

## 三角与向量 ( 小题 )

### 一、三角与向量



三角函数与解三角形

- 1 已知函数  $f(x) = \sin \omega x - \sqrt{3} \cos \omega x$  ( $\omega > 0$ ) 的图象与  $x$  轴的两个相邻交点的距离等于  $\frac{\pi}{2}$ , 若将函数  $y = f(x)$  的图象向左平移  $\frac{\pi}{6}$  个单位得到函数  $y = g(x)$  的图象, 则  $y = g(x)$  是减函数的区间为 ( ) .

A.  $(-\frac{\pi}{3}, 0)$

B.  $(0, \frac{\pi}{3})$

C.  $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3})$

D.  $(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$

答案 C

解析  $\because f(x) = \sin \omega x - \sqrt{3} \cos \omega x$  ( $\omega > 0$ ) 的图象与  $x$  轴的两个相邻交点的距离等于  $\frac{\pi}{2}$ ,

$$\therefore \frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi}{\omega} = \frac{\pi}{2}, \therefore \omega = 2,$$

$$\text{函数 } f(x) = \sin 2x - \sqrt{3} \cos 2x = 2 \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right).$$

若将函数  $y = f(x)$  的图象向左平移  $\frac{\pi}{6}$  个单位得到函数

$$y = g(x) = 2 \sin\left(2x + \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3}\right) = 2 \sin 2x \text{ 的图象.}$$

$$\text{令 } 2k\pi + \frac{\pi}{2} \leq 2x \leq 2k\pi + \frac{3\pi}{2}, \text{ 可得 } k\pi + \frac{\pi}{4} \leq x \leq k\pi + \frac{3\pi}{4}, k \in \mathbb{Z},$$

$$\text{故函数 } g(x) \text{ 的减区间为 } \left[k\pi + \frac{\pi}{4}, k\pi + \frac{3\pi}{4}\right].$$

结合所给的选项,

故选: C.

- 2 将函数  $f(x) = \sin 2x$  的图象向右平移  $\varphi$  ( $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ ) 个单位后得到函数  $g(x)$  的图象, 若  $g(x)$  在区间  $[0, \frac{\pi}{6}]$  上单调递增, 且函数  $g(x)$  的最大负零点在区间  $(-\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{6})$  上, 则  $\varphi$  的取值范围是 ( ) .

A.  $[\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{4}]$

B.  $[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{12}]$

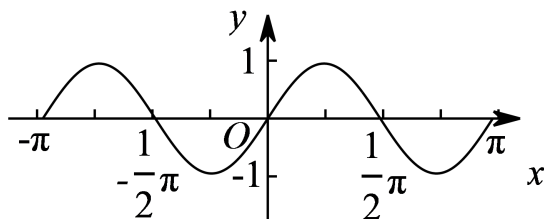
C.  $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}]$

D.  $(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}]$

答案 D

解析

将函数  $f(x) = \sin 2x$  的图象向右平移  $\varphi$  ( $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ ) 个单位后得到函数  $g(x)$  的图象, 而  $f(x) = \sin 2x$  的图象如下图:



$f(x) = \sin 2x$  的单调增区间为  $[-\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi]$ , 零点  $x = \frac{k\pi}{2}$ ,

①  $g(x)$  在区间  $[0, \frac{\pi}{6}]$  上单调递增, 则有:

$$\begin{cases} -\frac{\pi}{4} + \varphi \leq 0 \\ \frac{\pi}{4} + \varphi \geq \frac{\pi}{6} \end{cases},$$

$$\text{得 } \frac{\pi}{12} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4},$$

② 函数  $g(x)$  的最大负零点在区间  $(-\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{6})$  上, 则有:

$$-\frac{\pi}{2} + \varphi \in (-\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{6}),$$

$$\text{得 } \frac{\pi}{6} < \varphi < \frac{\pi}{3},$$

$$\text{综上, } \frac{\pi}{6} < \varphi \leq \frac{\pi}{4}.$$

选D.

3

将函数  $y = \sin x$  的图象向左平移  $\frac{\pi}{6}$  个单位长度, 再将图象上每个点的横坐标变为原来的  $\frac{1}{\omega}$  ( $\omega > 0$ )

倍 (纵坐标不变), 得到函数  $y = f(x)$  的图象, 若函数  $y = f(x)$  的图象, 若函数  $y = f(x)$  在区间

$(0, \frac{\pi}{2})$  上有且仅有一个零点, 则  $\omega$  的取值范围为 ( ).

A.  $[\frac{3}{11}, \frac{3}{5})$

B.  $(\frac{5}{3}, \frac{11}{3}]$

C.  $(1, 2]$

D.  $(\frac{3}{5}, \frac{5}{3})$

答案

B

解析

$y = \sin x$  的图象向左平移  $\frac{\pi}{6}$  个单位长度得到  $y = \sin(x + \frac{\pi}{6})$ , 将图象上每个点的横坐标变为原

来的  $\frac{1}{\omega}$  ( $\omega > 0$ ) 倍得到  $y = \sin(\omega x + \frac{\pi}{6}) = f(x)$ ,

若函数  $y = f(x)$  在区间  $(0, \frac{\pi}{2})$  上有且仅有一个零点,

$$\therefore \omega \cdot 0 + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6},$$

$$\therefore \omega \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} \in (\pi, 2\pi],$$

$$\therefore \frac{5}{3} < \omega \leq \frac{11}{3},$$

故选：B.

- 4 已知函数  $f(x) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) - 2\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ ,  $x \in \mathbf{R}$ , 给出下列四个命题：①函数  $f(x)$  的最小正周期为  $2\pi$ ；②函数  $f(x)$  的最大值为 1；③函数  $f(x)$  在  $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$  上单调递增；④将函数  $f(x)$  的图象向左平移  $\frac{\pi}{12}$  个单位长度，得到的函数解析式为  $g(x) = \sin 2x$ . 其中正确命题的个数是 ( ).

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

答案 B

解析

$$\begin{aligned} \therefore f(x) &= \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) - 2\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \\ &= \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x - \sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x - \cos 2x \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x - \frac{1}{2}\cos 2x \\ &= \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right), \\ \therefore \text{最小正周期 } T &= \frac{2\pi}{2} = \pi, \text{ ①错误;} \end{aligned}$$

且函数  $f(x)$  的最大值为 1, ②正确;

$$\text{当 } x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \text{ 时, } 2x - \frac{\pi}{6} \in \left[-\frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right],$$

$\therefore f(x)$  在  $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$  上不单调, ③错误;

将函数  $f(x)$  的图象向左平移  $\frac{\pi}{12}$  个单位长度得

$$f(x) = \sin\left[2\left(x + \frac{\pi}{12}\right) - \frac{\pi}{6}\right] = \sin(2x), \text{ ④正确.}$$

综上得：正确命题个数为 2 个.

故选 B.

- 5 设  $f(x) = \sin 3x - \cos 3x$ , 把  $y = f(x)$  的图象向左平移  $\varphi$  ( $\varphi > 0$ ) 个单位长度后，恰好得到函数  $g(x) = -\sin 3x + \cos 3x$  的图象，则  $\varphi$  的值可以为 ( ).

A.  $\frac{\pi}{6}$

B.  $\frac{\pi}{4}$

C.  $\frac{\pi}{2}$

D.  $\pi$

答案 D

**解析** 将 $y = f(x)$ 的图象向左平移 $\varphi$  ( $\varphi > 0$ )个单位长度得：

$$g(x) = \sin 3(x + \varphi) - \cos 3(x + \varphi) = \sin(3x + 3\varphi) - \cos(3x + 3\varphi),$$

①当 $\varphi = \frac{\pi}{6}$ 时,  $g(x) = \sin 3x + \cos 3x$ , 不合题意,

②当 $\varphi = \frac{\pi}{4}$ 时,  $g(x) = \sqrt{2} \cos 3x$ , 不合题意,

③当 $\varphi = \frac{\pi}{2}$ 时,  $g(x) = -\sin 3x - \cos 3x$ , 不合题意,

④当 $\varphi = \pi$ 时,  $g(x) = -\sin 3x + \cos 3x$ , 满足题意,

综合①②③④得：选项D满足题意，

故选：D.

6 已知函数 $f(x) = \sin x - \cos x$ ，把函数 $f(x)$ 的图象上每个点的横坐标扩大到原来的2倍，再向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度，得到函数 $g(x)$ 的图象，则函数 $g(x)$ 的对称轴方程为\_\_\_\_\_.

