

函数零点 (小题)

一、函数零点

- 1 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 3, & x \leq 1 \\ x + \frac{2}{x}, & x > 1 \end{cases}$, 设 $a \in \mathbf{R}$, 若关于 x 的不等式 $f(x) \geq |\frac{x}{2} + a|$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立, 则 a 的取值范围是 () .

A. $[-\frac{47}{16}, 2]$ B. $[-\frac{47}{16}, \frac{39}{16}]$ C. $[-2\sqrt{3}, 2]$ D. $[-2\sqrt{3}, \frac{39}{16}]$

- 2 已知函数 $f(x) = -|x - a| + a$, $g(x) = x^2 - 4x + 3$, 若方程 $f(x) = |g(x)|$ 恰有 2 个不同的实数根, 则实数 a 的取值范围是 () .

A. $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}) \cup (\frac{13}{8}, +\infty)$ B. $(\frac{1}{2}, \frac{13}{8}) \cup (\frac{5+\sqrt{13}}{2}, +\infty)$
C. $(\frac{1}{2}, \frac{5-\sqrt{13}}{2}] \cup [\frac{3}{2}, \frac{13}{8}]$ D. $(\frac{1}{2}, \frac{5-\sqrt{13}}{2}] \cup [\frac{3}{2}, \frac{13}{8})$

- 3 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x+2) = -f(x)$, 当 $x \in (-1, 3]$ 时, $f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2}, & x \in (-1, 1] \\ t(1-|x-2|), & x \in (1, 3] \end{cases}$, 其中 $t > 0$, 若方程 $f(x) = \frac{x}{3}$ 恰有 3 个不同的实数根, 则 t 的取值范围为 () .

A. $(0, \frac{4}{3})$ B. $(\frac{2}{3}, 2)$ C. $(\frac{4}{3}, 3)$ D. $(\frac{2}{3}, +\infty)$

- 4 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & -2 \leq x \leq 1 \\ |x + \frac{1}{x} - 4|, & 1 < x \leq 5 \end{cases}$, 若关于 x 的方程 $f(x) - ax = 0$ 有两个解, 则实数 a 的取值范围是 () .

A. $(0, \frac{6}{25}] \cup [-\frac{5}{2}, -2]$ B. $(0, \frac{6}{25}) \cup [-\frac{5}{2}, -2]$
C. $(-\infty, -\frac{5}{2}) \cup [\frac{6}{25}, +\infty) \cup \{0, -2\}$ D. $(-\infty, -\frac{5}{2}) \cup [\frac{6}{25}, +\infty)$

- 5 定义在 $(-1, 1]$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x) + 1 = \frac{1}{f(x+1)}$, 当 $x \in [0, 1]$ 时, $f(x) = x$, 若函数 $g(x) = \left| f(x) - \frac{1}{2} \right| - mx - m + 1$ 在 $(-1, 1]$ 内恰有3个零点, 则实数 m 的取值范围是().
- A. $\left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$ B. $\left(\frac{3}{2}, \frac{25}{8}\right)$ C. $\left(\frac{3}{2}, \frac{25}{16}\right)$ D. $\left(\frac{2}{3}, \frac{3}{4}\right)$

- 6 函数 $f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \text{ 或 } 4 \\ x^2 - 2x + 3, & 0 < x \leq 2 \\ |x - 3|, & 2 < x < 4 \end{cases}$, 若 $f(x) = kx$ 有三个不同的根, 实数 k 的取值范围是().
- A. $\left(0, \frac{1}{4}\right) \cup \left(2\sqrt{3} - 2, \frac{3}{2}\right]$ B. $\left[0, \frac{1}{4}\right) \cup \left(2\sqrt{3} - 2, \frac{3}{2}\right]$
- C. $\left[0, \frac{1}{4}\right] \cup \left(2\sqrt{3} - 2, \frac{3}{2}\right]$ D. $\left(0, \frac{1}{4}\right] \cup \left(2\sqrt{3} - 2, \frac{3}{2}\right]$

- 7 已知函数 $f(x) + 2 = \frac{2}{f(\sqrt{x+1})}$, 当 $x \in (0, 1]$ 时, $f(x) = x^2$, 若在区间 $(-1, 1]$ 内, $g(x) = f(x) - t(x+1)$ 有两个不同的零点, 则实数 t 的取值范围是().
- A. $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$ B. $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ C. $\left[-\frac{1}{2}, 0\right)$ D. $\left(0, \frac{1}{2}\right]$

