

第3讲圆的基础定理

一、垂径定理

垂径定理

垂径定理：垂直于弦的直径_____，并且平分_____。

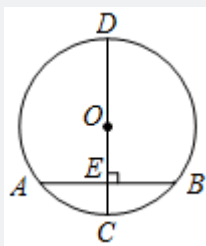
推论：平分弦（不是直径）的直径_____，并且平分_____。

教法备注

1.垂径定理：垂直于弦的直径平分弦，并且平分弦所对的两条弧。

（垂径定理由圆的对称性得证）

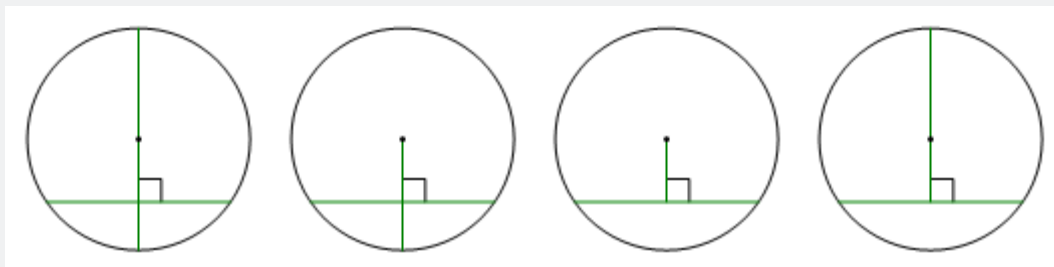
如图， CD 是 $\odot O$ 的直径， AB 为弦， $CD \perp AB$ ，垂足为 E ，则 $AE = BE$ ， $\widehat{AD} = \widehat{BD}$ ， $\widehat{AC} = \widehat{BC}$ 。



【注意】

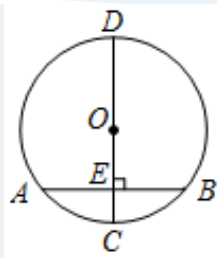
1. 垂径定理平分的弧既包括劣弧，也包括优弧。
2. 这里的垂径可以是直径、半径、弦心距或者过圆心的直线或线段，其本质是过圆心。

常见的垂径定理模型：



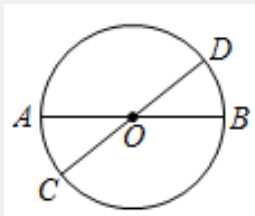
2.垂径定理推论：平分弦（不是直径）的直径垂直于弦，并且平分弦所对的两条弧。

如图， $\odot O$ 的直径 CD 经过弦 AB （非直径）的中点 E 点，则 $CD \perp AB$ ， $\widehat{AD} = \widehat{BD}$ ， $\widehat{AC} = \widehat{BC}$ 。



【注意】

平分弦中的弦的约束条件“不是直径”，因为圆中任意两条直径互相平分，但不一定垂直。



知二推三：

若一条直线具备以下五点中的任意两点：

① 过圆心；② 垂直于弦；③ 平分弦（不是直径）；

④ 平分弦所对的优弧；⑤ 平分弦所对的劣弧，

则必然具备其余三条，简称“知二推三”。

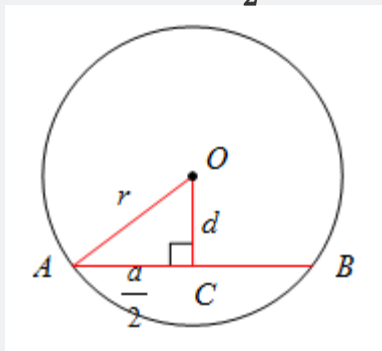
注：知二推三可以作为真命题应用于不写过程的客观题，但不能直接应用于解答题。

3.解题技巧：

（1）垂径定理反映的是经过圆心的直线和圆中弦的关系，“要求弦长，先求弦长的一半”，注意对由半径、半弦长和弦心距构成的直角三角形模型的理解和应用。

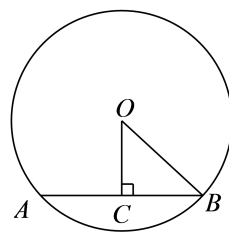
（2）在同圆中，利用垂径定理的知识，若已知弦长相等，则弦心距也相等，反之也成立。

（3）应用垂径定理与推论进行计算时，往往要构造如右图所示的直角三角形，根据垂径定理与勾股定理有： $r^2 = d^2 + (\frac{a}{2})^2$ ，根据此公式，在 a, r, d 三个量中知道任何两个量就可以求出第三个量。



（4）当题目给出的已知条件不满足“已知两条边的长度，求第三条边”时，可以通过设未知数，列勾股定理方程进行解题。

1. 如图，在半径为5cm的 $\odot O$ 中，弦 $AB = 6\text{cm}$ ， $OC \perp AB$ 于点 C ，则 $OC = ()$.