**答案**  $x = 2k\pi + \frac{11\pi}{6}, k \in \mathbf{Z}$

**解析** 把函数 $f(x) = \sin x - \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ 的图象上每个点的横坐标扩大到原来的2倍，得 $y = \sqrt{2} \sin\left(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{4}\right)$ 的图象，再向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位，得到函数 $g(x) = \sqrt{2} \sin\left[\frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{\pi}{4}\right] = \sqrt{2} \sin\left(\frac{1}{2}x - \frac{5\pi}{12}\right)$ 的图象，令 $\frac{1}{2}x - \frac{5\pi}{12} = k\pi + \frac{\pi}{2}$ ，求得 $x = 2k\pi + \frac{11\pi}{6}, k \in \mathbf{Z}$ ， $\therefore$ 函数 $g(x)$ 的对称轴方程为 $x = 2k\pi + \frac{11\pi}{6}, k \in \mathbf{Z}$ 。  
故答案为： $x = 2k\pi + \frac{11\pi}{6}, k \in \mathbf{Z}$ 。

7 将函数 $y = \sqrt{3} \cos x + \sin x$  ( $x \in \mathbf{R}$ )的图像上各点的横坐标伸长到原来的2倍，再向左平移 $m$  ( $m > 0$ )个单位长度后，所得到的图象关于原点对称，则 $m$ 的最小值是( )。

A.  $\frac{4\pi}{3}$

B.  $\frac{\pi}{3}$

C.  $\frac{5\pi}{6}$

D.  $\frac{\pi}{6}$

**答案** A

**解析**  $y = \sqrt{3} \cos x + \sin x = 2 \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x + \frac{1}{2} \sin x \right)$



$$= 2 \sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right) \quad (\text{横坐标变为倍}).$$

$$2 \sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{x}{2}\right) \quad (\text{向左平移单位}).$$

$$2 \sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{x+m}{2}\right) \quad (\text{关于原点对称}).$$

$$\therefore \text{令 } f(x) = 2 \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3} + \frac{m}{2}\right).$$

$$\text{则有 } -f(x) = f(-x).$$

$$\text{解得: } -\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3} + \frac{m}{2}\right) + 2k\pi = -\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3} + \frac{m}{2} \quad (k \in \mathbf{Z}).$$

$$\text{或 } \frac{x}{2} + \frac{\pi}{3} + \frac{m}{2} - \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3} + \frac{m}{2}\right) = (2k+1)\pi \quad (k \in \mathbf{Z}).$$

$$\text{第二式得: } x = (2k+1)\pi, \text{ 舍去.}$$

$$\text{故有: } \frac{2}{3}\pi + m = 2k\pi \quad (k \in \mathbf{Z}).$$

$$\text{又有 } m > 0, \therefore m_{\min} = 2\pi - \frac{2\pi}{3} = \frac{4}{3}\pi.$$

故选A.

8 已知函数  $f(x) = \sin x + \sqrt{3} \cos x$  的图象关于直线  $x = a$  对称, 则最小正实数  $a$  的值为 ( ) .

A.  $\frac{\pi}{6}$

B.  $\frac{\pi}{4}$

C.  $\frac{\pi}{3}$

D.  $\frac{\pi}{2}$

答案 A

解析

$$f(x) = \sin x + \sqrt{3} \cos x = 2 \left( \frac{1}{2} \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x \right) = 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right),$$

$$\therefore \text{其对称轴方程由 } x + \frac{\pi}{3} = k\pi + \frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbf{Z},$$

$$\text{得: } x = k\pi + \frac{\pi}{6}, \quad k \in \mathbf{Z}, \text{ 又函数 } f(x) = \sin x + \sqrt{3} \cos x \text{ 的图象关于直线 } x = a \text{ 对称,}$$

$$\therefore a = k\pi + \frac{\pi}{6}, \quad k \in \mathbf{Z},$$

$$\text{当 } k = 0 \text{ 时, 最小正实数 } a \text{ 的值为 } \frac{\pi}{6}.$$

故选A.

9 将函数  $f(x) = \sqrt{3} \cos 2x - \sin 2x$  ( $x \in \mathbf{R}$ ) 的图象向左平移  $\frac{\pi}{6}$  个单位长度后得到函数  $y = g(x)$ , 则函数  $y = g(x)$  ( ) .

A. 是奇函数

B. 是偶函数

C. 既是奇函数, 又是偶函数

D. 既不是奇函数, 又不是偶函数

答案 A

解析

$$f(x) = 2 \left[ \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2x - \frac{1}{2} \sin 2x \right]$$

$$= 2 \cos \left( 2x + \frac{\pi}{6} \right),$$

$f(x)$  向左平移  $\frac{\pi}{6}$  个单位后, 得

$$g(x) = 2 \cos \left[ 2 \left( x + \frac{\pi}{6} \right) + \frac{\pi}{6} \right]$$

$$= 2 \cos \left( 2x + \frac{\pi}{2} \right)$$

$$= -2 \sin 2x$$

为奇函数.

故选 A.

10 已知函数  $f(x) = \sqrt{3} \sin \omega x + \cos \omega x (\omega > 0)$  的图象与  $x$  轴交点的横坐标构成一个公差为  $\frac{\pi}{2}$  的等差数列, 把函数  $f(x)$  的图象沿  $x$  轴向左平移  $\frac{\pi}{6}$  个单位, 得到函数  $g(x)$  的图象. 关于函数  $g(x)$  的命题中正确的是 ( ).

A. 在  $\left[ \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right]$  上是增函数

B. 其图象关于点  $\left( -\frac{\pi}{2}, 0 \right)$  对称

C. 函数  $g(x)$  是奇函数

D. 当  $x \in \left[ \frac{\pi}{6}, \frac{2}{3}\pi \right]$  时, 函数的值域是  $[-2, 1]$

答案 D

解析

$$\frac{T}{2} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow T = \pi = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow \omega = 2.$$

$$f(x) = \sqrt{3} \sin \omega x + \cos \omega x$$

$$= 2 \cdot \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \omega x + \frac{1}{2} \cos \omega x \right)$$

$$= 2 \sin \left( \omega x + \frac{\pi}{6} \right)$$

$$= 2 \sin \left( 2x + \frac{\pi}{6} \right).$$

$$g(x) = 2 \sin \left[ 2 \left( x + \frac{\pi}{6} \right) + \frac{\pi}{6} \right]$$

$$= 2 \sin \left( 2x + \frac{\pi}{2} \right)$$

$$= 2 \cos 2x.$$

$$-\pi + 2k\pi < 2x < 2k\pi.$$

$$-\frac{\pi}{2} + k\pi < x < k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$\therefore$  A 错.

$$2x = k\pi,$$

$$x = \frac{k}{2}\pi, k \in \mathbf{Z}.$$

$$2 \cos 2x = 2 \cos(-2x).$$

$\therefore$  C 错.

$$x \in \left[ \frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3} \right],$$

$$2x \in \left[ \frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3} \right].$$

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2 \cos \frac{\pi}{3} = 1.$$

$$\therefore f(x) \in [-2, 1].$$

由图象可知:

函数在  $\left[ \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right]$  上是减函数, A 错.

其图象对称中心为  $\left( -\frac{\pi}{4}, 0 \right)$ , B 错.

函数为偶函数, C 错.

故选 D.

11 已知  $\triangle ABC$  的内角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ , 且  $\frac{c-b}{c-a} = \frac{\sin A}{\sin C + \sin B}$ , 则  $\angle B =$  ( ).

A.  $\frac{\pi}{6}$

B.  $\frac{\pi}{4}$

C.  $\frac{\pi}{3}$

D.  $\frac{3\pi}{4}$

答案 C

解析 已知等式利用正弦定理化简得:  $\frac{c-b}{c-a} = \frac{a}{c+b}$ , 即  $c^2 - b^2 = ac - a^2$ ,

$$\therefore a^2 + c^2 - b^2 = ac,$$

$$\therefore \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{1}{2},$$

$\therefore B$  为三角形的内角,

$$\therefore B = \frac{\pi}{3}.$$

故选 C.

12 在  $\triangle ABC$  中,  $(a+b+c)(b+c-a) = 3bc$ , 且  $\sin A = 2 \sin B \cos C$ , 则  $\triangle ABC$  为 ( ).

A. 等腰三角形

B. 等边三角形

C. 直角三角形

D. 钝角三角形

答案 B

解析

$$(a+b+c)(b+c-a) = 3bc.$$

$$\text{即 } (b+c)^2 - a^2 = 3bc.$$

$$\Rightarrow b^2 + c^2 - a^2 = bc.$$

$$\therefore \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{1}{2}, A = 60^\circ.$$

$$\sin A = 2 \sin B \cos C.$$

$$\text{即 } a = 2b \cdot \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

$$\text{整理得: } b^2 = c^2, \text{ 即 } b = c.$$

综上,  $\triangle ABC$  为等边三角形.

故选 B.

13 在  $\triangle ABC$  中, 内角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ , 若  $\triangle ABC$  的面积为  $S$ , 且  $6S = (a+b)^2 - c^2$ ,

则  $\tan C$  等于 ( ).

A.  $\frac{5}{12}$

B.  $-\frac{5}{12}$

C.  $\frac{12}{5}$

D.  $-\frac{12}{5}$

答案 C

解析

$$\triangle ABC \text{ 中, } \therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ab \sin C,$$

$$\text{由余弦定理: } c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C,$$

$$\text{且 } 6S = (a+b)^2 - c^2,$$

$$\therefore 3ab \sin C = (a+b)^2 - (a^2 + b^2 - 2ab \cos C),$$

$$\text{整理得 } 3 \sin C - 2 \cos C = 2,$$

$$\therefore (3 \sin C - 2 \cos C)^2 = 4,$$

$$\therefore \frac{(3 \sin C - 2 \cos C)^2}{\sin^2 C + \cos^2 C} = 4,$$

$$\text{化简可得 } 5 \tan^2 C - 12 \tan C = 0,$$

$$\therefore C \in (0, 180^\circ),$$

$$\therefore \tan C = \frac{12}{5}.$$

故选 C.

14 在 $\triangle ABC$ 中, 角 $A, B, C$ 的对边分别为 $a, b, c$ , 且 $b^2 = a^2 + bc$ ,  $A = \frac{\pi}{6}$ , 则内角 $C = ( \quad )$ .

