B. 2

C. $2\sqrt{2}$

D. 4

答案 C

解析 因为 $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} = \sqrt{ab}$, 所以 $a > 0, b > 0$,

$$\text{由 } \sqrt{ab} = \frac{1}{a} + \frac{2}{b} \geq 2\sqrt{\frac{1}{a} \times \frac{2}{b}} = 2\sqrt{\frac{2}{ab}} ,$$

所以 $ab \geq 2\sqrt{2}$ (当且仅当 $b = 2a$ 时取等号) ,

所以 ab 的最小值为 $2\sqrt{2}$.

故选 C .

15 已知实数 x, y 满足 $x^2 + y^2 = 3, |x| \neq |y|$, 则 $\frac{1}{(2x + y)^2} + \frac{4}{(x - 2y)^2}$ 的最小值为 _____ .

答案 $\frac{3}{5}$

解析 $\because$ 实数 x, y 满足 $x^2 + y^2 = 3, |x| \neq |y|$, $\therefore \frac{(2x + y)^2 + (x - 2y)^2}{15} = 1$,

$$\text{则 } \frac{1}{(2x + y)^2} + \frac{4}{(x - 2y)^2} = \frac{(2x + y)^2 + (x - 2y)^2}{15} \times \left[\frac{1}{(2x + y)^2} + \frac{4}{(x - 2y)^2} \right]$$

$$= \frac{1}{15} \left[5 + \frac{(x - 2y)^2}{(2x + y)^2} + \frac{4(2x + y)^2}{(x - 2y)^2} \right] \geq \frac{1}{15} \times (5 + 2\sqrt{4}) = \frac{3}{5} ,$$

当且仅当 $|x - 2y| = 2|2x + y|, x^2 + y^2 = 3, |x| \neq |y|$, 时取等号 .

$$\text{即 } \begin{cases} x = 0 \\ y = \pm\sqrt{3} \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x = -\frac{4\sqrt{3}}{5} \\ y = \frac{3\sqrt{3}}{5} \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x = \frac{4\sqrt{3}}{5} \\ y = \frac{3\sqrt{3}}{5} \end{cases} .$$

故答案为 : $\frac{3}{5}$.

16 已知 a, b 均为正数 , 且 $a + b = 1, c > 1$, 则 $\left(\frac{a^2 + 1}{2ab} - 1 \right) \cdot c + \frac{\sqrt{2}}{c - 1}$ 的最小值为 _____ .

答案 $3\sqrt{2}$

解析 因为 $a + b = 1$,

$$\text{所以 } \frac{a^2 + 1}{2ab} - 1 = \frac{a^2 + (a + b)^2}{2ab} - 1 = \frac{a}{b} + \frac{b}{2a} \geq 2\sqrt{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{2a}} = \sqrt{2},$$

当且仅当 $\frac{a}{b} = \frac{b}{2a}$ 即 $a = \sqrt{2} - 1$ 、 $b = 2 - \sqrt{2}$ 时取等号,

$$\text{所以 } \left(\frac{a^2 + 1}{2ab} - 1 \right) \cdot c + \frac{\sqrt{2}}{c-1} \geq \sqrt{2}c + \frac{\sqrt{2}}{c-1} = \sqrt{2} \left(c - 1 + \frac{1}{c-1} + 1 \right) \geq 3\sqrt{2},$$

当且仅当 $c = 2$ 时取等号,

故答案为: $3\sqrt{2}$.

17 若 $a > 0$, $b > 0$, 且 $2a + b = 1$, 且 $2\sqrt{ab} - 4a^2 - b^2$ 的最大值是 _____.