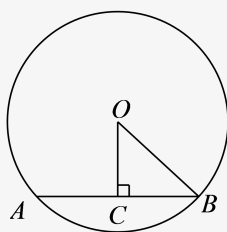


- A. 3cm B. 4cm C. 5cm D. 6cm

【答案】 B

【解析】 $\because AB = 6\text{cm}$ ， $OC \perp AB$
于点 C ，

$\therefore$



$$AC = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2} \times 6 = 3\text{cm} ,$$

$\because \odot O$ 的半径为5cm，

$$\therefore OC = \sqrt{OB^2 - AC^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4\text{cm} .$$

【标注】 【能力】 运算能力

【能力】 推理论证能力

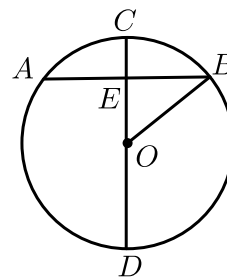
【知识点】 垂径定理以及应用

【知识点】 勾股定理与实际应用

【重点强调】

2016~2017学年天津河东区初三下学期期末第5题3分

2. 如图， $\odot O$ 的直径 CD 垂直弦 AB 于点 E ，且 $CE = 2$ ， $DE = 8$ ，则 AB 的长为 $()$.



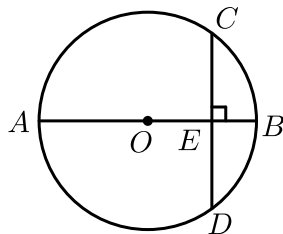
- A. 2 B. 4 C. 6 D. 8

【答案】D

【解析】根据圆的性质可知，圆的半径 $r = \frac{1}{2}(CE + DE) = \frac{1}{2} \times (2 + 8) = 5$ ，
在 $\text{Rt}\triangle BOE$ 中， $AB = 2BE = 2\sqrt{OB^2 - OE^2}$ ，
其中 $OE = OC - CE = 5 - 2 = 3$ ，所以 $AB = 2\sqrt{5^2 - 3^2} = 8$ 。

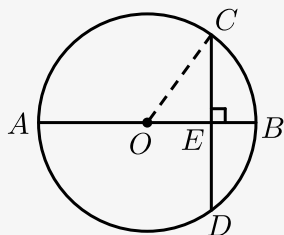
【标注】【知识点】垂径定理以及应用

3. 如图， AB 为 $\odot O$ 的直径，弦 $CD \perp AB$ 于点 E ，已知 $CD = 6$ ， $EB = 1$ ，则 $\odot O$ 的半径为 _____。



【答案】5

【解析】连接 OC ，



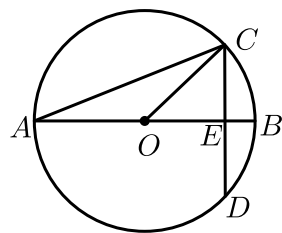
$\because AB$ 为 $\odot O$ 的直径， $AB \perp CD$ ，
 $\therefore CE = DE = \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2} \times 6 = 3$ ，
设 $\odot O$ 的半径为 x ，
则 $OC = x$ ， $OE = OB - BE = x - 1$ ，
在 $\text{Rt}\triangle OCE$ 中， $OC^2 = OE^2 + CE^2$ ，
 $\therefore x^2 = 3^2 + (x - 1)^2$ ，
解得： $x = 5$ ，
 $\therefore \odot O$ 的半径为5。

【标注】【知识点】垂径定理以及应用

【重点强调】

2017~2018学年12月天津和平区天津市二十中学初三上学期月考第15题3分

4. 如图， $\odot O$ 的直径 AB 垂直于弦 CD ，垂足为 E ， $\angle A = 15^\circ$ ，半径为2，则弦 CD 的长为（ ）。



