

基本不等式 (小题)

一、基本不等式

1 已知 $a, b \in \mathbf{R}_+$, 已知 $\frac{1}{a} + \frac{9}{b} = 2$, 则 $a + b$ 的最小值为 _____ .

2 已知正数 x, y 满足 $\frac{1}{x} + \frac{3}{y+2} = 1$, 则 $x + y$ 的最小值为 _____ .

3 若 $a > 0, b > 0$, 且 $a + b = 4$, 则下列不等式恒成立的是 () .

A. $\frac{1}{ab} > \frac{1}{2}$

B. $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \leq 1$

C. $\sqrt{ab} \geq 2$

D. $a^2 + b^2 \geq 8$

4 已知 $\log_2(a-2) + \log_2(b-1) \geq 1$, 则 $2a + b$ 取到最小值时, $ab =$ () .

A. 3

B. 4

C. 6

D. 9

5 设正数 x, y 满足 $x + y = 1$, 若不等式 $\frac{1}{x} + \frac{a}{y} \geq 4$ 对任意 x, y 成立, 则正实数 a 的取值范围 () .

A. $a \geq 4$

B. $a > 1$

C. $a \geq 1$

D. $a > 4$

6 若 $a, b, c \in \mathbf{R}^+$, 则 $\frac{(a^2 + b^2 + c^2)^2 + 5}{bc + 2ac}$ 的最小值为 () .

A. $\frac{14}{3}$

B. $2\sqrt{5}$

C. 4

D. 5

7 解答下列各题:

(1) 已知 $a, b, c \in \mathbf{R}_+$, $a > b$, 则 $2a^2 + \frac{1}{ab} + \frac{1}{a(a-b)} - 10ac + 25c^2$ 的最小值为 () .

A. 2

B. 4

C. $2\sqrt{5}$

D. 5

(2) 已知 $a, b \in \mathbf{R}_+$, $a > b$, 那么 $a^2 + \frac{1}{b(a-b)}$ 的最小值为 () .

A. 2

B. 3

C. 4

D. 5

- 8 已知 m, n 为正实数, 则当 $\frac{n}{m} = \underline{\hspace{2cm}}$ 时, $\frac{9m}{m+2n} + \frac{2n}{m}$ 取得最小值.
- 9 若对满足条件 $x + y + 8 = xy$ 的正实数 x, y 都有 $(x+y)^2 - a(x+y) + 1 \geq 0$ 恒成立, 则实数 a 的取值范围为 $\underline{\hspace{2cm}}$.
- 10 若对任意正实数 x , 不等式 $\frac{1}{x^2+1} \leq \frac{a}{x}$ 恒成立, 则实数 a 的最小值为 ().
 A. 1 B. $\sqrt{2}$
 C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$
- 11 已知关于 x 的不等式 $2x + \frac{2}{x-a} \geq 7$ 在 $x \in (a, +\infty)$ 上恒成立, 则实数 a 的最小值为 $\underline{\hspace{2cm}}$.
- 12 若 $x + \frac{3}{x} + 3y + \frac{4}{y} = 12$, ($x > 0, y > 0$), 则 $x + \frac{4}{y}$ 的最小值为 $\underline{\hspace{2cm}}$.
- 13 若 $a, b, c > 0$ 且 $(a+c)(a+b) = 4 - 2\sqrt{3}$, 则 $2a + b + c$ 的最小值为 ().
 A. $\sqrt{3} - 1$ B. $\sqrt{3} + 1$ C. $2\sqrt{3} + 2$ D. $2\sqrt{3} - 2$
- 14 若实数 a, b 满足 $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} = \sqrt{ab}$, 则 ab 的最小值为 ().
 A. $\sqrt{2}$ B. 2 C. $2\sqrt{2}$ D. 4
- 15 已知实数 x, y 满足 $x^2 + y^2 = 3$, $|x| \neq |y|$, 则 $\frac{1}{(2x+y)^2} + \frac{4}{(x-2y)^2}$ 的最小值为 $\underline{\hspace{2cm}}$.
- 16 已知 a, b 均为正数, 且 $a + b = 1$, $c > 1$, 则 $\left(\frac{a^2+1}{2ab} - 1\right) \cdot c + \frac{\sqrt{2}}{c-1}$ 的最小值为 $\underline{\hspace{2cm}}$.
- 17 若 $a > 0, b > 0$, 且 $2a + b = 1$, 且 $2\sqrt{ab} - 4a^2 - b^2$ 的最大值是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

18 已知正实数 a, b 满足 $4a^2 - 2ab + b^2 = 1$, 则 $\frac{ab}{2a+b+1}$ 的最大值为 _____ .

19 对于 $c > 0$, 当非零实数 a, b 满足 $4a^2 - 2ab + b^2 - c = 0$, 且使 $|2a+b|$ 最大时, $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{4}{c}$ 的最小值为 _____ .

