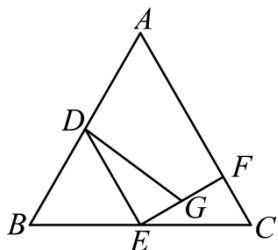


17 题几何练习 教师版

一、填空题

1. 如图，在边长为8的等边 $\triangle ABC$ 中， D ， E 分别为 AB ， BC 的中点， $EF \perp AC$ 于点 F ， G 为 EF 的中点，连接 DG ，则 DG 的长为_____.



【答案】 $\sqrt{19}$

【分析】直接利用三角形中位线定理进而得出 $DE = 4$ ，且 $DE \parallel AC$ ，再利用勾股定理以及直角三角形的性质得出 EG 以及 DG 的长.

【详解】解： $\because$ 在边长为8的等边 $\triangle ABC$ 中， D ， E 分别为 AB ， BC 的中点，

$\therefore DE$ 是 $\triangle ABC$ 的中位线，

$\therefore DE = 4$ ，且 $DE \parallel AC$ ， $BD = BE = EC = 4$ ，

$\because EF \perp AC$ 于点 F ， $\angle C = 60^\circ$ ，

$\therefore \angle FEC = 30^\circ$ ， $\angle DEF = \angle EFC = 90^\circ$ ，

$\therefore FC = \frac{1}{2}EC = 2$ ，

故 $EF = \sqrt{EC^2 - FC^2} = 2\sqrt{3}$ ，

$\because G$ 为 EF 的中点，

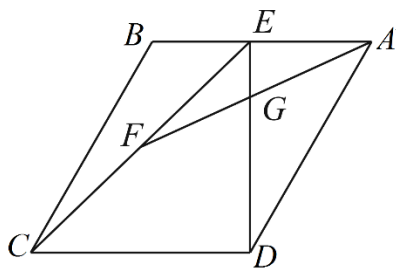
$\therefore EG = \sqrt{3}$ ，

$\therefore DG = \sqrt{DE^2 + EG^2} = \sqrt{19}$.

故答案为： $\sqrt{19}$.

【点睛】此题主要考查了勾股定理以及等边三角形的性质和三角形中位线定理，正确得出 EG 的长是解题关键.

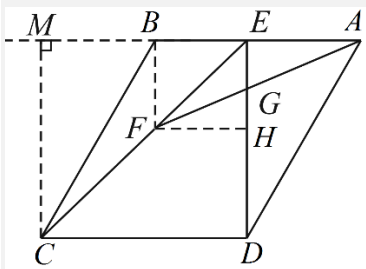
2. 如图，已知菱形 $ABCD$ 的边长为4， $\angle DAB = 60^\circ$ ， E 为 AB 的中点， F 为 CE 的中点， AF 与 DE 相交于点 G ，则 GF 的长等于_____.



【答案】 $\frac{\sqrt{19}}{2} / \frac{1}{2}\sqrt{19}$

【分析】过点 F 作 $FH \parallel CD$ ，交 DE 于 H ，过点 C 作 $CM \perp AB$ ，交 AB 的延长线于 M ，连接 FB ，先证明 FH 是 $\triangle CDE$ 的中位线，得 $FH = 2$ ，再证明 $\triangle AEG \cong \triangle FHG$ ，得 $AG = FG$ ，在 $\text{Rt}\triangle CBM$ 中计算 BM 和 CM 的长，再证明 FB 是中位线，可得 BF 的长，由勾股定理可得 AF 的长，从而得结论。

【详解】如图，过点 F 作 $FH \parallel CD$ ，交 DE 于 H ，过点 C 作 $CM \perp AB$ ，交 AB 的延长线于 M ，连接 FB ，



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形，

$\therefore AB = CD = BC = 4$ ， $AB \parallel CD$ ，

$\therefore FH \parallel AB$ ，

$\therefore \angle FHG = \angle AEG$ ，

$\because FH \parallel CD$ ，

$\therefore \frac{DH}{EH} = \frac{CF}{EF}$ ，

$\therefore F$ 是 CE 的中点，

$\therefore H$ 是 DE 的中点，

$\therefore FH$ 是 $\triangle CDE$ 的中位线，

$\therefore FH = \frac{1}{2}CD = 2$ ，

$\because E$ 是 AB 的中点，

$\therefore AE = BE = 2$ ，

$\therefore AE = FH$ ，

$\therefore \angle AGE = \angle FGH$ ，

$\therefore \triangle AEG \cong \triangle FHG (\text{AAS})$ ，

$$\therefore AG = FG,$$

$$\because AD \parallel BC,$$

$$\therefore \angle CBM = \angle DAB = 60^\circ,$$

$$\text{Rt}\triangle CBM \text{ 中, } \angle BCM = 30^\circ,$$

$$\therefore BM = \frac{1}{2}BC = 2, \quad CM = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore BE = BM,$$

$$\because F \text{ 是 } CE \text{ 的中点,}$$

$$\therefore FB \text{ 是 } \triangle CEM \text{ 的中位线,}$$

$$\therefore BF = \frac{1}{2}CM = \sqrt{3}, \quad FB \parallel CM,$$

$$\therefore \angle EBF = \angle M = 90^\circ,$$

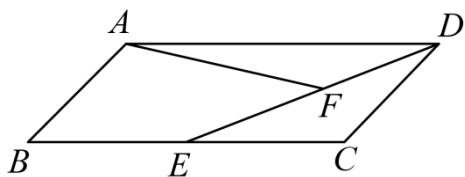
$$\text{Rt}\triangle AFB \text{ 中, 由勾股定理得: } AF = \sqrt{AB^2 + BF^2} = \sqrt{4^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{19},$$

$$\therefore GF = \frac{1}{2}AF = \frac{\sqrt{19}}{2}.$$

$$\text{故答案为: } \frac{\sqrt{19}}{2}.$$

【点睛】此题考查的是菱形的性质，三角形中位线定理，全等三角形的判定与性质，勾股定理，平行线分线段成比例定理，掌握其性质定理是解决此题的关键.