答案 $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$

解析 $\because 2a + b = 1, a > 0, b > 0,$

$$\therefore \sqrt{\frac{4a^2 + b^2}{2}} \geq \frac{2a + b}{2} \geq \sqrt{2ab}, \text{ 可得 } \sqrt{2ab} \leq \frac{1}{2}, 4a^2 + b^2 \geq \frac{1}{2},$$

$$\therefore S = 2\sqrt{ab} - (4a^2 + b^2) \leq \frac{\sqrt{2}-1}{2}, \text{ 当且仅当 } b = 2a = \frac{1}{2} \text{ 时取等号.}$$

$$\therefore S \text{ 的最大值为 } \frac{\sqrt{2}-1}{2},$$

$$\text{故答案为: } \frac{\sqrt{2}-1}{2}.$$

18 已知正实数 a, b 满足 $4a^2 - 2ab + b^2 = 1$, 则 $\frac{ab}{2a + b + 1}$ 的最大值为 _____.

答案 $\frac{1}{6}$

解析 $\because 4a^2 - 2ab + b^2 = 1,$

$$\therefore (2a + b)^2 = 1 + 6ab,$$

$$\therefore ab = \frac{(2a + b)^2 - 1}{6},$$

$$\therefore (2a + b)^2 = 1 + 6ab \leq 1 + 3 \left(\frac{2a + b}{2} \right)^2,$$

$$\text{解得 } 2a + b \leq 2,$$

当且仅当 $a = \frac{1}{2}$, $b = 1$ 时取等号,

$$\text{则 } \frac{ab}{2a+b+1} = \frac{(2a+b)^2 - 1}{6(2a+b) + 6}$$

$$= \frac{2a+b-1}{6}$$

$$\leq \frac{2-1}{6}$$

$$= \frac{1}{6}.$$

故最大值为 $\frac{1}{6}$.

故答案为: $\frac{1}{6}$.

- 19 对于 $c > 0$, 当非零实数 a, b 满足 $4a^2 - 2ab + b^2 - c = 0$, 且使 $|2a+b|$ 最大时, $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{4}{c}$ 的最小值为 _____.

答案 -1

解析 设 $2a+b=t$, 则 $2a=t-b$, 因为 $4a^2 - 2ab + b^2 - c = 0$ 可变形为 $(2a)^2 - 2a \cdot b + b^2 - c = 0$, 将 $2a=t-b$ 代入上式并整理得: $3b^2 - 3tb + t^2 - c = 0$, 由判别式 $\Delta \geq 0$ 得: $-2\sqrt{c} \leq t \leq 2\sqrt{c}$,
因为 $|t|$ 取最大值时 $t = 2\sqrt{c}$, 代入 $3b^2 - 3tb + t^2 - c = 0$ 得: $b = -\sqrt{c}$, 再由 $2a = t - b$ 求得:
 $a = -\frac{\sqrt{c}}{2}$ (因为要求最小值, 所以 a, b 为负值时最小),
所以 $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{4}{c} = \frac{2}{-\sqrt{c}} + \frac{2}{-\sqrt{c}} + \frac{4}{c} = \frac{4}{c} - \frac{4}{\sqrt{c}} = \left(\frac{2}{\sqrt{c}} - 1\right)^2 - 1 \geq -1$, 当 $c = 4$ 时等号成立. 故答案为 -1.

- 20 已知 x, y 均为正实数, 且 $x+y=16$, 则 $\frac{xy}{9x+y}$ 的最大值为 _____.

答案 1

解析 $\frac{xy}{9x+y} = \frac{1}{\frac{9}{y} + \frac{1}{x}}$,

由 $x+y=16$,

$$\text{可得 } \frac{1}{x} + \frac{9}{y} = \frac{1}{16}(x+y) \left(\frac{1}{x} + \frac{9}{y} \right),$$

$$= \frac{1}{16} \left(1 + 9 + \frac{y}{x} + \frac{9x}{y} \right) \geq \frac{1}{16} \left(10 + 2\sqrt{\frac{y}{x} \cdot \frac{9x}{y}} = 1 \right),$$

当且仅当 $y = 3x = 12$ ，等号成立，

则 $\frac{xy}{9x+y}$ 的最大值为 1.