A.  $\frac{\pi}{6}$

B.  $\frac{\pi}{4}$

C.  $\frac{3\pi}{4}$

D.  $\frac{\pi}{4}$ 或 $\frac{3\pi}{4}$

答案 B

解析 由余弦定理可得 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \frac{\pi}{6} = b^2 + c^2 - \sqrt{3}bc$ ,

$$\therefore b^2 = a^2 + bc,$$

$$\therefore bc + c^2 - \sqrt{3}bc = 0,$$

$$\text{解得 } c = (\sqrt{3} - 1)b,$$

$$a^2 = b^2 - bc = (2 - \sqrt{3})b^2,$$

$$\therefore \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2} - \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\therefore c < b, \therefore C \text{ 为锐角}, C = \frac{\pi}{4}.$$

故选: B.

15 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 $A, B, C$ 所对的边分别是 $a, b, c$ ,  $(a + b + c)(b + c - a) = 3bc$ ,  $a = \sqrt{3}$ ,

$$\tan B = \frac{\sqrt{2}}{4}, \text{ 则 } b \text{ 的值为 } \underline{\hspace{2cm}}.$$

答案  $\frac{2}{3}$

解析  $\therefore (a + b + c)(b + c - a) = 3bc$ ,

$$\therefore \text{整理可得: } b^2 + c^2 - a^2 = bc,$$

$$\therefore \text{由余弦定理可得: } \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{bc}{2bc} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore A = \frac{\pi}{3}.$$

$$\text{又 } \tan B = \frac{\sqrt{2}}{4}, B \text{ 为三角形内角},$$

$$\therefore \cos B = \sqrt{\frac{1}{1 + \tan^2 B}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}, \sin B = \sqrt{1 - \cos^2 B} = \frac{1}{3},$$

$$\therefore \text{由正弦定理可得: } \frac{\sqrt{3}}{\sin \frac{\pi}{3}} = \frac{b}{\frac{1}{3}}, \text{ 解得: } b = \frac{2}{3}.$$

故答案为:  $\frac{2}{3}$ .

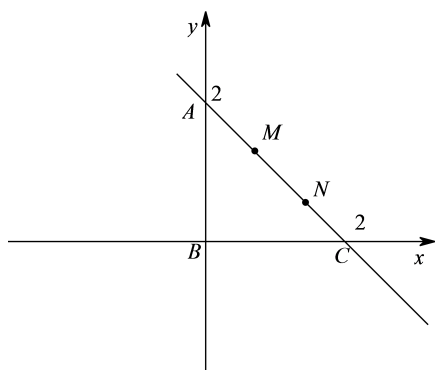
平面向量

- 16 在等腰直角 $\triangle ABC$ 中,  $\angle ABC = 90^\circ$ ,  $AB = BC = 2$ ,  $M, N$  (不与 $A, C$ 重合) 为 $AC$ 边上的两个动点, 且满足 $|\overrightarrow{MN}| = \sqrt{2}$ , 则 $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{BN}$ 的取值范围为 ( ).

A.  $\left[\frac{3}{2}, 2\right]$       B.  $\left(\frac{3}{2}, 2\right)$       C.  $\left[\frac{3}{2}, 2\right)$       D.  $\left[\frac{3}{2}, +\infty\right)$

答案 C

解析 以等腰直角 $\triangle ABC$ 的直角边为坐标轴, 建立平面直角坐标系, 图所示;



则 $B(0,0)$ , 直线 $AC$ 的方程为 $x + y = 2$ ;

设 $M(a, 2-a)$ , 则 $0 < a < 1$ ,

由 $|\overrightarrow{MN}| = \sqrt{2}$ , 得 $N(a+1, 1-a)$ ;

$\therefore \overrightarrow{BM} = (a, 2-a)$ ,  $\overrightarrow{BN} = (a+1, 1-a)$ ;

$\therefore \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{BN} = a(a+1) + (2-a)(1-a) = 2a^2 - 2a + 2 = 2\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{2}$ .

$\because 0 < a < 1$ ,  $\therefore$  当 $a = \frac{1}{2}$ 时,  $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{BN}$ 取得最小值 $\frac{3}{2}$ ,

且 $a = 0$ 或 $1$ 时,  $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{BN} = 2$ , 无最大值;

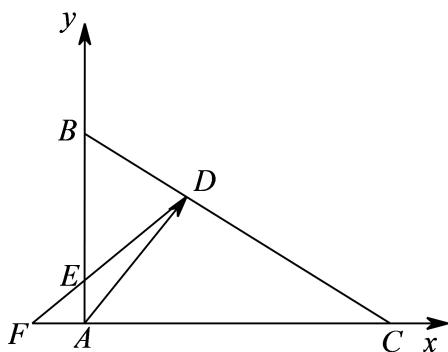
$\therefore \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{BN}$ 的取值范围是 $\left[\frac{3}{2}, 2\right)$ .

故选C.

- 17 在 $\triangle ABC$ 中,  $\angle BAC = 90^\circ$ ,  $AB = 1$ ,  $AC = 2$ ,  $\overrightarrow{BD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ ,  $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ ,  $DE$ 的延长线交 $CA$ 的延长线于点 $F$ , 则 $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AF}$ 的值为 \_\_\_\_.

答案  $-\frac{4}{9}$

解析 如图, 分别以 $AC$ 、 $AB$ 所在直线为 $x$ 、 $y$ 轴建立平面直角坐标系,



则  $A(0,0)$ ,  $C(2,0)$ ,  $B(0,1)$ ,

$$\therefore \overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB},$$

$$\therefore E\left(0, \frac{1}{3}\right),$$

$$\text{又 } \overrightarrow{BD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}, \text{ 得 } D\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right),$$

$$\text{设 } F(m,0), \text{ 则 } \overrightarrow{DE} = \left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right), \overrightarrow{EF} = \left(m, -\frac{1}{3}\right),$$

$$\text{由 } \overrightarrow{DE} \parallel \overrightarrow{EF}, \text{ 得 } -\frac{2}{3} \times \left(-\frac{1}{3}\right) + \frac{m}{3} = 0, \text{ 即 } m = -\frac{2}{3},$$

$$\therefore \overrightarrow{AD} = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right), \overrightarrow{AF} = \left(-\frac{2}{3}, 0\right),$$

$$\text{则 } \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AF} = -\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = -\frac{4}{9}.$$

故答案为:  $-\frac{4}{9}$ .

- 18 设  $D$ 、 $E$  分别是  $\triangle ABC$  的边  $AB$ 、 $BC$  上的点,  $AD = \frac{1}{2}AB$ ,  $BE = \frac{2}{3}BC$ , 若  $\overrightarrow{DE} = \lambda_1 \overrightarrow{AB} + \lambda_2 \overrightarrow{AC}$  ( $\lambda_1, \lambda_2$  为实数), 则  $\lambda_1 + \lambda_2$  的值为 \_\_\_\_\_.

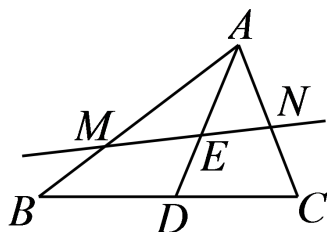
答案  $\frac{1}{2}$

解析  $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})$   
 $= -\frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} = \lambda_1 \overrightarrow{AB} + \lambda_2 \overrightarrow{AC}$ , 所以  $\lambda_1 = -\frac{1}{6}$ ,  $\lambda_2 = \frac{2}{3}$ ,  $\lambda_1 + \lambda_2 = \frac{1}{2}$ .  
 故答案为  $\frac{1}{2}$ .

- 19 在  $\triangle ABC$  中, 点  $E$  是中线  $AD$  上一点,  $MN$  经过点  $E$ , 与边  $AB$ ,  $AC$  分别交于  $M$ ,  $N$ , 若  $\overrightarrow{AB} = m\overrightarrow{AM}$ ,  $\overrightarrow{AC} = n\overrightarrow{AN}$ , 且  $m+n=5$ ,  $\overrightarrow{AE} = \lambda\overrightarrow{AD}$ , 则实数  $\lambda =$  \_\_\_\_\_.

答案  $\frac{2}{5}$

解析 如图



$\because M, E, N$  共线,

$\therefore$  可设  $\overrightarrow{ME} = t\overrightarrow{MN}$ .

$\therefore \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{ME}$

$= \overrightarrow{AM} + t\overrightarrow{MN}$

$= \overrightarrow{AM} + t(\overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM})$

$= (1-t)\overrightarrow{AM} + t\overrightarrow{AN}$

$= \frac{1-t}{m}\overrightarrow{AB} + \frac{t}{n}\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AE} = x\overrightarrow{AD} = \frac{x}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$

$= \frac{x}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{x}{2}\overrightarrow{AC}$

$\therefore \begin{cases} \frac{x}{2} = \frac{1-t}{m} \\ \frac{x}{2} = \frac{t}{n} \end{cases}$

又  $m+n=5$ .

解得  $x = \frac{2}{5}$ .

20 在  $\triangle ABC$  中,  $AB = AC = 1$ ,  $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$ ,  $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{NC}$ ,  $\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{AN} = -\frac{1}{4}$ , 则  $\angle ABC = ( )$ .