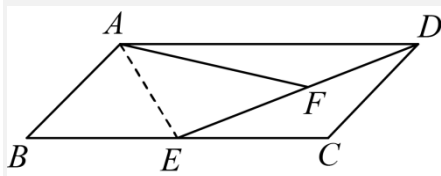
3. 如图， $\square ABCD$ 中， $AB = 2, BC = 4, \angle C = 120^\circ$ ，点 E 是 BC 边的中点，连接 DE ， F 是 ED 的中点，连接 AF ，则 AF 的长为_____.



【答案】 $\sqrt{7}$

【分析】连接 AE ，由题意易得 $\angle AED = 90^\circ, \angle ADE = 30^\circ$ ，然后根据含 30° 度的直角三角形的性质及勾股定理可进行求解.

【详解】解：连接 AE ，如图所示：



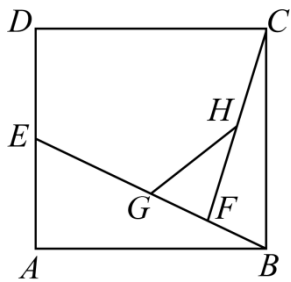
$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore AD = BC = 4, AB = CD = 2, AD \parallel BC, AB \parallel CD,$
 $\because \angle C = 120^\circ,$
 $\therefore \angle B = 60^\circ,$
 $\because$ 点 E 是 BC 边的中点,
 $\therefore BE = EC = 2 = AB = AD,$
 $\therefore \triangle ABE$ 是等边三角形, $\angle DEC = \frac{180^\circ - \angle C}{2} = 30^\circ,$
 $\therefore \angle AEB = 60^\circ, AB = AE = 2,$
 $\therefore \angle AED = 180^\circ - \angle AEB - \angle DEC = 90^\circ, \angle ADE = \angle DEC = 30^\circ,$
 $\therefore$ 在 $\text{Rt}\triangle AED$ 中, $DE = \sqrt{AD^2 - AE^2} = 2\sqrt{3},$
 $\because$ 点 F 是 ED 的中点,
 $\therefore EF = \sqrt{3},$
 $\therefore$ 在 $\text{Rt}\triangle AEF$ 中, $AF = \sqrt{EF^2 + AE^2} = \sqrt{7};$

故答案为 $\sqrt{7}.$

【点睛】 本题主要考查勾股定理、含 30° 直角三角形的性质、等边三角形的性质与判定及平行四边形的性质，熟练掌握勾股定理、含 30° 直角三角形的性质、等边三角形的性质与判定及平行四边形的性质是解题的关键。

4. 如图，已知正方形 $ABCD$ 的边长为 8， E 为 AD 的中点， F 为 BE 上一点，且 $EF = 3FB$ ，若 G, H 分别为 BE, CF 的中点，连接 GH ，则 GH 的长为_____。



【答案】 $\frac{\sqrt{61}}{2}$

【分析】 根据正方形的性质和勾股定理可得 $EF = 3\sqrt{5}$ ，取 EG 的中点 M ，连接 CM ，过点 M 作 $MN \perp CD$ 于点 N ，过点 E 作 $EQ \perp MN$ 于点 Q ，得矩形 $DEQN$ ，然后证明 $\triangle EQM \sim \triangle BAE$ ，得 $\frac{EQ}{AB} = \frac{QM}{AE}$ ，所以 $EQ = 2QM$ ，利用勾股定理求出 $QM = 1$ ，则 $EQ = 2$ ，求出 $CM = \sqrt{61}$ ，再根据三角形中位线定理即可解决问题。

【详解】 解： $\because$ 正方形 $ABCD$ 的边长为 8， E 为 AD 的中点，

$$\therefore AE = DE = \frac{1}{2}AD = 4,$$

$$\therefore BE = \sqrt{AB^2 + AE^2} = \sqrt{8^2 + 4^2} = 4\sqrt{5},$$

$$\because EF = 3FB,$$

$$\therefore BE = EF + BF = 4BF = 4\sqrt{5},$$

$$\therefore BF = \sqrt{5},$$

$$\therefore EF = 3\sqrt{5},$$

如图，取 EG 的中点 M ，连接 CM ，过点 M 作 $MN \perp CD$ 于点 N ，过点 E 作 $EQ \perp MN$ 于点 Q ，

得矩形 $DEQN$ ，

$$\therefore DN = EQ, DE = NQ = 4, EQ \parallel DN$$

$$\therefore \angle QEM = \angle EBA,$$

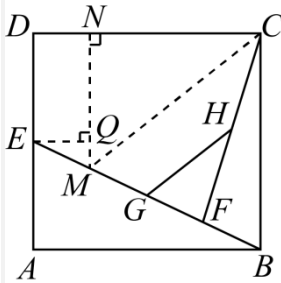
$$\because \angle EQM = \angle A = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle EQM \sim \triangle BAE,$$