故答案为：1.

21 若第一象限内的点 (a, b) 在直线 $x + 4y - 2 = 0$ 上运动，则 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ 的最小值为 _____.

答案 $\frac{9}{2}$

解析 $x + 4y - 2 = 0$ ，即 $x + 4y = 2$.

$$\because a > 0, b > 0,$$

$$\therefore a + 4b = 2.$$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) (a + 4b)$$

$$= \frac{1}{2} \left(5 + \frac{4b}{a} + \frac{a}{b} \right)$$

$$\geq \frac{1}{2} \left(5 + 2\sqrt{\frac{4b}{a} \times \frac{a}{b}} \right)$$

$$= \frac{9}{2}.$$

$$\text{当且仅当} \begin{cases} \frac{4b}{a} = \frac{a}{b} \\ a + 4b = 2 \end{cases}, \text{即} \begin{cases} a = \frac{2}{3} \\ b = \frac{1}{3} \end{cases} \text{时取等号.}$$

22 若 a, b 满足 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$ ， $\frac{1}{a-1} + \frac{9}{b-1}$ 的最小值 ().

A. 1

B. 6

C. 9

D. 16

答案 B

解析 $\because \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1,$

$$\therefore b = \frac{a}{a-1},$$

$$\therefore \frac{1}{a-1} + \frac{9}{b-1} = \frac{1}{a-1} + \frac{9}{\frac{a}{a-1} - 1}$$

$$= \frac{1}{a-1} + 9(a-1) \geq 6.$$

故选 B.

- 23 若实数 x, y 满足 $x > y > 0$, 且 $\log_2 x + \log_2 y = 1$, 则 $\frac{2}{x} + \frac{1}{y}$ 的最小值是 _____, $\frac{x-y}{x^2+y^2}$ 的最大值为 _____.

答案 1:2

2: $\frac{1}{4}$

解析 由题设可知:

由 $x > y > 0$, 且 $\log_2 x + \log_2 y = \log_2(xy) = 1$,

即 $xy = 2$,

$$\text{则 } \frac{2}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2y+x}{xy} \geq \frac{2\sqrt{2xy}}{xy} = 2,$$

当仅当 $2y = x$ 时, 即 $y = 1, x = 2$ 时, 等号成立,

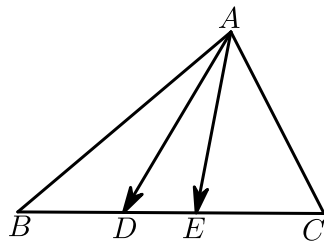
故 $\frac{2}{x} + \frac{1}{y}$ 的最小值为 2,

$$\text{又 } x - y > 0, \text{ 则 } \frac{x-y}{x^2+y^2} = \frac{x-y}{(x-y)^2 + 2xy} = \frac{1}{(x-y) + \frac{4}{x-y}} \leq \frac{1}{2\sqrt{(x-y) \cdot \frac{4}{x-y}}} = \frac{1}{4},$$

当仅当 $x - y = \frac{4}{x-y}$, 即 $(x-y)^2 = 4$ 时等号成立 ($x = \sqrt{3} + 1, y = \sqrt{3} - 1$),

故 $\frac{x-y}{x^2+y^2}$ 的最大值为 $\frac{1}{4}$.

- 24 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 点 D, E 是线段 BC 上两个动点, 且 $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$, 则 $\frac{1}{x} + \frac{4}{y}$ 的最小值为 ().