- A. 2 B. -1 C. $\sqrt{2}$ D. 4

【答案】 A

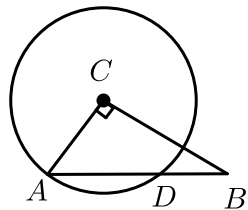
【解析】 $\because \odot O$ 的直径 AB 垂直于弦 CD ，
 $\therefore CE = DE$ ， $\angle CEO = 90^\circ$ ，
 $\because \angle A = 15^\circ$ ，
 $\therefore \angle COE = 30^\circ$ ，
 $\because OC = 2$ ，
 $\therefore CE = \frac{1}{2}OC = 1$ ，
 $\therefore CD = 2CE = 2$ 。

【标注】【知识点】垂径定理以及应用

【重点强调】

2018年天津宁河县初三一模第10题3分

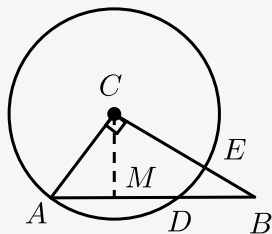
5. 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $AC = 3$ ， $BC = 4$ ，以点 C 为圆心， CA 为半径的圆与 AB 交于点 D ，则 AD 的长为（ ）。



- A. $\frac{9}{5}$ B. $\frac{21}{5}$ C. $\frac{18}{5}$ D. $\frac{5}{2}$

【答案】 C

【解析】 $\because$ 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $AC = 3$ ， $BC = 4$ ，
 $\therefore AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ ，
 过 C 作 $CM \perp AB$ ，交 AB 于点 M ，如图所示，



$$\therefore CM \perp AB,$$

$\therefore M$ 为 AD 的中点,

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC = \frac{1}{2} AB \cdot CM, \text{ 且 } AC = 3, BC = 4, AB = 5,$$

$$\therefore CM = \frac{12}{5},$$

在 $\text{Rt}\triangle ACM$ 中, 根据勾股定理得: $AC^2 = AM^2 + CM^2$, 即 $9 = AM^2 + \left(\frac{12}{5}\right)^2$,

$$\text{解得: } AM = \frac{9}{5},$$

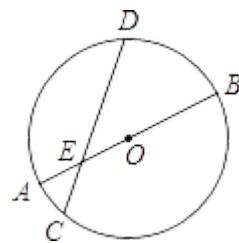
$$\therefore AD = 2AM = \frac{18}{5}.$$

【标注】【知识点】垂径定理以及应用

【重点强调】

2015~2016 学年天津红桥区初三上学期期中第 10 题 3 分

6. 如图, $\odot O$ 的直径 AB 和弦 CD 相交于 E , 若 $AE = 2\text{cm}$, $BE = 6\text{cm}$, $\angle CEA = 30^\circ$, 求 CD 的长.



【答案】 $2\sqrt{15}$.

【解析】 过 O 作 $OF \perp CD$ 于点 F

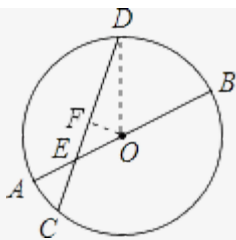
$$\therefore \angle CEA = 30^\circ$$

$$\therefore \angle OEF = 30^\circ$$

$$\therefore OF = \frac{1}{2} OE = 1$$

$$\therefore CF^2 = OC^2 - OF^2, CF = \sqrt{15}$$

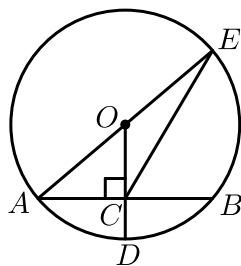
$$\therefore CD = 2CF = 2\sqrt{15}.$$



【标注】【知识点】垂径定理的推论以及应用

【知识点】垂径定理以及应用

7. 如图， $\odot O$ 的半径 $OD \perp$ 弦 AB 于点 C ，连接 AO 并延长交 $\odot O$ 于点 E ，连接 EC 。若 $AB = 8$ ， $CD = 2$ ，求 EC 的长。



【答案】 $2\sqrt{13}$ 。

【解析】连接 BE ，如图，

$$\because OD \perp AB,$$

$$\therefore AC = BC = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2} \times 8 = 4,$$