$$\therefore \frac{EQ}{AB} = \frac{QM}{AE},$$

$$\therefore \frac{EQ}{QM} = \frac{AB}{AE} = 2,$$

$$\therefore EQ = 2QM,$$



$\because G$ 为 BE 的中点，

$$\therefore EG = BG = \frac{1}{2}BE = 2\sqrt{5},$$

$\because M$ 是 EG 的中点，

$$\therefore EM = \frac{1}{2}EG = \sqrt{5},$$

$$\therefore EM = MG = GF = FB = \sqrt{5},$$

设 $QM = x$ ，则 $EQ = 2x$ ，

$$\because QM^2 + EQ^2 = EM^2,$$

$$\therefore x^2 + (2x)^2 = (\sqrt{5})^2,$$

$$\therefore x = 1,$$

$\therefore QM = 1$ ，则 $EQ = 2$ ，

$\therefore MN = NQ + QM = 4 + 1 = 5$ ，

$\therefore CN = DC - DN = DC - EQ = 8 - 2 = 6$ ，

$\therefore CM = \sqrt{MN^2 + CN^2} = \sqrt{5^2 + 6^2} = \sqrt{61}$ ，

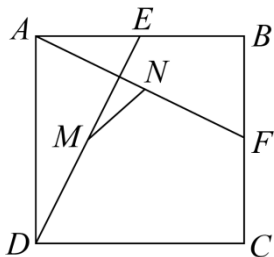
$\therefore G, H$ 分别为 MF, CF 的中点，

$\therefore GH = \frac{1}{2}CM = \frac{\sqrt{61}}{2}$ 。

故答案为： $\frac{\sqrt{61}}{2}$ 。

【点睛】本题考查了正方形的性质，三角形中位线定理，相似三角形的判定与性质，解决本题的关键是得到 $\triangle EQM \sim \triangle BAE$ 。

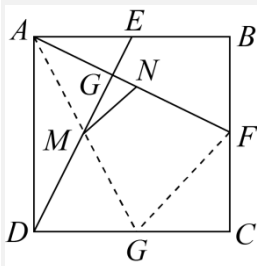
5. 如图，在正方形 $ABCD$ 中， $AB = 4\sqrt{5}$ 。E、F 分别为边 AB 、 BC 的中点，连接 AF 、 DE ，点 N 、 M 分别为 AF 、 DE 的中点，连接 MN ，则 MN 的长度为 _____。



【答案】 $\sqrt{10}$

【分析】连接 AM ，并延长 AM 交 CD 于点 G ，先通过证明 $\triangle AEM \cong \triangle GDM$ 得到 $DM = EM$ ， $DG = AE$ 后，证明 MN 是 $\triangle AGF$ 的中位线，可得 $MN = \frac{1}{2}GF$ ，在 $\text{Rt}\triangle FCG$ 中利用勾股定理求出 GF 的长，从而求出 MN 的长。

【详解】解：连接 AM 并延长 AM 交 CD 于点 G ，连接 GF ，如图所示，



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

$\therefore CD = BC = AB = 4\sqrt{5}$ ， $\angle C = 90^\circ$ ， $AB \parallel CD$ ，

$\therefore \angle AEM = \angle GDM$ ，

$\because E, F$ 分别为边 AB, BC 的中点，

$$\therefore AE = \frac{1}{2} AB = 2\sqrt{5}, \quad CF = \frac{1}{2} BC = 2\sqrt{5}.$$

$\because M$ 为 DE 的中点,

$$\therefore EM = DM,$$

在 $\triangle EAM$ 和 $\triangle DGM$ 中,

$$\begin{cases} \angle AEM = \angle GDM \\ DM = EM \\ \angle AME = \angle GMD \end{cases}.$$

$$\therefore \triangle EAM \cong \triangle DGM (\text{SAS}).$$

$$\therefore AM = MG, \quad DG = AE = 2\sqrt{5}.$$

$\therefore M$ 为 AG 的中点,

$\therefore N$ 为 AF 的中点,

$\therefore MN$ 是 $\triangle AGF$ 的中位线.

$$\therefore MN = \frac{1}{2} GF.$$

在 $\text{Rt}\triangle FCG$ 中,

$$CG = DC - DG = 4\sqrt{5} - 2\sqrt{5} = 2\sqrt{5},$$

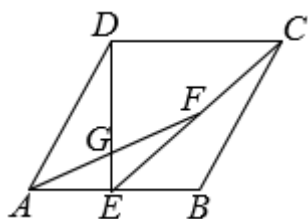
$$\therefore GF = \sqrt{CG^2 + CF^2} = \sqrt{(2\sqrt{5})^2 + (2\sqrt{5})^2} = 2\sqrt{10}.$$

$$\therefore MN = \frac{1}{2} GF = \sqrt{10}.$$

故答案为: $\sqrt{10}$.

【点睛】 本题考查了正方形的性质、全等三角形的判定与性质与勾股定理的应用, 难度较大, 解答本题的关键是添加辅助线把 MN 归纳到三角形中, 然后证明 MN 是三角形的中位线.

6. 如图, 已知菱形 $ABCD$ 的边长为 2, $\angle DAB = 60^\circ$, E 为 AB 的中点, F 为 CE 的中点, AF 与 DE 相交于点 G , 则 GF 的长等于_____.



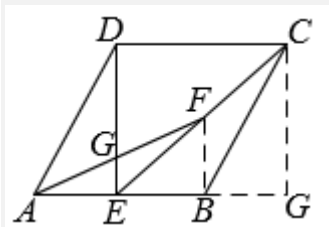
【答案】 $\frac{\sqrt{19}}{4}$

【分析】 连接 FB , 作 $CG \perp AB$ 交 AB 的延长线于点 G . 由菱形的性质得出

$\angle CBG = \angle DAB = 60^\circ$, $AD = AB = BC = CD = 2$, 解直角 $\triangle BGC$ 求出 $CG = \sqrt{3}$, $BG = 1$, 推出 FB 为 $\triangle ECG$ 的中位线, 进而求出 FB , 利用勾股定理求出 AF , 再证明

$\triangle AEG \sim \triangle ABF$, 得出 $AG = GF = \frac{1}{2}AF$.