- 8 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x, & -3 \leq x \leq 0 \\ \ln x, & x > 0 \end{cases}$, 若函数 $y = f(x) + |x - 1| - kx$ 在定义域内有且只有三个零点, 则实数 k 的取值范围是().
- A. $\left[-\frac{1}{3}, 1\right)$ B. $\left[-\frac{1}{3}, 1\right]$ C. $\left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{e^2} + 1\right)$ D. $\left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{e^2} + 1\right]$

- 9 若定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x) = \begin{cases} -8x^2 + 8x, & 0 \leq x < 1 \\ -f(x-1), & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$, 且 $f(x+1) = f(x-1)$, $g(x) = \frac{1}{1-x}$, 函数 $h(x) = f(x) - g(x)$ 在区间 $[-3, 1) \cup (1, 5]$ 上的所有零点为 x_1, x_2, x_n , 则 $\sum_{i=1}^n x_i$ 等于().
- A. 2 B. 4 C. 6 D. 8

- 10 设定义域为 $\mathbf{R}$ 的函数, $f(x) = \begin{cases} 5^{|x-1|} - 1, & x \geq 0 \\ x^2 + 4x + 4, & x < 0 \end{cases}$, 关于 x 的方程 $f^2(x) - (2m+1)f(x) + m^2 = 0$ 有7个不同的实数解, 则 m 的值为().
- A. 2 B. 6 C. 2或6 D. -2或-6

- 11 已知函数 $f(x) = \begin{cases} |\log_2 x|, & 0 < x < 2 \\ \sin(\frac{\pi}{4}x), & 2 \leq x \leq 10 \end{cases}$, 若存在实数 x_1, x_2, x_3, x_4 满足 $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = f(x_4)$, 且 $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$, 则 $\frac{(x_3 - 1) \cdot (x_4 - 1)}{x_1 \cdot x_2}$ 的取值范围是 () .

A. (15, 25) B. (20, 32) C. (8, 24) D. (9, 21)

- 12 已知函数 $f(x) = \begin{cases} |\log_2 x|, & 0 < x < 2 \\ \sin(\frac{\pi}{4}x), & 2 \leq x \leq 10 \end{cases}$, 若存在实数 x_1, x_2, x_3, x_4 , 满足 $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$, 且 $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = f(x_4)$, 则 $\frac{(x_3 - 2) \cdot (x_4 - 2)}{x_1 \cdot x_2}$ 的取值范围是 () .

A. (4, 16) B. (0, 12) C. (9, 21) D. (15, 25)

- 13 定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 $f(x)$, 当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = \begin{cases} \log_{\frac{1}{2}}(x+1), & x \in [0, 1) \\ 1 - |x-3|, & x \in [1, +\infty) \end{cases}$, 则关于 x 的函数 $F(x) = f(x) - a$ ($0 < a < 1$) 的所有零点之和为 () .

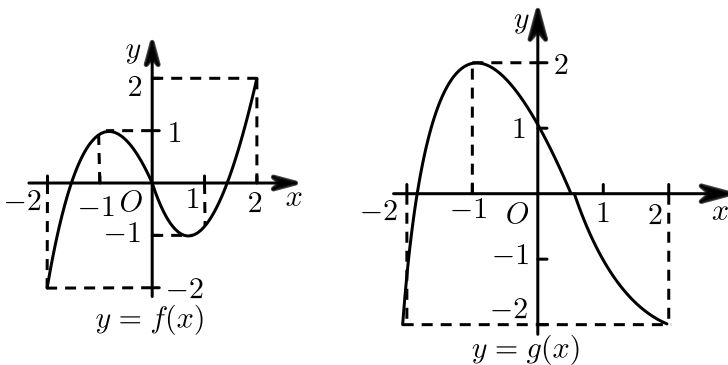
A. $1 - 2^a$ B. $2^a - 1$ C. $1 - 2^{-a}$ D. $2^{-a} - 1$

- 14 已知函数 $y = f(x)$ 和 $y = g(x)$ 在 $[-2, 2]$ 的图象如下所示:

给出下列四个命题:

- (1) 方程 $f[g(x)] = 0$ 有且仅有 6 个根;
- (2) 方程 $g[f(x)] = 0$ 有且仅有 3 个根;
- (3) 方程 $f[f(x)] = 0$ 有且仅有 5 个根;
- (4) 方程 $g[g(x)] = 0$ 有且仅有 4 个根.

其中正确的命题个数是 () .