设 $AO = x$ ，则

$$OC = OD - CD = x - 2,$$

$$\text{在Rt}\triangle ACO\text{中}, \because AO^2 = AC^2 + OC^2,$$

$$\therefore x^2 = 4^2 + (x - 2)^2, \text{解得 } x = 5,$$

$$\therefore AE = 10, OC = 3,$$

$\because AE$ 是直径，

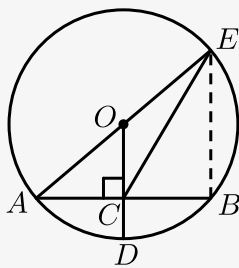
$$\therefore \angle ABE = 90^\circ,$$

$$\because OA = OE, AC = BC,$$

$\therefore OC$ 是 $\triangle ABE$ 的中位线，

$$\therefore BE = 2OC = 6,$$

$$\text{在Rt}\triangle CBE\text{中}, CE = \sqrt{CB^2 + BE^2} = \sqrt{4^2 + 6^2} = 2\sqrt{13}.$$



【标注】【知识点】垂径定理以及应用

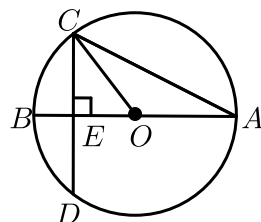
【知识点】圆周角定理以及应用

【重点强调】

2016~2017学年天津河北区天津市第二中学初三上学期期末第21题

过关斩将

8. 如图， $\odot O$ 的直径 AB 垂直于弦 CD ，垂足为 E ， $\angle A = 22.5^\circ$ ， $OC = 4$ ，则 CD 的长为（ ）。



A. $2\sqrt{2}$

B. 4

C. $4\sqrt{2}$

D. 8

【答案】 C

【解析】 $\because \angle A = 22.5^\circ$ ，

$\therefore \angle BOC = 2\angle A = 45^\circ$ ，

$\because \odot O$ 的直径 AB 垂直于弦 CD ，

$\therefore CE = DE$ ， $\triangle OCE$ 为等腰直角三角形，

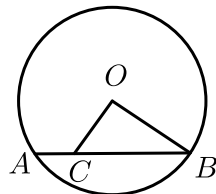
$\therefore CE = \frac{\sqrt{2}}{2}OC = 2\sqrt{2}$ ，

$\therefore CD = 2CE = 4\sqrt{2}$ 。

故选C。

【标注】 【知识点】 垂径定理以及应用

9. 如图， $\odot O$ 的半径为2，弦 $AB = 2\sqrt{3}$ ，点 C 在弦 AB 上， $AC = \frac{1}{4}AB$ ，则 OC 的长为（ ）。



A. $\sqrt{2}$

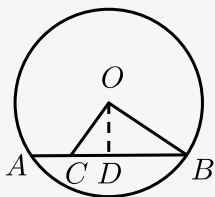
B. $\sqrt{3}$

C. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

D. $\frac{\sqrt{7}}{2}$

【答案】 D

【解析】 如图，过点 O 作 $OD \perp AB$ 于点 D ，



则 $AD = BD$.

$$\therefore AB = 2\sqrt{3} ,$$

$$\therefore AD = BD = \sqrt{3} , AC = \frac{\sqrt{3}}{2} .$$

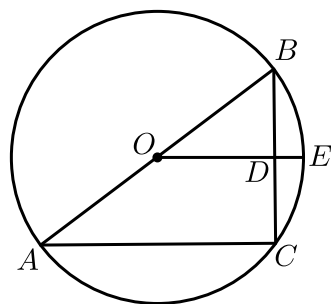
又 $\because \odot O$ 的半径为 2 , 即 $OB = 2$,

$$\therefore OD = \sqrt{OB^2 - BD^2} = 1 .$$

$$\therefore OC = \sqrt{CD^2 + OD^2} = \frac{\sqrt{7}}{2} .$$

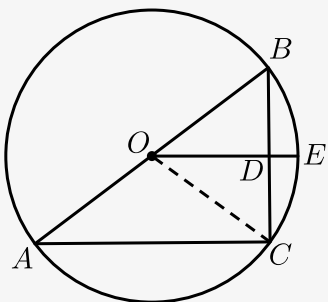
【标注】【知识点】垂径定理以及应用

10. 如图, AB 是 $\odot O$ 的直径, BC 是弦, 点 E 是 $\widehat{BC}$ 的中点, OE 交 BC 于点 D . 连接 AC , 若 $BC = 6$, $DE = 1$, 则 AC 的长为 _____ .