【详解】解: 如图, 连接 FB , 作 $CG \perp AB$ 交 AB 的延长线于点 G .



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是边长为 2 的菱形,

$\therefore AD \parallel BC$, $AD = AB = BC = CD = 2$,

$\therefore \angle DAB = 60^\circ$,

$\therefore \angle CBG = \angle DAB = 60^\circ$,

$\therefore CG = BC \cdot \sin \angle CBG = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$,

$BG = BC \cdot \cos \angle CBG = 2 \times \frac{1}{2} = 1$,

$\because E$ 为 AB 的中点,

$\therefore AE = EB = 1$,

$\therefore BE = BG$, 即点 B 为线段 EG 的中点,

又 $\because F$ 为 CE 的中点,

$\therefore FB$ 为 $\triangle ECG$ 的中位线,

$\therefore FB \parallel CG$, $FB = \frac{1}{2}CG = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

$\therefore FB \perp AB$, 即 $\triangle ABF$ 是直角三角形,

$\therefore AF = \sqrt{AB^2 + BF^2} = \sqrt{2^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{19}}{2}$.

在 $\triangle AED$ 和 $\triangle BGC$ 中,

$$\begin{cases} AD = BC \\ \angle DAE = \angle CBG, \\ AE = BG \end{cases},$$

$\therefore \triangle AED \cong \triangle BGC$,

$\therefore \angle AED = \angle BGC = 90^\circ$,

$\therefore \angle AEG = \angle ABF = 90^\circ$,

又 $\because \angle GAE = \angle FAB$,

$$\therefore \triangle AEG \sim \triangle ABF,$$

$$\therefore \frac{AG}{AF} = \frac{AE}{AB} = \frac{1}{2},$$

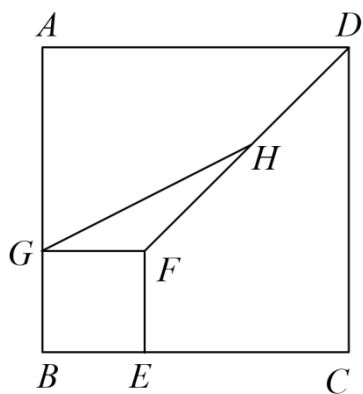
$$\therefore AG = \frac{1}{2}AF = \frac{\sqrt{19}}{4},$$

$$\therefore GF = AF - AG = \frac{\sqrt{19}}{4}.$$

故答案为: $\frac{\sqrt{19}}{4}$.

【点睛】本题考查菱形的性质，平行线的性质，三角函数解直角三角形，三角形中位线的性质，相似三角形的判定与性质等，综合性较强，添加辅助线构造直角 $\triangle BGC$ 是解题的关键.

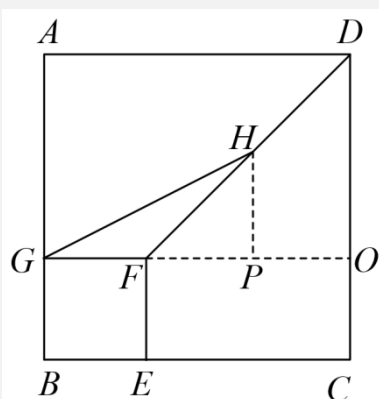
7. 如图，正方形 $ABCD$ 和正方形 $BEFG$ 的边长分别为 6 和 2，点 E, G 分别在边 BC, AB 上， H 为 DF 中点，连接 GH ，则 GH 的长为_____.



【答案】 $2\sqrt{5}$

【分析】延长 GF 交 CD 于点 O ，作 $PH \perp OG$ 于点 P ，根据相似三角形的判定和性质得出 $\triangle HPF \sim \triangle DOF$ ， PH 是 $\triangle OFD$ 的中位线，求得 PH 的长和 PG 的长，在 $Rt\triangle PGH$ 中利用勾股定理求解即可.

【详解】解：如图所示：延长 GF 交 CD 于点 O ，作 $PH \perp OG$ 于点 P .



则 $PH \parallel CD$,

$$\therefore \triangle HPF \sim \triangle DOF,$$

$\because H$ 是 DF 的中点,

$$\therefore \frac{FH}{FD} = \frac{PH}{OD} = \frac{1}{2},$$

$\therefore PH$ 是 $\triangle OFD$ 的中位线,

$$\therefore PH = \frac{1}{2} OD = \frac{1}{2} \times (6-2) = 2,$$

$\because$ 在直角 $\triangle DFO$ 中, $\angle ODF = 45^\circ$,

$\therefore \triangle OFD$ 是等腰直角三角形, 即 $OD = OF = 4$,

同理 $\triangle PHF$ 中, $PF = PH = 2$,

$$\therefore PG = PF + FG = 2 + 2 = 4.$$

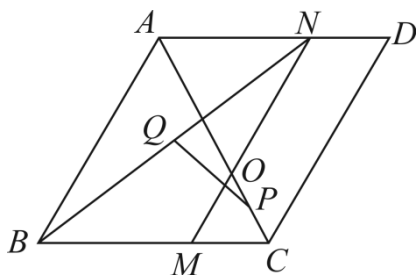
$\therefore$ 在 $Rt\triangle PHG$ 中,

$$HG = \sqrt{PH^2 + PG^2} = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5},$$

故答案为: $2\sqrt{5}$.

【点睛】题目主要考查正方形、相似三角形的判定和性质、三角形中位线、等腰三角形的性质, 勾股定理等, 理解题意, 作出相应辅助线是解题关键.