A. $\frac{3}{2}$

B. 2

C. $\frac{5}{2}$

D. $\frac{9}{2}$

答案 D

解析 设 $\overrightarrow{AD} = m\overrightarrow{AB} + n\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AE} = \lambda\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{AC}$,

$\because B, D, E, C$ 共线,

$$\therefore m+n=1, \lambda+\mu=1,$$

$$\therefore \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}, \text{ 则 } x+y=2,$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{1}{x} + \frac{4}{y} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} + \frac{4}{y} \right) (x+y) \\ &= \frac{1}{2} \left(5 + \frac{y}{x} + \frac{4x}{y} \right) \geq \frac{1}{2} \left(5 + 2\sqrt{\frac{y}{x} \cdot \frac{4x}{y}} \right) = \frac{9}{2}, \end{aligned}$$

则 $\frac{1}{x} + \frac{4}{y}$ 的最小值为 $\frac{9}{2}$.

故选D.

25 设 x, y, z 为正实数, 满足 $x - 2y + 3z = 0$, 则 $\frac{y^2}{xz}$ 的最小值是 _____.

答案 3

解析 方法一: 由 $x - 2y + 3z = 0$ 得 $y = \frac{x+3z}{2}$, 代入 $\frac{y^2}{xz}$ 得 $\frac{x^2 + 9z^2 + 6xz}{4xz} \geq \frac{6xz + 6xz}{4xz} = 3$, 当且仅当 $x = 3z$ 时取等号.

方法二: 由 $x - 2y + 3z = 0$ 得 $\frac{x}{y} + \frac{3z}{y} = 2 \geq 2\sqrt{3\frac{xz}{y^2}}$, 即 $\frac{xz}{y^2} \leq \frac{1}{3}$, 故 $\frac{y^2}{xz} \geq 3$, 所以 $\frac{y^2}{xz}$ 的最小值为 3. 当且仅当 $\frac{x}{y} = \frac{3z}{y}$, 即当 $x = 3z$ 时取等号.

26 已知 $ab > 0$, $a + b = 3$, 则 $\frac{b^2}{a+2} + \frac{a^2}{b+1}$ 的最小值为 _____.

答案 $\frac{3}{2}$

备选答案: 1.5

解析 原式 $= \left(\frac{b^2}{a+2} + \frac{a^2}{b+1} \right) [(a+2) + (b+1)] \times \frac{1}{6}$
 $= \frac{1}{6} \left[b^2 + a^2 + \frac{a^2(a+2)}{b+1} + \frac{b^2(b+1)}{a+2} \right]$
 $\geq \frac{1}{6} [a^2 + b^2 + 2\sqrt{a^2b^2}]$
 $= \frac{1}{6} (a+b)^2$
 $= \frac{3}{2}.$

故答案为: $\frac{3}{2}$.

27 已知 x, y, z 为正实数, 则 $\frac{xy+yz}{x^2+y^2+z^2}$ 的最大值为 ().

- A. $\frac{2\sqrt{3}}{5}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$
C. $\frac{4}{5}$ D. $\frac{2}{3}$

答案 B

解析 $x^2 + \frac{1}{2}y^2 \geq \sqrt{2}xy, z^2 + \frac{1}{2}y^2 \geq \sqrt{2}yz,$
 $\therefore x^2 + y^2 + z^2 \geq \sqrt{2}xy + \sqrt{2}yz = \sqrt{2}(xy + yz),$
 $\therefore \frac{xy + yz}{x^2 + y^2 + z^2} \leq \frac{\sqrt{2}}{2},$ 当且仅当 $x = z = \frac{\sqrt{2}}{2}y$ 时取等号,
 故 $\frac{xy + yz}{x^2 + y^2 + z^2}$ 的最大值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}.$
 故选 B.

28 若 x, y, z 为正实数, 则 $\frac{2xy+3yz}{x^2+y^2+z^2}$ 的最大值为 ____.