【答案】 8

【解析】 连接 OC , 如图所示.



$\because$ 点 E 是 $\widehat{BC}$ 的中点,

$$\therefore \angle BOE = \angle COE .$$

$$\because OB = OC ,$$

$$\therefore OD \perp BC , BD = DC .$$

$$\begin{aligned}
 &\therefore BC = 6, \\
 &\therefore BD = 3. \\
 &\text{设 } \odot O \text{ 的半径为 } r, \text{ 则 } OB = OE = r. \\
 &\therefore DE = 1, \\
 &\therefore OD = r - 1. \\
 &\therefore OD \perp BC \text{ 即 } \angle BDO = 90^\circ, \\
 &\therefore OB^2 = BD^2 + OD^2. \\
 &\therefore OB = r, OD = r - 1, BD = 3, \\
 &\therefore r^2 = 3^2 + (r - 1)^2. \\
 &\text{解得: } r = 5. \\
 &\therefore OD = 4. \\
 &\therefore AO = BO, BD = CD, \\
 &\therefore OD = \frac{1}{2} AC. \\
 &\therefore AC = 8.
 \end{aligned}$$

【标注】【知识点】垂径定理以及应用

【重点强调】

2019~2020学年12月天津河东区天津市第一零二中学初三上学期月考第14题3分

二、弧、弦、圆心角的关系定理

弧、弦、圆心角的关系定理

在同圆或等圆中，相等圆心角所对的_____，所对的_____.

在同圆或等圆中，如果两条弧相等，那么它们所对的_____，所对的_____.

在同圆或等圆中，如果两条弦相等，那么它们所对的_____，所对的_____.

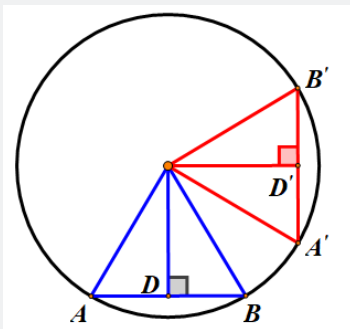
教法备注

1.弧、弦、圆心角关系定理：

在同圆或等圆中，相等的圆心角所对的弧相等，所对的弦也相等.

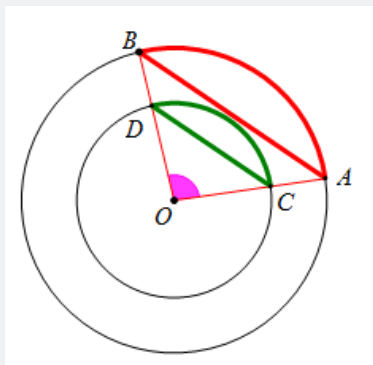
在同圆或等圆中，如果两条弧相等，那么它们所对的圆心角相等，所对的弦相等.

在同圆或等圆中，如果两条弦相等，那么它们所对的圆心角相等，所对的优弧和劣弧分别相等。



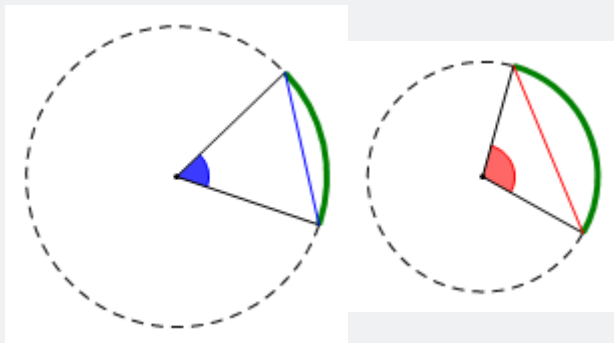
注意：

(1) 不是同圆或等圆时，圆心角的度数相等，那么所对的弧和弦不相等。



(2) 不是同圆或等圆时，两条弧的长度相等，那么所对的弦长和圆心角不相等。

(如图，绿色部分的弧长相等，但在不同大小的两个圆里，很显然圆心角和弦长大小不相等。)