A.  $\frac{5\pi}{12}$

B.  $\frac{\pi}{3}$

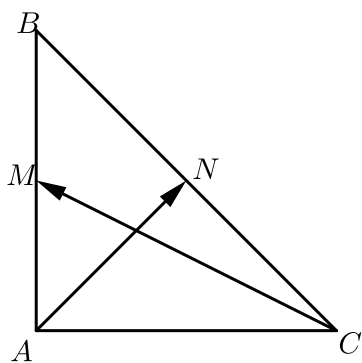
C.  $\frac{\pi}{4}$

D.  $\frac{\pi}{6}$

答案 C

解析 如图,





$$\because AB = AC = 1, \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}, \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{NC}, \overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{AN} = -\frac{1}{4},$$

$$\therefore \overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{AN} = (\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AC}) \cdot \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$$

$$= \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right) \cdot \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$$

$$= \frac{1}{4}|\overrightarrow{AB}|^2 + \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}|^2$$

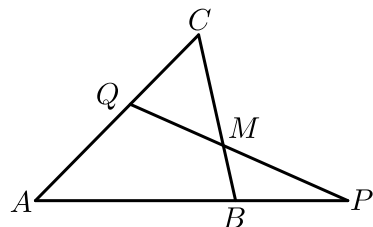
$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cos \angle BAC - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}, \text{ 解得 } \cos \angle BAC = 0,$$

$$\text{则 } \angle BAC = \frac{\pi}{2}.$$

$$\therefore \angle ABC = \frac{\pi}{4}.$$

故选：C.

- 21 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\overrightarrow{CM} = 2\overrightarrow{MB}$ ，过点M的直线分别交射线AB、AC于不同的两点P、Q，若 $\overrightarrow{AP} = m\overrightarrow{AB}$ ， $\overrightarrow{AQ} = n\overrightarrow{AC}$ ，则 $mn + m$ 的最小值为（ ）.



A.  $6\sqrt{3}$

B.  $2\sqrt{3}$

C. 6

D. 2

答案 D

解析 由已知，可得 $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$

$$= \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})$$

$$= \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$$

$$= \frac{2}{3m}\overrightarrow{AP} + \frac{1}{3n}\overrightarrow{AQ},$$

$$\text{因为 } P, M, Q \text{ 三点共线, 所以 } \frac{2}{3m} + \frac{1}{3n} = 1,$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } mn + m &= \frac{2n+m}{3} + m = \frac{2n}{3} + \frac{4m}{3} = \left(\frac{2n}{3} + \frac{4m}{3}\right) \left(\frac{2}{3m} + \frac{1}{3n}\right) \\ &= \frac{10}{9} + \frac{4n}{9m} + \frac{4m}{9n} \geq \frac{10}{9} + 2\sqrt{\frac{4n}{9m} \times \frac{4m}{9n}} \\ &= 2. \end{aligned}$$

故选D.

22 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 4$ ,  $|\overrightarrow{BC}| = 3$ ,  $M, N$ 分别是 $BC$ 边上的三等分点, 则 $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN}$ 的值是( ).

A. 5

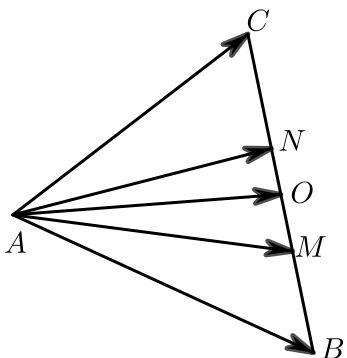
B.  $\frac{21}{4}$

C. 6

D. 8

答案 C

解析 如图,



设 $BC$ 的中点为 $O$ , 由 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 4$ ,

$$\text{得 } (\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}) \cdot (\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC})$$

$$= (\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}) \cdot (\overrightarrow{AO} - \overrightarrow{OB})$$

$$= |\overrightarrow{AO}|^2 - |\overrightarrow{OB}|^2 = 4$$

$$\because |\overrightarrow{BC}| = 3,$$

$$\therefore |\overrightarrow{OB}|^2 = \frac{9}{4},$$

$$\text{由此可得: } |\overrightarrow{AO}|^2 = \frac{25}{4},$$

$$\text{而 } \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN} = (\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OM}) \cdot (\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{ON})$$

$$= (\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OM}) \cdot (\overrightarrow{AO} - \overrightarrow{OM}) = |\overrightarrow{AO}|^2 - |\overrightarrow{OM}|^2,$$

$$\text{由已知 } |\overrightarrow{OM}| = \frac{1}{2},$$

$$\therefore |\overrightarrow{AO}|^2 - |\overrightarrow{OM}|^2$$

$$= \frac{25}{4} - \frac{1}{4} = 6,$$

$$\therefore \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN} = 6.$$

23

在 $\triangle ABC$ 中,  $AB = 3$ ,  $AC = 1$ ,  $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{3}$ ,  $\overrightarrow{AD} = \lambda \left( \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} + \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|} \right)$  且 $D$ 在 $BC$ 上, 则线段

$AD$ 的长为 \_\_\_\_\_.

答案

1

解析

$$\text{设 } \vec{e}_1 = \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}, \vec{e}_2 = \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|},$$

$$\text{则 } |\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = 1,$$

$$\therefore \overrightarrow{AD} = \lambda \left( \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} + \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|} \right) = \lambda (\vec{e}_1 + \vec{e}_2),$$

根据向量加法的平行四边形法则可知, 以 $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ 为邻边的平行四边形为菱形,

$\therefore D$ 在 $BC$ 上,

$\therefore AD$ 为 $\angle BAC$ 的平分线,

$$\text{由角平分线定理可得, } \frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC} = 3,$$

$$\therefore \overrightarrow{BD} = 3\overrightarrow{DC} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BC},$$

$$\therefore \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC},$$

$$\therefore \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{3},$$

$$\therefore \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -\frac{1}{3},$$

$$\therefore |\overrightarrow{AD}|^2 = \frac{\overrightarrow{AB}^2}{16} + \frac{9\overrightarrow{AC}^2}{16} + \frac{3\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{8} = \frac{9}{16} + \frac{9}{16} - \frac{3}{8} \times \left(-\frac{1}{3}\right) = 1,$$

$$\therefore |\overrightarrow{AD}| = 1.$$

故答案为: 1.

24

已知三角形 $ABC$ 外接圆 $O$ 的半径为1 ( $O$ 为圆心), 且 $2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \vec{0}$ ,  $|\overrightarrow{OA}| = 2|\overrightarrow{AB}|$ , 则 $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BC}$ 等于 ( ).

A.  $-\frac{15}{4}$

B.  $-\frac{\sqrt{15}}{2}$

C.  $\frac{15}{4}$

D.  $\frac{\sqrt{15}}{2}$

答案 A

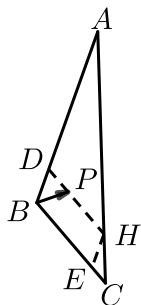
**解析** 由已知  $2\vec{OA} + \vec{AB} + \vec{AC} = \vec{0}$ , 可得  $\vec{OA} + \vec{AB} + \vec{OA} + \vec{AC} = \vec{0}$ , 即  $\vec{OB} + \vec{OC} = \vec{0}$ ,  
所以  $O, B, C$  共线, 故  $BC$  为圆的直径, 所以  $AB \perp AC$ ,  
设  $|\vec{AB}| = x$ , 又  $|\vec{OA}| = 2|\vec{AB}|$ ,  
故  $|\vec{OA}| = 2x$ ,  $|\vec{BC}| = 4x$ ,  
由勾股定理  $|\vec{AC}| = \sqrt{15}x$ ,  
则  $\vec{CA} \cdot \vec{BC} = |\vec{CA}| \cdot |\vec{BC}| (-\cos \angle ACB) = -\frac{15}{4}$ .

25 在  $\triangle ABC$  中,  $AB = 5$ ,  $AC = 7$ ,  $BC = 3$ .  $P$  为  $\triangle ABC$  内一点 (含边界), 若满足  $\vec{BP} = \frac{1}{4}\vec{BA} + \lambda\vec{BC}$  ( $\lambda \in \mathbf{R}$ ), 则  $\vec{BA} \cdot \vec{BP}$  的取值范围为 \_\_\_\_\_.

答案  $\left[\frac{5}{8}, \frac{25}{4}\right]$

**解析**  $\triangle ABC$  中,  $AB = 5$ ,  $AC = 7$ ,  $BC = 3$ ;  
 $\therefore \cos B = \frac{5^2 + 3^2 - 7^2}{2 \times 5 \times 3} = -\frac{1}{2}$ ,  
 $\therefore B = \frac{2\pi}{3}$ ,  
在  $AB$  上取一点  $D$ , 使得  $\vec{BD} = \frac{1}{4}\vec{BA}$ , 过点  $D$  作  $DH \parallel BC$ , 交  $AC$  于  $H$ ,  
 $\therefore \vec{BP} = \frac{1}{4}\vec{BA} + \lambda\vec{BC}$ , 且点  $P$  是  $\triangle ABC$  内一点 (含边界),  
 $\therefore$  点  $P$  在线段  $DH$  上, 如图所示  
当  $P$  在  $D$  处时,  $\vec{BP} = \frac{1}{4}\vec{BA}$ ,  $\lambda$  取得最小值为 0,  
当  $P$  在  $H$  处时,  $\vec{BP} = \frac{1}{4}\vec{BA} + \frac{3}{4}\vec{BC}$ ,  $\lambda$  取得最大值为  $\frac{3}{4}$ ,  
 $\therefore \vec{BA} \cdot \vec{BP} = \vec{BA} \cdot \left(\frac{1}{4}\vec{BA} + \lambda\vec{BC}\right)$ ,  
 $= \frac{1}{4}\vec{BA}^2 + \lambda\vec{BA} \cdot \vec{BC}$   
 $= \frac{1}{4} \times 25 + \lambda \times 5 \times 3 \times \cos \frac{2\pi}{3}$   
 $= \frac{25}{4} - \frac{15}{2}\lambda$ ;  
当  $\lambda = 0$  时,  $\vec{BA} \cdot \vec{BP}$  取得最大值为  $\frac{25}{4}$ ,  
当  $\lambda = \frac{3}{4}$  时,  $\vec{BA} \cdot \vec{BP}$  取得最小值为  $\frac{25}{4} - \frac{15}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{5}{8}$ ,  
 $\therefore \vec{BA} \cdot \vec{BP}$  的取值范围是  $\left[\frac{5}{8}, \frac{25}{4}\right]$ .