答案 $\frac{\sqrt{13}}{2}$

解析 $\because x, y, z$ 为正实数,
 $\therefore x^2 + y^2 + z^2 = x^2 + \frac{4}{13}y^2 + \frac{9}{13}y^2 + z^2$
 $\geq 2 \cdot \frac{2}{\sqrt{13}}xy + 2 \cdot \frac{3}{\sqrt{13}}yz,$
 当且仅当 $x = \frac{2}{\sqrt{13}}y, z = \frac{3}{\sqrt{13}}y$, 等号成立,
 $\therefore \frac{2xy+3yz}{x^2+y^2+z^2} \leq \frac{2xy+3yz}{\left(x^2 + \frac{4}{13}y^2\right) + \left(\frac{9}{13}y^2 + z^2\right)} \leq \frac{2xy+3yz}{\frac{4xy}{\sqrt{13}} + \frac{6yz}{\sqrt{13}}} = \frac{\sqrt{13}}{2},$
 当且仅当 $x = \frac{2}{\sqrt{13}}y, z = \frac{3}{\sqrt{13}}y$ 时,
 则 $\frac{2xy+3yz}{x^2+y^2+z^2}$ 的最大值为 $\frac{\sqrt{13}}{2},$
 故答案为: $\frac{\sqrt{13}}{2}.$

29 $a, b, c \in \mathbb{R}_+,$ 求证: $\frac{a}{b+2c} + \frac{b}{c+2a} + \frac{c}{a+2b} \geq 1.$

答案

证明见解析.

解析

$$\begin{aligned} \frac{a}{b+2c} + \frac{b}{c+2a} + \frac{c}{a+2b} &= \frac{a^2}{a(b+2c)} + \frac{b^2}{b(c+2a)} + \frac{c^2}{c(a+2b)} \geq \frac{(a+b+c)^2}{3(ab+ac+bc)} \\ &= \frac{1}{3} \frac{a^2+b^2+c^2}{ab+ac+bc} + \frac{2}{3} \end{aligned}$$

由基本不等式得 $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc$, 所以命题得证.

30 证明.

(1) 已知 $a, b, c \in \mathbf{R}^+$, 且 $a+b+c=1$, 证明: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 9$.

(2) 已知 $a, b, c \in \mathbf{R}^+$, 且 $abc=1$, 证明: $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$.

答案

(1) 证明见解析.

(2) 证明见解析.

解析

$$\begin{aligned} (1) \text{ 因为 } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} &= \frac{a+b+c}{a} + \frac{a+b+c}{b} + \frac{a+b+c}{c} \\ &= \frac{b}{a} + \frac{c}{a} + 1 + \frac{a}{b} + \frac{c}{b} + 1 + \frac{a}{c} + \frac{b}{c} + 1 \\ &= \frac{b}{a} + \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} + \frac{c}{a} + 3 \geq 9, \text{ 当 } a=b=c \text{ 时等式成立.} \end{aligned}$$

$$(2) \text{ 因为 } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{a} + \frac{1}{c} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq \frac{1}{2} \left(2\sqrt{\frac{1}{ab}} + 2\sqrt{\frac{1}{ac}} + 2\sqrt{\frac{1}{bc}} \right)$$

又因为 $abc=1$, 所以 $\frac{1}{ab}=c, \frac{1}{ac}=b, \frac{1}{bc}=a$.

$$\therefore \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq (\sqrt{c} + \sqrt{b} + \sqrt{a}).$$

当 $a=b=c$ 时等号成立, 即原不等式成立.

二、限时训练

本部分共3个解答题, 限时40分钟.

31 已知 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 且

$$\frac{3 \sin^2 B + 3 \sin^2 C}{\sin A} = 3 \sin A + 2\sqrt{3} \sin B \sin C.$$

(1) 求 A 的大小.

(2) 若 $a=2\sqrt{3}$, 求 $\triangle ABC$ 面积的最大值以及周长的最大值.

答案

(1) 故 $A = \frac{\pi}{3}$.

(2) 面积的最大值为 $3\sqrt{3}$, 周长的最大值为 $6\sqrt{3}$.