(3) 不是同圆或等圆时，两条弦的长度相等，那么所对的弧长和圆心角不相等。

(4) 在同圆或等圆中，圆心角、弦、弧三个条件知一推二。即：

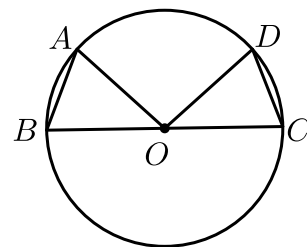
在同圆或等圆中，知道圆心角相等，则可以等到相等圆心角所对的弧、弦都相等；

知道弧长相等，则弧所对的圆心角、弦都相等；

知道弦长相等，则弦所对的圆心角及圆心角所对的弧都相等。

典题精炼

11. 如图，已知在 $\odot O$ 中， BC 是直径， $\widehat{AB} = \widehat{DC}$ ， $\angle AOD = 100^\circ$ ，则 $\angle ABC$ 等于()。



A. 50°

B. 60°

C. 40°

D. 70°

【答案】 D

【解析】 $\because$ 在 $\odot O$ 中, BC 是直径, $\widehat{AB} = \widehat{DC}$,

$$\therefore \angle AOB = \angle DOC,$$

$$\because \angle AOD = 100^\circ,$$

$$\therefore \angle AOB = \angle DOC = 40^\circ,$$

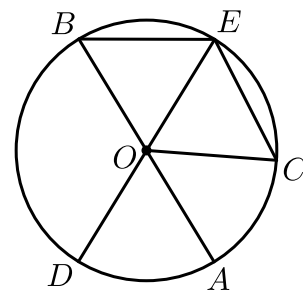
$$\because OA = OB,$$

$$\therefore \angle ABC = \angle OAB = 70^\circ.$$

故选: D.

【标注】【知识点】弧、弦、圆心角关系

12. 如图, AB, DE 是 $\odot O$ 的直径, C 是 $\odot O$ 上的一点, 且 $\widehat{AD} = \widehat{CE}$.



(1) 求证: $BE = CE$.

(2) 若 $\angle B = 50^\circ$, 求 $\angle AOC$ 的度数.

【答案】 (1) 证明见解析.

(2) 20° .

【解析】 (1) $\because \angle AOD = \angle BOE$,

$$\therefore \widehat{AD} = \widehat{BE}.$$

$$\because \widehat{AD} = \widehat{CE},$$

$$\therefore \widehat{BE} = \widehat{CE},$$

$$\therefore BE = CE .$$

$$(2) \because \angle B = 50^\circ, OB = OE ,$$

$$\therefore \angle BOE = 180^\circ - 50^\circ - 50^\circ = 80^\circ ,$$

$$\because \text{由}(1)\text{知}, BE = CE ,$$

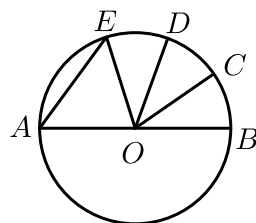
$$\therefore \angle COE = \angle BOE = 80^\circ ,$$

$$\therefore \angle AOC = 180^\circ - 80^\circ - 80^\circ = 20^\circ .$$

【标注】【知识点】圆周角定理以及应用

过关斩将

13. 如图, AB 是 $\odot O$ 的直径, $\widehat{BC} = \widehat{CD} = \widehat{DE}$, $\angle COD = 34^\circ$, 则 $\angle AEO$ 的度数是 () .



A. 51°

B. 56°

C. 68°

D. 78°

【答案】A

【解析】 $\because \widehat{BC} = \widehat{CD} = \widehat{DE}$, $\angle COD = 34^\circ$,

$$\therefore \angle BOC = \angle EOD = \angle COD = 34^\circ ,$$

$$\therefore \angle AOE = 180^\circ - \angle EOD - \angle COD - \angle BOC = 78^\circ .$$

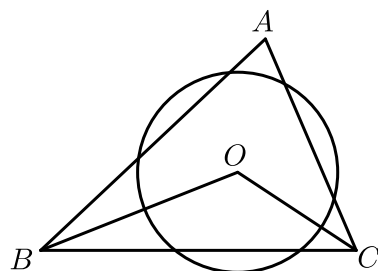
$$\text{又} \because OA = OE ,$$

$$\therefore \angle AEO = \angle EAO ,$$

$$\therefore \angle AEO = \frac{1}{2} \times (180^\circ - 78^\circ) = 51^\circ .$$

【标注】【知识点】弧、弦、圆心角关系

14. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A = 70^\circ$, $\odot O$ 截 $\triangle ABC$ 的三边所截得的弦都相等, 则 $\angle BOC =$ _____ .