故答案为： $\left[\frac{5}{8}, \frac{25}{4}\right]$  .



26 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $CA = 4$ ， $CB = 3$ ， $M, N$ 是斜边 $AB$ 上的两个动点，且 $MN = 2$ ，则 $\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{CN}$ 的取值范围为（ ） .

A.  $\left[2, \frac{5}{2}\right]$

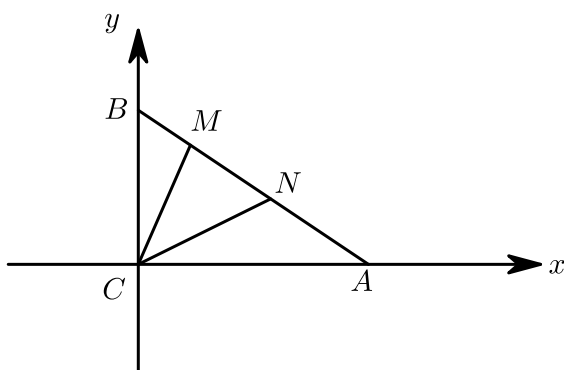
B.  $[4, 6]$

C.  $\left[\frac{119}{25}, \frac{48}{5}\right]$

D.  $\left[\frac{144}{25}, \frac{53}{5}\right]$

答案 C

解析 方法一：如图，



以 $C$ 为坐标原点， $CA$ 为 $x$ 轴建立平面坐标系，则：

$$A(4, 0), B(0, 3),$$

$$\text{直线} AB \text{的方程为} \frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1, \text{即} y = 3 - \frac{3}{4}x,$$

$$\text{设} M\left(a, 3 - \frac{3}{4}a\right), N\left(b, 3 - \frac{3}{4}b\right) \text{且} 0 \leq a \leq 4, 0 \leq b \leq 4, \text{且} a < b,$$

$$\because MN = 2,$$

$$\therefore (a - b)^2 + \frac{9}{16}(a - b)^2 = 4.$$

$$\therefore (a - b)^2 = \frac{64}{25}.$$

$$\therefore b - a = \frac{8}{5}.$$

$$\therefore b = a + \frac{8}{5}.$$

$$\therefore 0 \leq a \leq \frac{12}{5}.$$

$$\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{CN} = ab + \left(3 - \frac{3}{4}a\right) \left(3 - \frac{3}{4}b\right)$$

$$= \frac{25}{16}ab - \frac{9}{4}(a+b) + 9$$

$$= \frac{25}{16}a^2 - 2a + \frac{27}{5}$$

$$= \frac{25}{16} \left(a - \frac{16}{25}\right)^2 + \frac{119}{25}, \quad 0 \leq a \leq \frac{12}{5}.$$

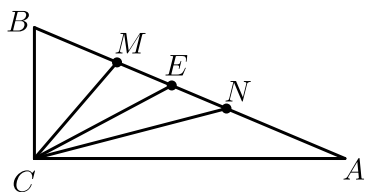
$$\therefore a = \frac{16}{25} \text{ 时, 取最小值 } \frac{119}{25}.$$

$$a = \frac{12}{5} \text{ 时, 取最大值 } \frac{48}{5}.$$

$$\therefore \overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{CN} \text{ 的取值范围为 } \left[\frac{119}{25}, \frac{48}{5}\right].$$

方法二：设  $MN$  的中点为  $E$ ，则有

$$\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{CN} = \frac{1}{4}[\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{CN}]^2 - (\overrightarrow{CM} - \overrightarrow{CN})^2 = |\overrightarrow{CE}|^2 - \frac{1}{4}|\overrightarrow{NM}|^2 = |\overrightarrow{CE}|^2 - 1.$$



易知  $|\overrightarrow{CE}|$  的最小值等于点  $C$  到斜边  $AB$  的距离，即  $\frac{12}{5}$ ，所以  $\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{CN}$  的最小值为

$$\left(\frac{12}{5}\right)^2 - 1 = \frac{119}{25}.$$

当点  $M$ （或点  $N$ ）与点  $A$  重合时， $|\overrightarrow{CE}|$  最大，此时  $|\overrightarrow{CE}|^2 = 1^2 + 4^2 - 2 \times 1 \times 4 \times \frac{4}{5} = \frac{53}{5}$ ，所

以  $\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{CN}$  的最大值为  $\frac{48}{5}$ 。

综上， $\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{CN}$  的取值范围是  $\left[\frac{119}{25}, \frac{48}{5}\right]$ 。

故选 C。

27 已知  $\triangle ABC$  为等边三角形， $AB = 2$ ，设点  $P, Q$  满足  $\overrightarrow{AP} = \lambda \overrightarrow{AB}$ ， $\overrightarrow{AQ} = (1 - \lambda) \overrightarrow{AC}$ ， $\lambda \in \mathbf{R}$ ，若

$$\overrightarrow{BQ} \cdot \overrightarrow{CP} = -\frac{3}{2}，\text{ 则 } \lambda = ( )。$$

A.  $\frac{1}{2}$

B.  $\frac{1 \pm \sqrt{2}}{2}$

C.  $\frac{1 \pm \sqrt{10}}{2}$

D.  $\frac{-3 \pm 2\sqrt{2}}{2}$

答案 A

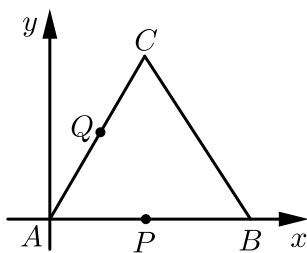
解析 方法一： $\because \overrightarrow{BQ} = \overrightarrow{AQ} - \overrightarrow{AB} = (1 - \lambda) \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$ ，

$$\overrightarrow{CP} = \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}，$$

$$\text{又 } \because \overrightarrow{BQ} \cdot \overrightarrow{CP} = -\frac{3}{2}，\text{ 且 } |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}| = 2，\angle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} = 60^\circ，$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cos 60^\circ = 2, \\ \therefore [(1-\lambda)\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}](\lambda\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) &= -\frac{3}{2}, \\ \lambda|\overrightarrow{AB}|^2 + (\lambda^2 - \lambda - 1)\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + (1-\lambda)|\overrightarrow{AC}|^2 &= \frac{3}{2}, \\ \therefore 4\lambda + 2(\lambda^2 - \lambda - 1) + 4(1-\lambda) &= \frac{3}{2}, \text{ 解得 } \lambda = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

方法二：以点A为坐标原点，AB所在的直线为x轴，过点A且垂直于AB的直线为y轴，建立平面直角坐标系，



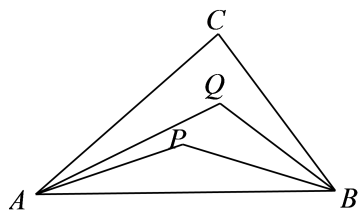
$$\begin{aligned}\text{则 } A(0,0), B(2,0), C(1,\sqrt{3}), \\ \therefore \overrightarrow{AB} = (2,0), \overrightarrow{AC} = (1,\sqrt{3}), \\ \text{又 } \overrightarrow{AP} = \lambda\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AQ} = (1-\lambda)\overrightarrow{AC}, \\ \therefore P(2\lambda,0), Q(1-\lambda, \sqrt{3}(1-\lambda)), \\ \therefore \overrightarrow{BQ} \cdot \overrightarrow{CP} = (-1-\lambda, \sqrt{3}(1-\lambda)) \cdot (2\lambda-1, -\sqrt{3}) &= -\frac{3}{2}, \\ \text{化简得 } 4\lambda^2 - 4\lambda + 1 &= 0, \\ \therefore \lambda &= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

28 在 $\triangle ABC$ 所在平面内一点P，满足 $\overrightarrow{AP} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{5}\overrightarrow{AC}$ ，延长BP交AC于点D，若 $\overrightarrow{AD} = \lambda\overrightarrow{AC}$ ，则 $\lambda =$ \_\_\_\_\_.