解析

(1) 依题意, $3\sin^2 B + 3\sin^2 C = 3\sin^2 A + 2\sqrt{3}\sin A \sin B \sin C$, 故

$$3b^2 + 3c^2 = 3a^2 + \sqrt{3}\sin A \cdot 2bc,$$

$$\text{即 } \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{\sqrt{3}}{3}\sin A,$$

$$\text{由余弦定理得, } \cos A = \frac{\sqrt{3}}{3}\sin A,$$

$$\text{因为 } A \in (0, \pi), \text{ 故 } A = \frac{\pi}{3}.$$

(2) 由余弦定理, $a^2 = c^2 + b^2 - 2bc \cos A$, 即 $12 = c^2 + b^2 - bc \geq bc$,

当且仅当 $c = b = 2\sqrt{3}$ 时等号成立;

$$\text{故 } \triangle ABC \text{ 的面积 } S = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{\sqrt{3}}{4}bc \leq 3\sqrt{3}$$

故 $\triangle ABC$ 面积的最大值为 $3\sqrt{3}$,

$$\text{而 } 12 = c^2 + b^2 - bc = (c+b)^2 - 3bc \geq (b+c)^2 - \frac{3(b+c)^2}{4} \text{ 故 } b+c \leq 4\sqrt{3},$$

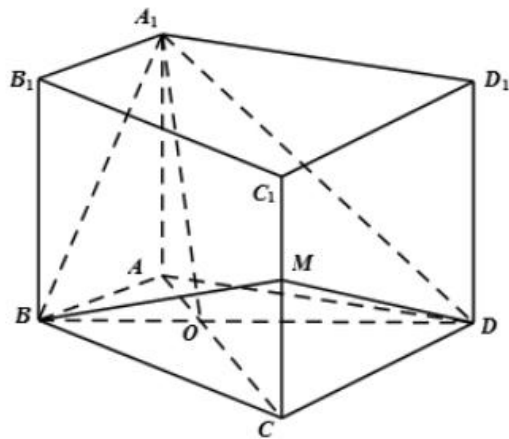
当且仅当 $c = b = 2\sqrt{3}$ 时等号成立;

故 $\triangle ABC$ 的周长 $l = a + b + c \leq 6\sqrt{3}$, 故 $\triangle ABC$ 周长的最大值为 $6\sqrt{3}$.

32

如图所示, 在四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, $AA_1 \perp$ 底面 $ABCD$, $BD \perp AC$ 于 O , 且

$AA_1 = OC = 2OA = 4$, 点 M 是棱 CC_1 上一点.



(1) 如果过 A_1, B_1, O 的平面与底面 $ABCD$ 交于直线 l , 求证: $l \parallel AB$;

(2) 当 M 是棱 CC_1 中点时, 求证: $A_1O \perp DM$;

(3) 设二面角 $A_1 - BD - M$ 的平面角为 θ , 当 $|\cos \theta| = \frac{2\sqrt{5}}{25}$ 时, 求 CM 的长.

答案

(1) 证明过程见解析

(2) 证明过程见解析

(3) $CM = 3$ 或 $CM = \frac{7}{6}$.

解析

(1) 因为 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 是棱柱, 所以 A_1B_1BA 是平行四边形. 所以 $A_1B_1 // AB$. 因为 $A_1B_1 \not\subset$ 平面 $ABCD$, $AB \subset$ 平面 $ABCD$, 所以 $A_1B_1 //$ 平面 $ABCD$. 因为平面 $A_1B_1O \cap$ 平面 $ABCD = l$, 所以 $l // A_1B_1$. 所以 $l // AB$.

(2) 因为 $DE \perp AC$ 于 O , 如图建立空间直角坐标系.

因为 $AA_1 = 4$, 且

$OC = 2AO = 4$, 所以

$O(0, 0, 0)$, $C(4, 0, 0)$,

$A(-2, 0, 0)$, $A_1(-2, 0, 4)$.