A. 4个 B. 3个 C. 2个 D. 1个

- 15 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 $f(x)$, 当 $x > 0$ 时, $f(x) = \begin{cases} 4x^2 - 4x + 1, & 0 < x \leq 1, \\ \frac{1}{2}f(x-1), & x > 1, \end{cases}$, 则关于 x 的方程

$6[f(x)]^2 + f(x) = 1$ 的实根的个数为().

- A. 6 B. 7 C. 8 D. 9

- 16 已知函数 $f(x) = \begin{cases} |\ln x|, & x > 0 \\ x^2 + 4x + 1, & x \leq 0 \end{cases}$, 若关于 x 的方程 $f^2(x) - bf(x) + c = 0 (b, c \in \mathbf{R})$ 有8个不同的实数根, 则 $b + c$ 的取值范围为().

- A. $(-\infty, 3)$ B. $(0, 3]$ C. $[0, 3]$ D. $(0, 3)$

- 17 已知函数 $f(x) = \frac{x^2}{e^x} (x \in \mathbf{R})$, 若关于 x 的方程 $f^2(x) - \frac{1}{2}mf(x) + \frac{1}{2}m - 1 = 0$ 恰好有4个不相等的实根, 则 m 的取值范围是().

- A. $\left(1, \frac{8}{e^2} + 1\right)$ B. $\left(2, \frac{4}{e^2} + 2\right)$ C. $\left(1, \frac{4}{e^2} + 1\right)$ D. $\left(2, \frac{8}{e^2} + 2\right)$

- 18 已知函数 $f(x) = \frac{x+1}{e^{x+1}}$, 若关于 x 的方程 $[f(x)]^2 + mf(x) - 1 + m = 0$ 恰有3个不同的实数解, 则实数 m 的取值范围是().

- A. $(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$ B. $\left(1 - \frac{1}{e}, +\infty\right)$ C. $\left(1 - \frac{1}{e}, 1\right)$ D. $(1, e)$

- 19 已知函数 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$, 函数 $g(x) = \begin{cases} -(x+3)^2 + 1, & x < 0 \\ (x - \frac{1}{2})^2 + 1, & x \geq 0 \end{cases}$, 则关于 x 的方程

$g[f(x)] - a = 0 (a > 0)$ 的实根个数取得最大值时, 实数 a 的取值范围是().

- A. $\left(1, \frac{5}{4}\right]$ B. $\left(1, \frac{5}{4}\right)$ C. $\left[1, \frac{5}{4}\right]$ D. $\left[0, \frac{5}{4}\right]$

二、限时训练

本部分共6个填空题，限时20分钟.

20 已知 $x \in \mathbf{R}$ ，复数 $z_1 = 1 + xi$ ， $z_2 = 2 + i$ ，若 $\frac{z_1}{z_2}$ 为纯虚数，则实数 x 的值为 _____ .

21 若 $\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^a$ 的展开式中只有第5项的二项式系数最大，则展开式中常数项是 _____ .

22 已知矩形 $ABEF$ 所在的平面与矩形 $ABCD$ 所在的平面互相垂直， $AD = 2$ ， $AB = 3$ ， $AF = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ ， M 为 EF 的中点，则多面体 $M - ABCD$ 的外接球的表面积为 _____ .

23 短道速滑是冬季奥运会项目，全称短跑道速度滑冰. 短道速滑男子500米的比赛中，运动员自出发点出发进入滑行阶段后，每滑行一圈都要依次经过4个直道与弯道的交接口，记 A_k ($k = 1, 2, 3, 4$) 为顺利通过第 k 个交接口. 已知某速滑运动员顺利通过每个交接口的概率均为 $\frac{3}{4}$ ，摔倒的概率均为 $\frac{1}{4}$ ，假定运动员只有在摔倒或到达终点时才停止滑行，现在用 X 表示该运动员在滑行最后一圈时在这一圈内已经顺利通过的交接口数. 则该运动员停止滑行时恰好已顺利通过3个交接口的概率为 _____， $E(X) =$ _____ .

24 已知正实数 a, b 满足 $a + b = 1$ ，则 $\frac{2a^2 + 1}{a} + \frac{2b^2 + 4}{b}$ 的最小值为 _____ .

25 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = \sqrt{3}$ ， $AC = 2$ ， $2\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{DC}$ ， E 为 AC 的中点， AD 与 BE 交于点 F ， G 为 EF 的中点，则 $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{CF} =$ _____ .