答案  $\frac{1}{3}$

解析 由题意 $\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AB} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AC} - \frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$ ，  
 设 $\overrightarrow{BD} = \mu\overrightarrow{BP}$ ，则 $\overrightarrow{BD} = \frac{1}{5}\mu\overrightarrow{AC} - \frac{3}{5}\mu\overrightarrow{AB}$ ，  
 又 $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} = \lambda\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$ ，  
 于是有 $\begin{cases} \lambda = \frac{1}{5}\mu \\ \frac{3}{5}\mu = 1 \end{cases}$ ，解得 $\lambda = \frac{1}{3}$ 。  
 故答案为 $\frac{1}{3}$ 。

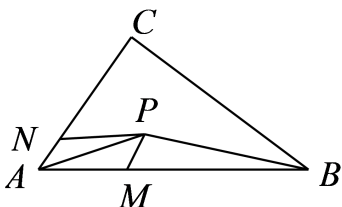
- 29 如图, 设  $P, Q$  为  $\triangle ABC$  内的两点, 且  $\overrightarrow{AP} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{5}\overrightarrow{AC}$ ,  $\overrightarrow{AQ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$ , 则  $\triangle ABP$  的面积与  $\triangle ABQ$  的面积之比为 ( ).



- A.  $\frac{1}{5}$       B.  $\frac{4}{5}$       C.  $\frac{1}{4}$       D.  $\frac{1}{3}$

答案 B

解析 设  $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AC}$ ,



则  $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN}$ .

由平行四边形法则知  $NP \parallel AB$ , 所以  $\frac{S_{\triangle ABP}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{|\overrightarrow{AN}|}{|\overrightarrow{AC}|} = \frac{1}{5}$ ,

同理  $\frac{S_{\triangle ABQ}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{1}{4}$ , 故  $\frac{S_{\triangle ABP}}{S_{\triangle ABQ}} = \frac{4}{5}$ ,

答案为:  $\frac{4}{5}$ .

故选: B.

- 30  $O$  是平面上一定点,  $A, B, C$  是平面上不共线的三个点, 动点  $P$  满足

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \lambda \left( \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}| \sin B} + \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}| \sin C} \right), \lambda \in [0, +\infty), \text{ 则 } P \text{ 的轨迹一定通过 } \triangle ABC \text{ 的 ( ).}$$

- A. 外心      B. 内心      C. 重心      D. 垂心

答案 C

解析



$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= \overrightarrow{OA} + \lambda \left( \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}| \sin B} + \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}| \sin C} \right) \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{AP} &= \lambda \left( \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}| \sin B} + \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}| \sin C} \right).\end{aligned}$$

由正弦定理可知,

$$|\overrightarrow{AB}| \sin B = |\overrightarrow{AC}| \sin C,$$

$$\text{所以 } \overrightarrow{AP} = \frac{1}{|\overrightarrow{AB}| \sin B} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}),$$

设  $BC$  的中点为  $D$ ,

$$\text{所以 } \overrightarrow{AP} = \frac{2\overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{AB}| \sin B},$$

则由平行四边形法则可知,

点  $P$  在  $BC$  的中线  $AD$  所在的射线上.

则  $P$  的轨迹一定通过  $\triangle ABC$  的重心,

答案选 C.

## 二、限时训练

本章节分两部分, 每部分共9个选择题, 分别限时25分钟.



### 训练1

31 设集合  $A = \{x | 2 \leq x \leq 6\}$ ,  $B = \{x | 2a \leq x \leq a + 3\}$ . 若  $B \subseteq A$ , 则实数  $a$  的取值范围是 ( ).

A.  $[1, 3]$

B.  $[3, +\infty)$

C.  $[1, +\infty)$

D.  $(1, 3)$

答案

C

解析

因为  $B \subseteq A$ ,

所以先考虑  $B = \emptyset$ ,

此时  $a + 3 < 2a$ , 得  $a > 3$ .

若  $B \neq \emptyset$ ,

$$\text{则 } \begin{cases} 2 \leq 2a, \\ a + 3 \leq 6, \\ 2a \leq a + 3. \end{cases} \text{ 解得 } 1 \leq a \leq 3.$$

综上  $a \geq 1$  .

故选C .

32 若“ $x < a$ ”是“ $x^2 - x - 6 > 0$ ”的充分不必要条件，则实数  $a$  的最大值为 ( ) .

A. 3

B. 2

C. -2

D. -3

答案 C

解析  $x^2 - x - 6 > 0$  ,

$$(x - 3)(x + 2) > 0 ,$$

解集为  $x > 3$  或  $x < -2$  ,

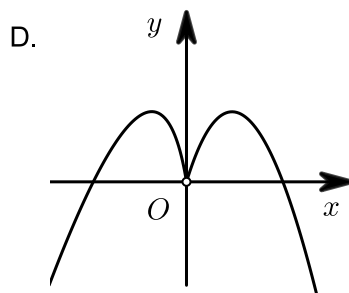
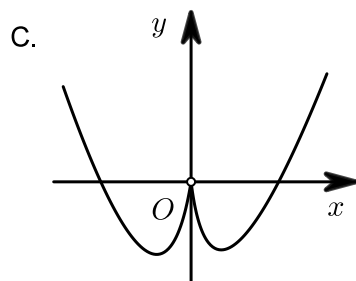
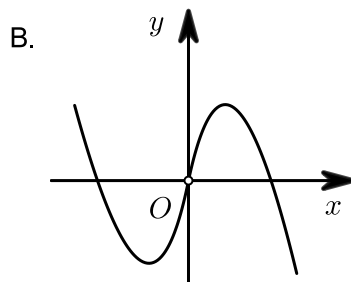
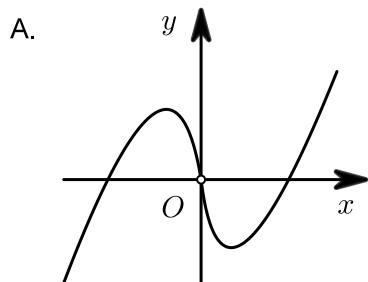
$\therefore$  “ $x < a$ ”是“ $x^2 - x - 6 > 0$ ”的充分不必要条件 ,

$$\therefore (-\infty, a) \subset (-\infty, -2) \cup (3, +\infty) ,$$

则实数  $a$  取得最大值为 -2 ,

故C正确 .

33 函数  $f(x) = x \ln |x|$  的大致图象是 ( ) .



答案 A

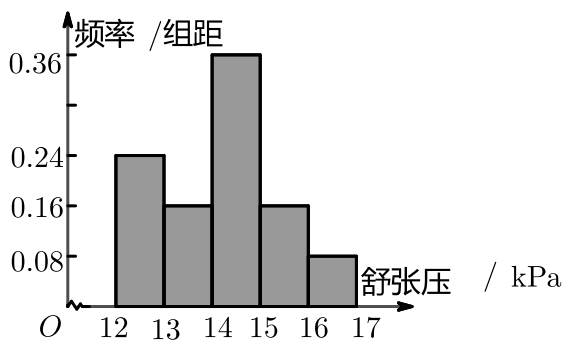
**解析** 当  $x > 0$  时,  $f(x) = x \ln x$ ,  $f'(x) = 1 + \ln x$ ,  
 在  $(0, \frac{1}{e})$  上  $f'(x) < 0$ ,  
 在  $(\frac{1}{e}, +\infty)$  上  $f'(x) > 0$ ,  
 即在  $(0, \frac{1}{e})$  上  $f(x)$  单调递减, 在  $(\frac{1}{e}, +\infty)$  上  $f(x)$  单调递增,  
 综合上述性质可得为选项A中的图象.  
 故选A.

- 34 长方体的长、宽、高分别是2、1、1, 其顶点都在同一个球面上, 则该球的表面积为 ( ).
- A.  $3\pi$                       B.  $6\pi$                       C.  $12\pi$                       D.  $24\pi$

**答案** B

**解析** 长方体的对角线的长度, 就是外接球的直径,  
 $\therefore 2r = \sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{6}$ ,  
 $\therefore$  这个球的表面积:  $4\pi r^2 = 6\pi$ .  
 故选B.

- 35 为了研究某药品的疗效, 选取若干名志愿者进行临床试验. 所有志愿者的舒张压数据 (单位: kPa) 的分组区间为  $[12, 13)$ ,  $[13, 14)$ ,  $[14, 15)$ ,  $[15, 16)$ ,  $[16, 17]$ , 将其按从左到右的顺序分别编号为第一组, 第二组, ..., 第五组. 如图是根据试验数据制成的频率分布直方图, 已知第一组与第二组共有20人, 第三组中没有疗效的有6人, 则第三组中有疗效的人数为 ( ).



- A. 6                      B. 8                      C. 12                      D. 18

答案 C

**解析** 由直方图可得分布在区间第一组与第二组共有20人，分布在区间第一组与第二组的频率分别为0.24，0.16，所以第一组有12人，第二组8人，第三组的频率为0.36，所以第三组的人数：18人，  
第三组中没有疗效的有6人，  
第三组中有疗效的有12人。  
故选C。

36 已知偶函数  $f(x) = \log_a |x - b|$  ( $a > 0$  且  $a \neq 1$ ) 在  $(-\infty, 0)$  上单调递减，则  $f(b - a)$  与  $f(a^2 + 1)$  的大小关系是 ( )。

A.  $f(b - a) > f(a^2 + 1)$

B.  $f(b - a) < f(a^2 + 1)$

C.  $f(b - a) = f(a^2 + 1)$

D. 无法确定

答案 B

**解析**  $\because$  函数  $f(x) = \log_a |x - b|$  ( $a > 0$  且  $a \neq 1$ ) 为偶函数，

函数  $f(x)$  的定义域为  $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ ，

$$f(-x) = \log_a |-x - b| = \log_a |x - b|,$$

$$\therefore b = 0,$$

$$f(x) = \log_a |x|, (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1),$$

又  $\because$  复合函数  $f(x)$  在  $(-\infty, 0)$  上为单调递减，

设  $U(x) = |x|$ ，其在  $(-\infty, 0)$  上单调递减，

所以函数  $f(x) = \log_a U(x)$  在其定义域内单调递增，

$$\therefore a > 1,$$

$$\text{由 } b - a = -a < -1; a^2 + 1 > 2, \text{ 则 } -a^2 - 1 < -2,$$

$$f(b - a) < f(-a^2 - 1) = f(a^2 + 1),$$

$$\text{所以 } f(b - a) < f(a^2 + 1),$$

故B正确。

- 37 抛物线  $y^2 = ax (a > 0)$  的准线与双曲线  $C: \frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{4} = 1$  的两条渐近线所围成的三角形面积为  $2\sqrt{2}$ , 则  $a$  的值为 ( ).