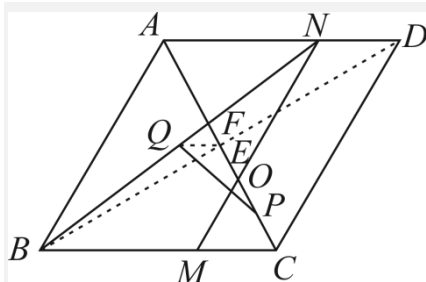
8. 如图, 四边形 $ABCD$ 为菱形, $AB=3$, $\angle ABC=60^\circ$, 点 M 为 BC 边上一点且 $BM=2CM$, 过 M 作 $MN \parallel AB$ 交 AC , AD 于点 O , N , 连接 BN . 若点 P , Q 分别为 OC , BN 的中点, 则 PQ 的长度为_____.



【答案】 $\frac{\sqrt{7}}{2}$

【分析】连接 BD 交 AC 于 E , 连接 QE , 过 Q 作 $QF \perp AC$ 于 F , 证 $\triangle ABC$ 是等边三角形, 得 $\angle ACB=60^\circ$, $AC=AB=3$, 再证 QE 是 $\triangle BDN$ 的中位线, 得 $QE=\frac{1}{2} DN=\frac{1}{2}$, $QE \parallel DN \parallel BC$, 则 $\angle AEQ=\angle ACB=60^\circ$, 可证得 $\triangle CMO$ 是等边三角形, 得 $OC=CM=1$, 最后由勾股定理求解即可.

【详解】解: 连接 BD 交 AC 于 E , 连接 QE , 过 Q 作 $QF \perp AC$ 于 F , 如图所示:



∵ 四边形 $ABCD$ 是菱形, $AB=3$,

∴ $BC=CD=AD=AB=3$, $BE=DE$, $AE=CE$, $AD \parallel BC$, $AB \parallel CD$,

∵ $\angle ABC=60^\circ$,

∴ $\triangle ABC$ 是等边三角形,

∴ $\angle ACB=60^\circ$, $AC=AB=3$,

∴ $AE=CE=\frac{1}{2}AC=\frac{3}{2}$,

∵ $BM=2CM$, $BM+CM=BC=3$,

∴ $CM=1$,

∵ $MN \parallel AB \parallel CD$, $AD \parallel BC$,

∴ 四边形 $MNDC$ 是平行四边形,

∴ $DN=CM=1$,

∵ Q 是 BN 的中点, $BE=DE$,

∴ QE 是 $\triangle BDN$ 的中位线,

∴ $QE=\frac{1}{2}DN=\frac{1}{2}$, $QE \parallel DN \parallel BC$,

∴ $\angle AEQ=\angle ACB=60^\circ$,

∵ $QF \perp AC$,

∴ $\angle EQF=90^\circ - 60^\circ=30^\circ$,

∴ $EF=\frac{1}{2}QE=\frac{1}{4}$,

∴ $QF=\sqrt{QE^2-EF^2}=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{4}$,

∵ $MN \parallel AB$,

∴ $\angle CMN=\angle ABC=60^\circ$,

∵ $\angle ACB=60^\circ$,

∴ $\triangle CMO$ 是等边三角形,

∴ $OC=CM=1$,

∵ P 是 OC 的中点,

$$\therefore PC = \frac{1}{2} OC = \frac{1}{2},$$

$$\therefore PE = AC - AE - CP = 3 - \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1,$$

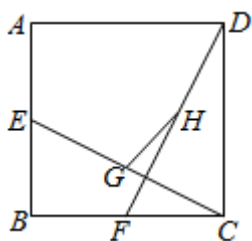
$$\therefore PF = PE + EF = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4},$$

$$\text{在 } Rt\triangle PQF \text{ 中, 由勾股定理得: } PQ = \sqrt{PF^2 + QF^2} = \sqrt{\left(\frac{5}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{7}}{2},$$

$$\text{故答案为: } \frac{\sqrt{7}}{2}.$$

【点睛】本题考查了菱形的性质、等边三角形的判定与性质、平行四边形的判定与性质、三角形中位线定理、勾股定理等知识；本题综合性强，熟练掌握菱形的性质和三角形中位线定理，作出辅助线构造直角三角形是解题的关键

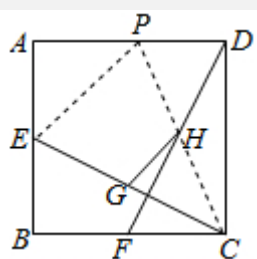
9. 如图，在边长为 4 的正方形 $ABCD$ 中，点 E, F 分别是边 AB, BC 的中点，连接 EC, FD ，点 G, H 分别是 EC, FD 的中点，连接 GH ，则 GH 的长度为 ____.



【答案】 $\sqrt{2}$

【分析】连接 CH 并延长交 AD 于 P ，连接 PE ，根据正方形的性质得到 $\angle A = 90^\circ$ ， $AD \parallel BC$ ， $AB = AD = BC = 4$ ，根据全等三角形的性质得到 $PD = CF = 2$ ，根据勾股定理和三角形的中位线定理即可得到结论.