【答案】 125°

【解析】 $\because \odot O$ 截 $\triangle ABC$ 的三边所得的弦相等，

$\therefore O$ 到 $\triangle ABC$ 三边的距离相等，

$\therefore O$ 在三角形的角的平分线上，即 O 是 $\triangle ABC$ 的内心。

$$\therefore \angle OBC = \frac{1}{2} \angle ABC, \angle OCB = \frac{1}{2} \angle ACB,$$

$$\therefore \angle OBC + \angle OCB = \frac{1}{2} (\angle ABC + \angle ACB),$$

$$\text{又} \because \triangle ABC \text{ 中, } \angle ABC + \angle ACB = 180^\circ - \angle A = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ.$$

$$\therefore \angle OBC + \angle OCB = 55^\circ,$$

$$\therefore \angle BOC = 180^\circ - (\angle OBC + \angle OCB) = 180^\circ - 55^\circ = 125^\circ.$$

故答案是： 125° 。

【标注】 【知识点】 三角形-内角角分线

三、 圆周角定理

圆周角定理

圆周角定理：一条弧所对的圆周角等于它所对的圆心角的_____。

推论1：同弧或等弧所对的_____相等。

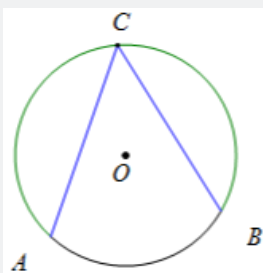
推论2：半圆（或直径）所对的圆周角是直角， 90° 的圆周角所对的弦是_____。

圆内接四边形性质：圆内接四边形的对角_____。

教法备注

1. 圆周角定理：

一条弧所对的圆周角有无数个，是因为可以作为一条弧所对圆周角的顶点的点有无数个，如图



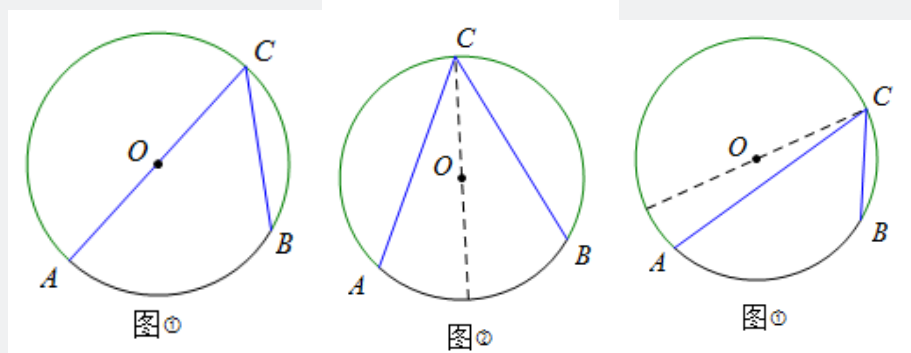
$\widehat{AB}$ 所对的圆周角 $\angle ACB$ 的顶点 C 可以是优弧 $\widehat{ACB}$ 上的任一点，所以 $\widehat{AB}$ 所对的圆周角有无数个