因为 M 是棱 CC_1 中点, 所以

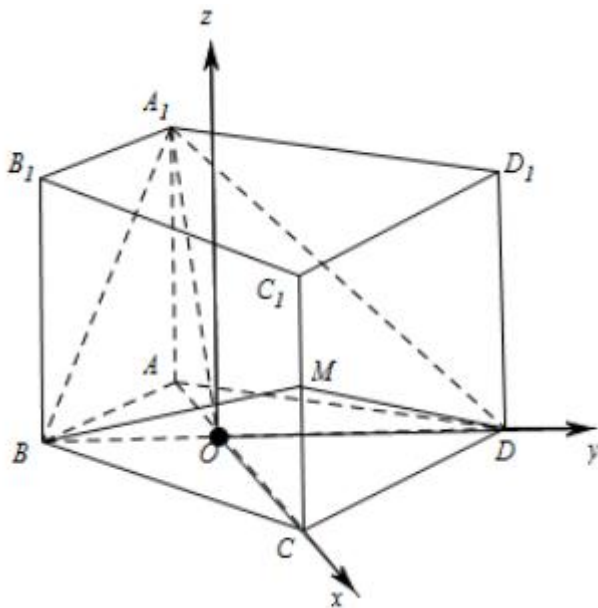
$M(4, 0, 2)$. 设 $D(0, b, 0)$, 所

以 $\overrightarrow{DM} = (4, -b, 2)$,

$\overrightarrow{OA_1} = (-2, 0, 4)$. 所以

$\overrightarrow{DM} \cdot \overrightarrow{OA_1} = -8 + 0 + 8 = 0$

. 所以 $A_1O \perp DM$.



(3) 设 $D(0, b, 0)$, $B(0, c, 0)$, 平面的法向量为 $\vec{m} = (x, y, z)$, 又因为 $\overrightarrow{A_1D} = (2, b, -4)$,

$\overrightarrow{A_1B} = (2, c, -4)$, 所以 $\begin{cases} \vec{m} \cdot \overrightarrow{A_1D} = 0 \\ \vec{m} \cdot \overrightarrow{A_1B} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + by - 4z = 0 \\ 2x + cy - 4z = 0 \end{cases}$. 因为 $b \neq c$, 所以 $y = 0$

, 令 $z = 1$, 则 $x = 2$, 所以 $\vec{m} = (2, 0, 1)$. 设 $M(4, 0, h)$, 所以 $\overrightarrow{MD} = (-4, b, -h)$,

$\overrightarrow{MB} = (-4, c, -h)$. 设平面 MBD 的法向量为 $\vec{n} = (x_1, y_1, z_1)$, 所以

$\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{MD} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{MB} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4x_1 + by_1 - hz_1 = 0 \\ -4x_1 + cy_1 - hz_1 = 0 \end{cases}$. 因为 $b \neq c$, 所以 $y_1 = 0$, 令 $z_1 = 1$, 则

$x_1 = -\frac{h}{4}$, 所以 $\vec{n} = (-\frac{h}{4}, 0, 1)$. 又因为 $|\cos \theta| = \frac{2\sqrt{5}}{25}$, 所以 $|\cos \langle \vec{m}, \vec{n} \rangle| = \frac{2\sqrt{5}}{25}$

, 即 $\frac{2\sqrt{5}}{25} = \frac{|\vec{m} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}| |\vec{m}|} = \frac{|1 - \frac{h}{2}|}{\sqrt{5} \times \sqrt{\frac{h^2}{16} + 1}}$. 解得 $h = 3$ 或 $h = \frac{7}{6}$. 所以点 $M(4, 0, 3)$ 或

$M(4, 0, \frac{7}{6})$. 所以 $CM = 3$ 或 $CM = \frac{7}{6}$.

33 已知等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_2 = 2a_1$, $a_4 + a_5 = 9$, S_n 为等比数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和, $2S_{n+1} = S_n + 2$.