20 已知 x, y 均为正实数, 且 $x+y=16$, 则 $\frac{xy}{9x+y}$ 的最大值为 _____ .

21 若第一象限内的点 (a, b) 在直线 $x+4y-2=0$ 上运动, 则 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ 的最小值为 _____ .

22 若 a, b 满足 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$, $\frac{1}{a-1} + \frac{9}{b-1}$ 的最小值 () .

A. 1

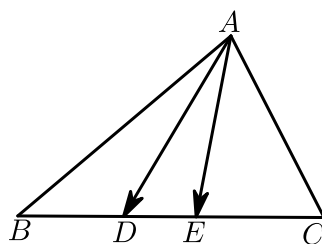
B. 6

C. 9

D. 16

23 若实数 x, y 满足 $x > y > 0$, 且 $\log_2 x + \log_2 y = 1$, 则 $\frac{2}{x} + \frac{1}{y}$ 的最小值是 _____, $\frac{x-y}{x^2+y^2}$ 的最大值为 _____ .

24 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 点 D, E 是线段 BC 上两个动点, 且 $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$, 则 $\frac{1}{x} + \frac{4}{y}$ 的最小值为 () .



A. $\frac{3}{2}$

B. 2

C. $\frac{5}{2}$

D. $\frac{9}{2}$

25 设 x, y, z 为正实数, 满足 $x-2y+3z=0$, 则 $\frac{y^2}{xz}$ 的最小值是 _____ .

26 已知 $ab > 0$, $a + b = 3$, 则 $\frac{b^2}{a+2} + \frac{a^2}{b+1}$ 的最小值为 _____ .

27 已知 x, y, z 为正实数, 则 $\frac{xy + yz}{x^2 + y^2 + z^2}$ 的最大值为 () .

A. $\frac{2\sqrt{3}}{5}$

B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

C. $\frac{4}{5}$

D. $\frac{2}{3}$

28 若 x, y, z 为正实数, 则 $\frac{2xy + 3yz}{x^2 + y^2 + z^2}$ 的最大值为 _____ .

29 $a, b, c \in \mathbf{R}_+$, 求证: $\frac{a}{b+2c} + \frac{b}{c+2a} + \frac{c}{a+2b} \geq 1$.

30 证明 .

(1) 已知 $a, b, c \in \mathbf{R}^+$, 且 $a + b + c = 1$, 证明: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 9$.

(2) 已知 $a, b, c \in \mathbf{R}^+$, 且 $abc = 1$, 证明: $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$.

二、限时训练

本部分共3个解答题，限时40分钟.

31 已知 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c ，且

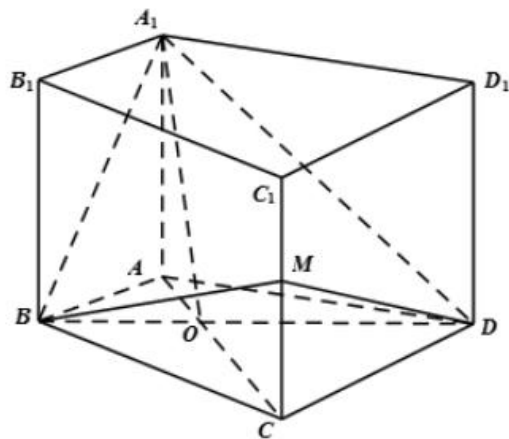
$$\frac{3\sin^2 B + 3\sin^2 C}{\sin A} = 3\sin A + 2\sqrt{3}\sin B\sin C.$$

(1) 求 A 的大小.

(2) 若 $a = 2\sqrt{3}$ ，求 $\triangle ABC$ 面积的最大值以及周长的最大值.

32 如图所示，在四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中， $AA_1 \perp$ 底面 $ABCD$ ， $BD \perp AC$ 于 O ，且

$AA_1 = OC = 2OA = 4$ ，点 M 是棱 CC_1 上一点.



(1) 如果过 A_1, B_1, O 的平面与底面 $ABCD$ 交于直线 l ，求证： $l \parallel AB$ ；

(2) 当 M 是棱 CC_1 中点时，求证： $A_1O \perp DM$ ；

(3) 设二面角 $A_1 - BD - M$ 的平面角为 θ ，当 $|\cos \theta| = \frac{2\sqrt{5}}{25}$ 时，求 CM 的长.

33 已知等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_2 = 2a_1$, $a_4 + a_5 = 9$, S_n 为等比数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和, $2S_{n+1} = S_n + 2$.

(1) 求 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 的通项公式.

(2) 设 $c_n = \begin{cases} \frac{3}{4}a_nb_n, & n \text{ 为奇数} \\ \frac{1}{a_n^2}, & n \text{ 为偶数} \end{cases}$, 证明: $c_1 + c_2 + c_3 + \cdots + c_n < \frac{13}{6}$.