【详解】解：连接 CH 并延长交 AD 于 P ，连接 PE ，



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

$\therefore \angle A = 90^\circ$ ， $AD \parallel BC$ ， $AB = AD = BC = 4$ ，

$\because E, F$ 分别是边 AB, BC 的中点，

$\therefore AE = CF = \frac{1}{2} \times 4 = 2$ ，

$\because AD \parallel BC$ ，

$\therefore \angle DPH = \angle FCH$ ，

$\because H$ 是 DF 的中点,

$\therefore DH=FH$,

在 $\triangle PDH$ 和 $\triangle CFH$ 中

$$\begin{cases} \angle DPH = \angle FCH \\ \angle PHD = \angle CHF, \\ DH = FH \end{cases}$$

$\therefore \triangle PDH \cong \triangle CFH$ (AAS),

$\therefore PD=CF=2$,

$\therefore AP=AD-PD=2$,

$\therefore PE=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$,

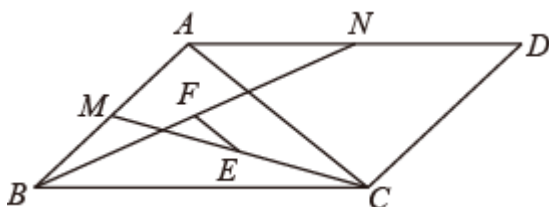
$\because$ 点 G, H 分别是 EC, FD 的中点,

$\therefore GH=\frac{1}{2}EP=\sqrt{2}$;

故答案为: $\sqrt{2}$.

【点睛】本题考查了勾股定理, 正方形的性质, 全等三角形的判定和性质, 以及三角形的中位线等知识, 正确的构造全等三角形是解题的关键.

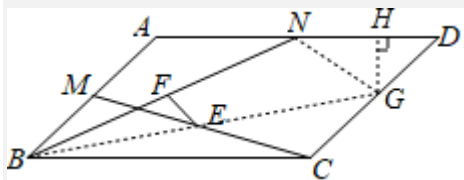
10. 如图, 在平行四边形 $ABCD$ 中, $\angle ABC=45^\circ$, $AB=6\sqrt{2}$, $CB=14$, 点 M, N 分别是边 AB, AD 的中点, 连接 CM, BN , 并取 CM, BN 的中点, 分别记为点 E, F , 连接 EF , 则 EF 的长为_____.



【答案】 $\frac{5}{2}$.

【分析】连接 BE 交 CD 于点 G , 连接 GN , 过点 G 作 $GH \perp DN$ 于点 H , 证明 $\triangle MEB \cong \triangle CEG$ 可得 $BE=GE$, $BM=GC=3\sqrt{2}$, 所以 $DG=CD-GC=3\sqrt{2}$, 根据勾股定理可得 GN 的长, 再根据三角形中位线定理即可求出结果.

【详解】解: 如图, 连接 BE 交 CD 于点 G , 连接 GN , 过点 G 作 $GH \perp DN$ 于点 H ,



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$$\therefore AD=CB=14, CD=AB=6\sqrt{2},$$

$\because$ 点 M, N 分别是边 AB, AD 的中点,

$$\therefore AN=DN=\frac{1}{2}AD=7, BM=\frac{1}{2}AB=3\sqrt{2},$$

$\because AB\parallel CD,$

$$\therefore \angle BME=\angle GCE, \angle MBE=\angle CGE,$$

$\because$ 点 E 是 CM 的中点,

$$\therefore ME=CE,$$

在 $\triangle MEB$ 和 $\triangle CEG$ 中,

$$\begin{cases} \angle BME = \angle GCE \\ \angle MBE = \angle CGE, \\ ME = CE \end{cases}$$

$$\therefore \triangle MEB \cong \triangle CEG \text{ (AAS)},$$

$$\therefore BE=GE, BM=GC=3\sqrt{2},$$

$$\therefore DG=CD-GC=3\sqrt{2},$$

$$\because \angle D=\angle ABC=45^\circ, GH\perp DN,$$

$$\therefore DH=GH=\frac{\sqrt{2}}{2}DG=3,$$

$$\therefore NH=DN-DH=7-3=4,$$

$$\therefore GN=\sqrt{NH^2+GH^2}=5,$$

$$\because BF=FN, BE=EG,$$

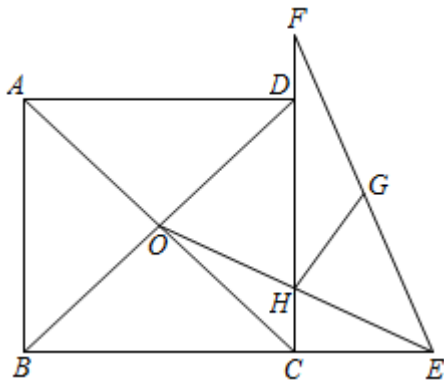
$\therefore EF$ 是 $\triangle BGN$ 的中位线,

$$\therefore EF=\frac{1}{2}GN=\frac{5}{2}.$$

故答案为: $\frac{5}{2}$.

【点睛】 本题考查了平行四边形的性质, 全等三角形的判定与性质, 三角形中位线定理, 解决本题的关键是掌握平行四边形的性质.

11. 如图, 正方形 $ABCD$ 的边长为 4, 对角线 AC, BD 相交于点 O , 点 E, F 分别在 BC, CD 的延长线上, 且 $CE=2, DF=1$, G 为 EF 的中点, 连接 OE , 交 CD 于点 H , 连接 GH , 则 GH 的长为_____.