(1) 求 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 的通项公式.

$$(2) \text{ 设 } c_n = \begin{cases} \frac{3}{4}a_nb_n, n \text{ 为奇数} \\ \frac{1}{a_n^2}, n \text{ 为偶数} \end{cases}, \text{ 证明: } c_1 + c_2 + c_3 + \cdots + c_n < \frac{13}{6}.$$

答案

$$(1) a_n = n, b_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

(2) 证明见解析.

解析

(1) 由 $a_2 = 2a_1$, $a_4 + a_5 = 9$, 知 $a_1 + d = 2a_1$, $a_1 + 3d + a_1 + 4d = 9$,

解得 $a_1 = d = 1$, 则 $a_n = n$,

由 $2S_{n+1} = S_n + 2$ 知 $2(b_1 + b_2) = b_1 + 2$, $2b_{n+1} = b_n (n \geq 2)$,

又 $\{b_n\}$ 是等比数列, 有 $q = \frac{1}{2}$, $b_1 = 1$, 有 $b_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$,

经检验, 此时符合条件.

另解: 当 $q = 1$ 时, 显然不成立;

当 $q \neq 1$ 时, 有 $\frac{2b_1(1-q^{n+1})}{1-q} = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q} + 2$,

即 $q^n(2b_1q - b_1) + 2 - 2q - b_1 = 0$ 对任意 $n \in \mathbf{N}^*$ 成立,

所以 $2b_1q - b_1 = 0$ 且 $2 - 2q - b_1 = 0$,

从而 $q = \frac{1}{2}$, $b_1 = 1$.

(2) 当 $n = 2k$ 时, $c_1 + c_2 + c_3 + \cdots + c_n$

$$= \frac{3}{4} \left[1 \times 1 + 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 5 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \cdots + (2k-1) \left(\frac{1}{2}\right)^{2k-2} \right]$$

$$+ \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \cdots + \frac{1}{(2k)^2} \right),$$

$$\text{记 } T_n = 1 \times 1 + 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 5 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \cdots$$

$$+ (2k-1) \left(\frac{1}{2}\right)^{2k-2},$$

$$\text{有 } \frac{1}{4}T_n = 1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \cdots$$

$$+ (2k-3) \left(\frac{1}{2}\right)^{2k-2} + (2k-1) \left(\frac{1}{2}\right)^{2k},$$

$$\text{有 } \frac{3}{4}T_n = 1 + 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 + 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^6 + \cdots$$

$$+ 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{2k-2} - (2k-1) \left(\frac{1}{2}\right)^{2k}$$

$$= 1 + \frac{2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \left[1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{k-1} \right]}{1 - \frac{1}{4}} - (2k-1) \left(\frac{1}{2}\right)^{2k}$$

$$= \frac{5}{3} - \frac{2}{3} \left(\frac{1}{4} \right)^{k-1} - (2k-1) \left(\frac{1}{2} \right)^{2k} < \frac{5}{3},$$

$$\text{又 } \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \cdots + \frac{1}{(2k)^2} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{k^2} \right)$$

$$< \frac{1}{4} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \cdots + \frac{1}{k(k-1)} \right)$$

$$= \frac{1}{4} \left(1 + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) < \frac{1}{2},$$

$$\text{则当 } n = 2k (k \in \mathbf{N}^*) \text{ 时, } c_1 + c_2 + c_3 + \cdots + c_n < \frac{5}{3} + \frac{1}{2} = \frac{13}{6},$$

$$\text{当 } n = 2k - 1 (k \in \mathbf{N}^*) \text{ 时, } c_1 + c_2 + c_3 + \cdots + c_n < c_1 + c_2 + c_3 + \cdots + c_{n+1} < \frac{13}{6},$$

$$\text{则有 } c_1 + c_2 + c_3 + \cdots + c_n < \frac{13}{6}.$$