A. 8                      B. 6                      C. 4                      D. 2

答案 A

解析 抛物线  $y^2 = ax$  的准线为  $x = -\frac{a}{4}$ ,  
双曲线  $C: \frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{4} = 1$  的两条渐近线为  $y = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}x$ ,  
可得两交点为  $\left(-\frac{a}{4}, \frac{\sqrt{2}}{8}a\right), \left(-\frac{a}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{8}a\right)$ ,  
即有三角形的面积为  $\frac{1}{2} \cdot \frac{a}{4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{4}a = 2\sqrt{2}$ ,  
解得  $a = 8$ .  
故选 A.

- 38 已知函数  $f(x) = 3\sin(2x + \varphi) + a$ , 对任意实数  $x$  都有  $f\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = f\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$ , 且  $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = -4$ , 则实数  $a$  的值是 ( ).

A. -1                      B. -7或-1                      C. 7或1                      D. -7或7

答案 B

解析 由  $f\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = f\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$  知  $x = \frac{\pi}{3}$  是  $f(x)$  的对称轴. 故  
 $2 \times \frac{\pi}{3} + \varphi = \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbf{Z})$ , 得  $\varphi = -\frac{\pi}{6} + k\pi (k \in \mathbf{Z})$ .  
 $\therefore f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 3\sin\left(2 \times \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} + k\pi\right) + a = 3\sin\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) + a$   
 $= 3\cos k\pi + a (k \in \mathbf{Z})$   
又  $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = -4$   
 $\therefore 3\cos k\pi + a = -4 (k \in \mathbf{Z})$ , 得  $a = -4 - 3\cos k\pi (k \in \mathbf{Z})$   
当  $k$  为奇数时,  $a = -1$ ; 当  $k$  为偶数时,  $a = -7$ .  $\therefore a$  的值为 -7 或 -1.  
故选 B

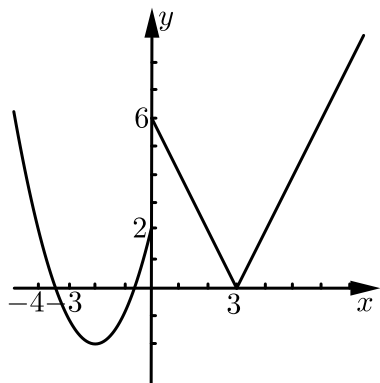
已知函数  $f(x) = \begin{cases} |2x-6|, & x > 0 \\ x^2 + 4x + a, & x \leq 0 \end{cases}$ ，若关于  $x$  的方程  $f(x) = m$  ( $0 < m \leq 2$ ) 恒有四个不相等的实数根，则  $a$  的取值范围是 ( )。

- A.  $[2, 6]$                       B.  $(0, 4]$                       C.  $[2, 4]$                       D.  $[4, 6]$

**答案** C

**解析**  $x > 0$  时， $f(x) = |2x-6|$  在  $(0, 3)$  单调递减，在  $(3, +\infty)$  单调递增，则在  $(0, +\infty)$  上  $f(x) = m$  有 2 个不相等的实数根，

$x < 0$  时  $f(x)$  的对称轴为  $x = -2$ ，则在  $(-\infty, -2)$  上， $f(x)$  单调递减，在  $(-2, 0]$  上， $f(x)$  单调递增，故  $f(x) = m$  已有 3 个不相等的实数根，若有 4 个只需  $\begin{cases} f(0) = a \geq 2 \\ \Delta = 16 - 4a \geq 0 \end{cases}$ ，



即  $2 \leq a \leq 4$ ，

故  $a$  的取值范围为  $[2, 4]$ ，

故选：C。

### 训练2

40 设全集  $U = \mathbf{R}$ ，集合  $A = \{y | y = 3 - x^2\}$ ， $B = \{x | y = \log_2(x+2)\}$ ，则  $(\complement_U A) \cap B = ( )$ 。

- A.  $\{x | -2 < x \leq 3\}$       B.  $\{x | x > 3\}$                       C.  $\{x | x \geq 3\}$                       D.  $\{x | x < -2\}$

**答案** B

**解析** 全集  $U = \mathbf{R}$ ，集合  $A = \{y | y = 3 - x^2\} = \{y | y \leq 3\}$ ，

$\therefore \complement_U A = \{y | y > 3\}$ ，

又  $B = \{x | y = \log_2(x+2)\} = \{x | x+2 > 0\} = \{x | x > -2\}$ ，

$$\therefore (\complement_U A) \cap B = \{x | x > 3\}.$$

故选：B.

41 已知  $a, b, c, d \in \mathbf{R}$  且  $a \neq 0$ , “ $b^2 - 3ac \leq 0$ ”是“函数  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  在  $\mathbf{R}$  上单调”的 ( ) .

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

答案 C

解析 若  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  在  $\mathbf{R}$  上单调,

则  $f'(x) \geq 0$  或  $f'(x) \leq 0$  恒成立,

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c,$$

$$\text{则 } \Delta = 4b^2 - 12ac \leq 0,$$

$$\therefore b^2 - 3ac \leq 0,$$

$\therefore$  “ $b^2 - 3ac \leq 0$ ”是“ $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  在  $\mathbf{R}$  上单调的充分必要条件”.

故选C.

42 已知  $x = \ln \pi$ ,  $y = \log_5 2$ ,  $z = e^{-\frac{1}{2}}$ , 则 ( ) .

A.  $x < y < z$

B.  $z < x < y$

C.  $z < y < x$

D.  $y < z < x$

答案 D

解析 因为  $\ln \pi > \ln e = 1$ ,  $\log_5 2 < \log_5 5 = 1$ , 所以  $x > y$ , 故排除A、B;

又因为  $\log_5 2 < \log_5 \sqrt{5} = \frac{1}{2}$ ,  $e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}} > \frac{1}{2}$ , 所以  $z > y$ , 故排除C.

故选D.

43 从甲、乙两种树苗中各抽测了10株树苗的高度(单位: cm), 其茎叶图如图所示, 则下列描述正确的是 ( ) .

| 甲         | 乙         |
|-----------|-----------|
| 9         | 1 0 4 0   |
| 9 5 3 1 0 | 2 6 7     |
| 1 2 3 7   | 3 0       |
|           | 4 4 6 6 7 |

- A. 甲种树苗的平均高度大于乙种树苗的平均高度，且甲种树苗比乙种树苗长得整齐  
 B. 甲种树苗的平均高度大于乙种树苗的平均高度，但乙种树苗比甲种树苗长得整齐  
 C. 乙种树苗的平均高度大于甲种树苗的平均高度，且乙种树苗比甲种树苗长得整齐  
 D. 乙种树苗的平均高度大于甲种树苗的平均高度，但甲种树苗比乙种树苗长得整齐

**答案** D

**解析** 由茎叶图中的数据，我们可得甲、乙两种树苗抽取的样本高度分别为：

甲：19，20，21，23，25，29，31，32，33，37，

乙：10，10，14，26，27，30，44，46，46，47，

$$\text{由已知易得，}\bar{x}_{\text{甲}} = \frac{19 + 20 + 21 + 23 + 25 + 29 + 31 + 32 + 33 + 37}{10}$$

$$= 27，$$

$$\bar{x}_{\text{乙}} = \frac{10 + 10 + 14 + 26 + 27 + 30 + 44 + 46 + 46 + 47}{10}$$

$$= 30，$$

$$\text{又 } S_{\text{甲}}^2 < S_{\text{乙}}^2，$$

故乙种树苗的平均高度大于甲种树苗的平均高度，甲种树苗比乙种树苗长得整齐，

故选D。

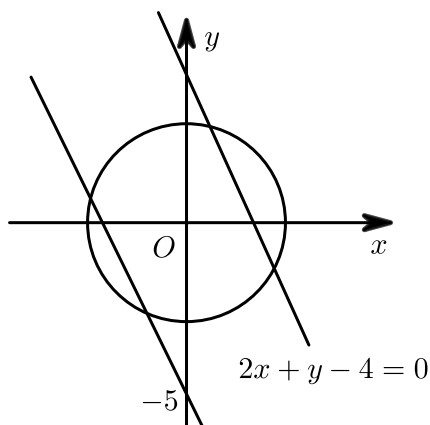
44 已知直线 $l_1: 2x + y - 4 = 0$ ，直线 $l_2$ 经过点 $P(0, -5)$ 且不过第一象限，若直线 $l_2$ 截圆 $x^2 + y^2 = 9$ 所得的弦长为4，则 $l_1$ 与 $l_2$ 的位置关系为（ ）。