【答案】 $\frac{\sqrt{13}}{2}$

【分析】先作辅助线构造直角三角形，求出 CH 和 MG 的长，再求出 MH 的长，最后利用勾股定理求解即可．

【详解】解：如图，作 $OK \perp BC$ ，垂足为点 K ，

$\because$ 正方形边长为 4，

$\therefore OK = 2, KC = 2$ ，

$\therefore KC = CE$ ，

$\therefore CH$ 是 $\triangle OKE$ 的中位线

$\therefore CH = \frac{1}{2}OK = 1$ ，

作 $GM \perp CD$ ，垂足为点 M ，

$\because G$ 点为 EF 中点，

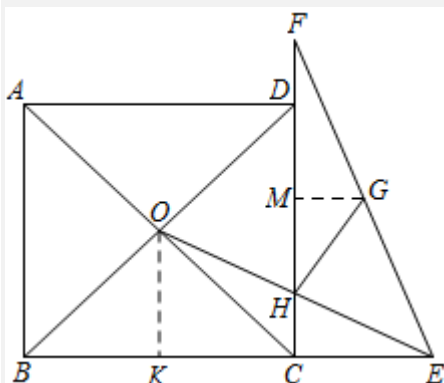
$\therefore GM$ 是 $\triangle FCE$ 的中位线，

$\therefore GM = \frac{1}{2}CE = 1, MC = \frac{1}{2}FC = \frac{1}{2}(CD + DF) = \frac{1}{2} \times (4 + 1) = \frac{5}{2}$ ，

$\therefore MH = MC - HC = \frac{5}{2} - 1 = \frac{3}{2}$ ，

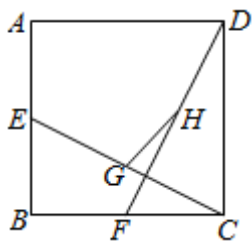
在 $Rt\triangle MHG$ 中， $GH = \sqrt{MH^2 + MG^2} = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 1^2} = \frac{\sqrt{13}}{2}$ ，

故答案为： $\frac{\sqrt{13}}{2}$ ．



【点睛】本题综合考查了正方形的性质、三角形中位线定理、勾股定理等内容，解决本题的关键是能作出辅助线构造直角三角形，得到三角形的中位线，利用三角形中位线定理求出相应线段的长，利用勾股定理理解直角三角形等.

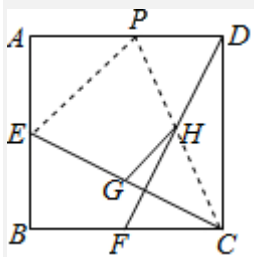
12. 如图，在边长为 $4\sqrt{2}$ 的正方形 $ABCD$ 中，点 E, F 分别是边 AB, BC 的中点，连接 EC, DF ，点 G, H 分别是 EC, DF 的中点，连接 GH ，则 GH 的长度为__.



【答案】2

【分析】连接 CH 并延长交 AD 于 P ，连接 PE ，根据正方形的性质得到 $\angle A = 90^\circ$ ， $AD \parallel BC$ ， $AB = AD = BC = 4\sqrt{2}$ ，根据全等三角形的性质得到 $PD = CF = 2\sqrt{2}$ ，根据勾股定理和三角形的中位线定理即可得到结论.

【详解】解：连接 CH 并延长交 AD 于 P ，连接 PE ，



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

$\therefore \angle A = 90^\circ$ ， $AD \parallel BC$ ， $AB = AD = BC = 4\sqrt{2}$ ，

$\because E, F$ 分别是边 AB, BC 的中点，

$\therefore AE = CF = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$ ，

$\because AD \parallel BC$ ，

$\therefore \angle DPH = \angle FCH$ ，

在 $\triangle PDH$ 与 $\triangle CFH$ 中，

$$\begin{cases} \angle DPH = \angle FCH \\ \angle DHP = \angle FHC, \\ DH = FH \end{cases}$$

$\therefore \triangle PDH \cong \triangle CFH$ (AAS)，

$\therefore PD = CF = 2\sqrt{2}$ ，

$\therefore AP = AD - PD = 2\sqrt{2}$ ，

$$\therefore PE = \sqrt{AP^2 + AE^2} = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2})^2} = 4,$$

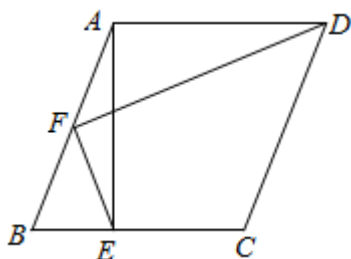
$\because$ 点 G, H 分别是 EC, PC 的中点,

$$\therefore GH = \frac{1}{2} EP = 2.$$

故答案为: 2.

【点睛】本题考查了正方形的性质, 全等三角形的判定和性质, 解题的关键是掌握正方形的性质, 全等三角形的判定和性质.

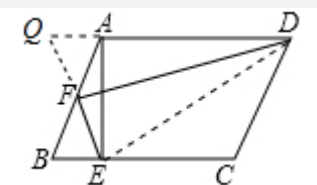
13. 如图, 在平行四边形 $ABCD$ 中, $AD = 2$, $AB = \sqrt{6}$, $\angle B$ 是锐角, $AE \perp BC$ 于点 E , F 是 AB 的中点, 连结 DF, EF . 若 $\angle EFD = 90^\circ$, 则 AE 的长为_____.



【答案】 $\sqrt{5}$

【分析】如图, 延长 EF 交 DA 的延长线于 Q , 连接 DE , 设 $BE = x$. 首先证明 $DQ = DE = x + 2$, 利用勾股定理构建方程即可解决问题.

【详解】解: 如图, 延长 EF 交 DA 的延长线于 Q , 连接 DE , 设 $BE = x$,



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$\therefore DQ \parallel BC$,

$\therefore \angle Q = \angle BEF$,

$\because AF = FB$, $\angle AFQ = \angle BFE$,

$\therefore \triangle QFA \cong \triangle EFB$ (AAS),

$\therefore AQ = BE = x$, $QF = EF$,

$\because \angle EFD = 90^\circ$,

$\therefore DF \perp QE$,

$\therefore DQ = DE = x + 2$,

$\because AE \perp BC$, $BC \parallel AD$,

$\therefore AE \perp AD$,

$$\therefore \angle AEB = \angle EAD = 90^\circ,$$

$$\therefore AE^2 = DE^2 - AD^2 = AB^2 - BE^2,$$

$$\therefore (x+2)^2 - 4 = 6 - x^2,$$

$$\text{整理得: } 2x^2 + 4x - 6 = 0,$$

$$\text{解得 } x = 1 \text{ 或 } -3 \text{ (舍弃),}$$

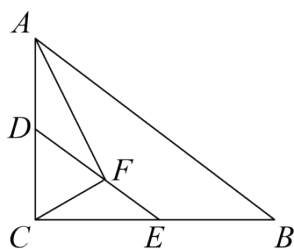
$$\therefore BE = 1,$$

$$\therefore AE = \sqrt{AB^2 - BE^2} = \sqrt{5},$$

故答案为: $\sqrt{5}$.

【点睛】本题考查平行四边形的性质，线段的垂直平分线的性质，勾股定理，全等三角形的判定和性质等知识，解题的关键是学会添加常用辅助线，构造全等三角形解决问题.

14. 如图，在 $Rt\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $AC = 3$ ， $BC = 4$ ，点 D ， E 分别是边 CA ， CB 的中点， $\angle CAB$ 的平分线与 DE 交于点 F ，则 CF 的长为_____.



【答案】 $\frac{3\sqrt{5}}{5}$

【分析】如图（见解析），过点 F 作 $FG \perp BC$ 于点 G ，先根据角平分线的定义、中位线定理、等腰三角形的性质得出 $DF = AD = \frac{3}{2}$ ， $CE = \frac{1}{2}BC = 2$ ， $DE \parallel AB$ ， $DE = \frac{1}{2}AB = \frac{5}{2}$ ，从而可得 EF 的长，再在 $Rt\triangle EFG$ 中，解直角三角形可得 EG 、 FG 的长，从而可得 CG 的长，然后在 $Rt\triangle CFG$ 中，利用勾股定理即可得.

【详解】如图，过点 F 作 $FG \perp BC$ 于点 G

$$\because \angle C = 90^\circ, \quad AC = 3, \quad BC = 4$$

$$\therefore AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = 5$$

$$\text{在 } Rt\triangle ABC \text{ 中, } \sin B = \frac{AC}{AB} = \frac{3}{5}, \cos B = \frac{BC}{AB} = \frac{4}{5}$$

$\because$ 点 D ， E 分别是边 CA ， CB 的中点

$$\therefore AD = \frac{1}{2}AC = \frac{3}{2}, \quad CE = \frac{1}{2}BC = 2, \quad DE \text{ 是 } Rt\triangle ABC \text{ 的中位线}$$

$$\therefore DE \parallel AB, \quad DE = \frac{1}{2}AB = \frac{5}{2}$$

$$\therefore \angle BAF = \angle AFD, \quad \angle FEG = \angle B$$

$\therefore AF$ 平分 $\angle CAB$

$$\therefore \angle BAF = \angle DAF$$

$$\therefore \angle AFD = \angle DAF$$

$$\therefore DF = AD = \frac{3}{2}$$

$$\therefore EF = DE - DF = \frac{5}{2} - \frac{3}{2} = 1$$

$$\text{在 } Rt\triangle EFG \text{ 中, } \sin \angle FEG = \sin \angle B = \frac{3}{5}, \quad \cos \angle FEG = \cos \angle B = \frac{4}{5}$$

$$\therefore \frac{FG}{EF} = \frac{3}{5}, \quad \frac{EG}{EF} = \frac{4}{5}$$

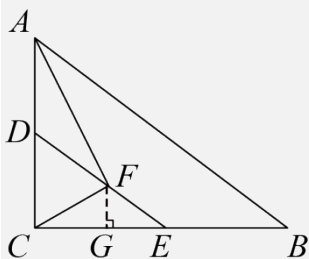
$$\text{即 } \frac{FG}{1} = \frac{3}{5}, \quad \frac{EG}{1} = \frac{4}{5}$$

$$\text{解得 } FG = \frac{3}{5}, \quad EG = \frac{4}{5}$$

$$\therefore CG = CE - EG = 2 - \frac{4}{5} = \frac{6}{5}$$

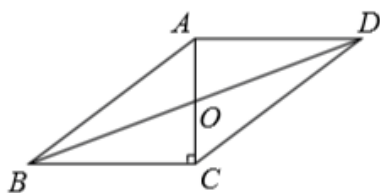
$$\text{在 } Rt\triangle CFG \text{ 中, 由勾股定理得: } CF = \sqrt{FG^2 + CG^2} = \sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{6}{5}\right)^2} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$$

故答案为: $\frac{3\sqrt{5}}{5}$.



【点睛】本题考查了中位线定理、等腰三角形的性质、解直角三角形等知识点，通过作辅助线，构造直角三角形，利用到三角函数是解题关键。

15. 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，对角线 AC ， BD 相交于点 O ， $AB=10$ ， $AD=8$ ， $AC \perp BC$ ，对角线 BD 的长是_____.



【答案】 $2\sqrt{73}$

【分析】已知 $ABCD$ 是平行四边形，得到 $BC=AD$ ， $OA=OC$ ，利用勾股定理即可求出

BD.

【详解】 $\because ABCD$ 是平行四边形

$$\therefore BC=AD=8$$

$$\therefore AC=6$$

$$\therefore OA=OC=3$$

$$\therefore OB=\sqrt{OC^2+BC^2}=\sqrt{3^2+8^2}=\sqrt{73}$$

$$\therefore BD=2OB=2\sqrt{73}$$

故答案为： $2\sqrt{73}$

【点睛】 本题考查了平行四边形的性质， 以及利用勾股定理求直角三角形.