- A.  $l_1 // l_2$                       B.  $l_1 \perp l_2$                       C.  $l_1$ 与 $l_2$ 相交但不垂直    D.  $l_1$ 与 $l_2$ 重合

**答案** A

**解析** 如图，





由已知可得，直线 $l_2$ 的斜率存在，设其方程为 $y = kx - 5$ 。

$\because$  直线 $l_2$ 截圆 $x^2 + y^2 = 9$ 所得的弦长为4，

$\therefore$  圆心到直线 $l_2$ 的距离 $d = \frac{|-5|}{\sqrt{k^2 + 1}} = \sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{5}$ ，

可得 $k = \pm 2$ ，

$\because l_2$ 经过点 $P(0, -5)$ 且不过第一象限，

$\therefore k = -2$ ，则 $l_2$ 的方程为 $y = -2x - 5$ ，与直线 $l_1$ 平行。

故选：A。

45 已知 $\alpha, \beta$ 是两个不同的平面， $m, n$ 是两条不同的直线，则下列命题不正确的是（ ）。

A. 若 $m // n, m \perp \alpha$ ，则 $n \perp \alpha$

B. 若 $m \perp \alpha, m \perp \beta$ ，则 $\alpha // \beta$

C. 若 $m \perp \alpha, m \subset \beta$ ，则 $\alpha \perp \beta$

D. 若 $m // \alpha, \alpha \cap \beta = n$ ，则 $m // n$

答案 D

解析 对于A，由两平行线中的一条直线垂直于一个平面，则另一条直线也垂直这个平面知，A正确；

对于B，由垂直于同一条直线的两个平面是平行的知B正确；

对于C，由一个平面经过另一个平面的一条垂线，则这两个平面垂直知C正确；

对于D， $m // \alpha, \alpha \cap \beta = n$ ，可以得到直线 $m$ 与 $n$ 可能平行，也可能相交还可能异面，故D不正确。

46 已知函数 $f(x) = \sin^2 \frac{\omega x}{2} + \frac{1}{2} \sin \omega x - \frac{1}{2} (\omega > 0)$ ， $x \in \mathbf{R}$ 。若 $f(x)$ 在区间 $(\pi, 2\pi)$ 内没有零点，则 $\omega$ 的取值范围是（ ）。

A.  $\left(0, \frac{1}{8}\right]$

B.  $\left(0, \frac{1}{4}\right] \cup \left[\frac{5}{8}, 1\right)$

C.  $\left(0, \frac{5}{8}\right]$

D.  $\left(0, \frac{1}{8}\right] \cup \left[\frac{1}{4}, \frac{5}{8}\right)$

答案 D

解析

$$f(x) = \sin^2 \frac{\omega x}{2} + \frac{1}{2} \sin \omega x - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \sin \omega x - \frac{1}{2} \cos \omega x = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin\left(\omega x - \frac{\pi}{4}\right), \text{ 因为 } \pi < x < 2\pi,$$

$$\text{所以 } \omega\pi - \frac{\pi}{4} < \omega x - \frac{\pi}{4} < 2\omega\pi - \frac{\pi}{4},$$

因为函数  $f(x)$  在区间  $(\pi, 2\pi)$  内没有零点,

$$\text{所以 } \begin{cases} \frac{2\pi}{2\omega} \geq \pi \\ f(\pi) \cdot f(2\pi) \geq 0 \end{cases},$$

$$\text{即 } \begin{cases} 0 < \omega \leq 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \sin\left(\omega\pi - \frac{\pi}{4}\right) \geq 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \sin\left(2\omega\pi - \frac{\pi}{4}\right) \geq 0 \end{cases},$$

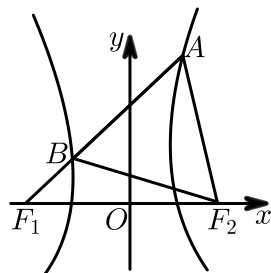
$$\text{或 } \begin{cases} 0 < \omega \leq 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \sin\left(\omega\pi - \frac{\pi}{4}\right) \leq 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \sin\left(2\omega\pi - \frac{\pi}{4}\right) \leq 0 \end{cases},$$

$$\text{则 } \begin{cases} 2k + \frac{1}{4} \leq \omega \leq 2k + \frac{5}{4}, (k \in \mathbf{R}) \\ k + \frac{1}{8} \leq \omega \leq k + \frac{5}{8} \end{cases}$$

$$\text{或 } \begin{cases} 0 < \omega \leq 1 \\ 2k - \frac{3}{4} \leq \omega \leq 2k + \frac{1}{4}, (k \in \mathbf{R}), \text{ 所以 } 0 < \omega \leq \frac{1}{8} \text{ 或 } \frac{1}{4} \leq \omega \leq \frac{5}{8}. \\ k - \frac{3}{8} \leq \omega \leq k + \frac{1}{8} \end{cases}$$

故选 D.

47 如图,  $F_1, F_2$  分别是双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  的左、右焦点, 过  $F_1(-\sqrt{7}, 0)$  的直线  $l$  与双曲线分别交于点  $A, B$ , 若  $\triangle ABF_2$  为等边三角形, 则双曲线的方程为 ( ).



A.  $\frac{5x^2}{7} - \frac{5y^2}{28} = 1$

B.  $\frac{x^2}{6} - y^2 = 1$

C.  $x^2 - \frac{y^2}{6} = 1$

D.  $\frac{5x^2}{28} - \frac{5y^2}{7} = 1$

答案 C

解析

根据双曲线的定义, 可得  $|AF_1| - |AF_2| = 2a$ ,

$\therefore \triangle ABF_2$  是等边三角形, 即  $|AF_2| = |AB|$ ,

$\therefore |BF_1| = 2a$ .

又  $\therefore |BF_2| - |BF_1| = 2a$ ,

$\therefore |BF_2| = |BF_1| + 2a = 4a$ .

$\therefore \triangle BF_1F_2$  中,  $|BF_1| = 2a$ ,  $|BF_2| = 4a$ ,  $\angle F_1BF_2 = 120^\circ$ ,

$\therefore |F_1F_2|^2 = |BF_1|^2 + |BF_2|^2 - 2|BF_1| \cdot |BF_2| \cos 120^\circ$ .

即  $4c^2 = 4a^2 + 16a^2 - 2 \times 2a \times 4a \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 28a^2$ ,

解得  $c^2 = 7a^2$ .

$\therefore F_1(-\sqrt{7}, 0)$ , 所以  $c = \sqrt{7}$ , 则  $a = 1$ ,  $b = \sqrt{6}$ ,

$\therefore$  双曲线的标准方程为:  $x^2 - \frac{y^2}{6} = 1$ .

故选 C.

48 已知函数  $f(x) = x^2 - x - a - 2$  有零点  $x_1, x_2$ , 函数  $g(x) = x^2 - (a+1)x - 2$  有零点  $x_3, x_4$ , 且  $x_3 < x_1 < x_4 < x_2$ , 则实数  $a$  的取值范围是 ( ).

A.  $\left(-\frac{9}{4}, -2\right)$

B.  $\left(-\frac{9}{4}, 0\right)$

C.  $(-2, 0)$

D.  $(1, +\infty)$

答案 C

解析

$\therefore$  二次函数  $f(x)$ 、 $g(x)$  均有两个零点,

则  $\begin{cases} 1 + 4(a+2) > 0 \\ (a+1)^2 + 8 > 0 \end{cases}$ , 即  $a > -\frac{9}{4}$ .

要使  $x_3 < x_1 < x_4 < x_2$ , 首先需要  $g(x)$  对称轴  $x = \frac{a+1}{2}$  位于  $f(x)$  对称轴  $x = \frac{1}{2}$  左边,

即  $\frac{a+1}{2} < \frac{1}{2}$ , 得  $a < 0$ .

又  $x_1 = \frac{1 - \sqrt{4a+9}}{2}$ ,  $x_2 = \frac{1 + \sqrt{4a+9}}{2}$ ,  $x_3 = \frac{a+1 - \sqrt{a^2+2a+9}}{2}$ ,  
 $x_4 = \frac{a+1 + \sqrt{a^2+2a+9}}{2}$ .

由  $x_3 < x_1 < x_4 < x_2$ ,

得  $\frac{a+1 - \sqrt{a^2+2a+9}}{2} < \frac{1 - \sqrt{4a+9}}{2} < \frac{a+1 + \sqrt{a^2+2a+9}}{2} < \frac{1 + \sqrt{4a+9}}{2}$ .

则  $a < \sqrt{a^2+2a+9} - \sqrt{4a+9} < -a$ , ①

$$-a < \sqrt{a^2 + 2a + 9} + \sqrt{4a + 9}, \quad ②$$

解①得,  $-\frac{9}{4} < a < 0$ , 且  $\sqrt{a^2 + 2a + 9} < |a| + \sqrt{4a + 9}$ ,

两边平方得  $4a + 9 > 1$ , 得  $a > -2$ .

由②得,  $-a - \sqrt{4a + 9} < \sqrt{a^2 + 2a + 9}$ ,

平方得  $2a\sqrt{4a + 9} < -2a$ , 显然成立.

综上,  $-2 < a < 0$ ,

故选C.