那么我们可以把一条弧所对的圆周角的情况分为三个大类：

如图①圆周角的一边和直径重合；

如图②过圆周角顶点的直径与在圆周角内部；

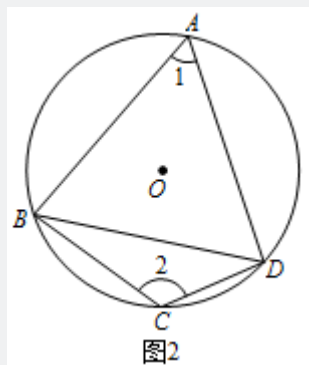
如图③过圆周角顶点的直径在圆周角的外部。



2.圆周角定理的推论：

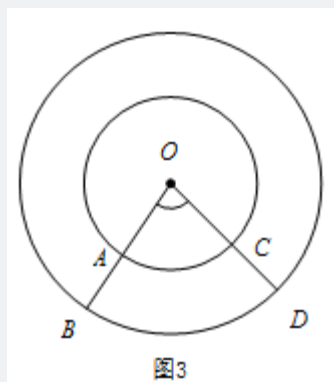
推论1：同弧或等弧所对的圆周角相等。

【注意】不能把“同弧或等弧”改成“同弦或等弦”，因为一条弦所对的圆周角有两种情况，一般情况下不相等，如图2。



拓展：在同圆或等圆中，如果两个圆周角相等，它们所对的弧一定相等。

【注意】“相等的圆周角所对的弧也相等”这一结论的前提条件是“在同圆或等圆中”，离开这一前提条件，结论不成立。如图3。



推论2：半圆（或直径）所对的圆周角是直角， 90° 的圆周角所对的弦是直径．

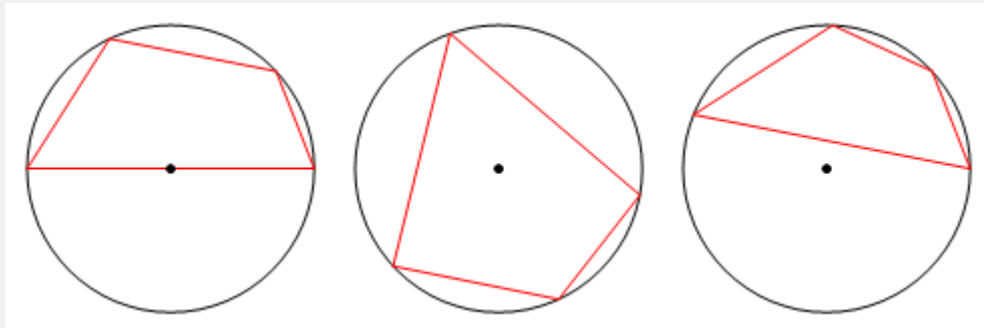
【注意】一般情况下，当条件中有直径时，往往做出直径所对的圆周角，从而得到直角三角形．

3. 圆内接四边形

四个顶点都在圆上的四边形叫做圆的内接四边形．

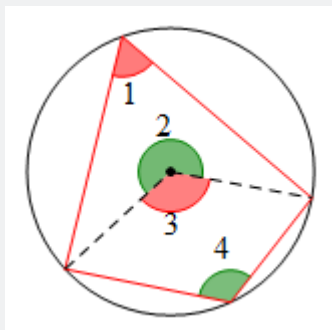
【注意】确定是不是圆内接四边形，一定要看四边形的四个顶点是不是都在圆周上．

常见的圆内接四边形：



圆内接四边形的性质：圆的内接四边形的对角互补．

证明：



根据圆周角定理可知

$$\angle 3 = 2\angle 1, \angle 2 = 2\angle 4,$$

$$\because \angle 2 + \angle 3 = 360^\circ,$$

$$\therefore 2\angle 1 + 2\angle 4 = 360^\circ,$$

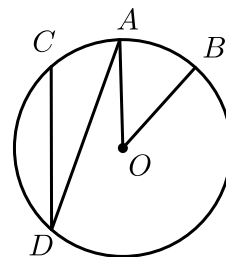
$$\therefore \angle 1 + \angle 4 = 180^\circ.$$

同理可证四边形的另一组对角的和也为 180° ．

所以圆内接四边形对角互补．

典题精炼

15. 如图，在 $\odot O$ 中， $\widehat{AB} = \widehat{AC}$ ， $\angle AOB = 40^\circ$ ，则 $\angle ADC$ 的度数是（ ）．



A. 15°

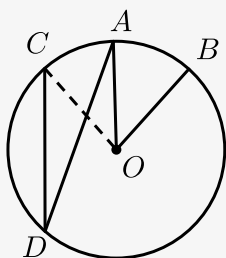
B. 20°

C. 30°

D. 40°

【答案】 B

【解析】 连接 CO ，如图，



$\because$ 在 $\odot O$ 中， $\widehat{AB} = \widehat{AC}$ ，

$\therefore \angle AOC = \angle AOB$ ，

$\because \angle AOB = 40^\circ$ ，

$\therefore \angle AOC = 40^\circ$ ，

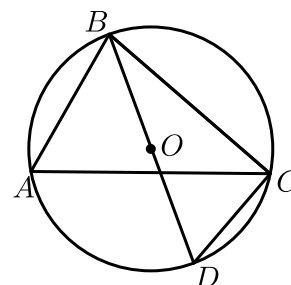
$\therefore \angle ADC = \frac{1}{2} \angle AOC = 20^\circ$.

【标注】 【知识点】 圆周角定理以及应用

【重点强调】

2018年天津河东区初三毕业考试第7题3分

16. 如图， BD 是 $\odot O$ 的直径， $\angle CBD = 30^\circ$ ，则 $\angle A$ 的度数是（ ） .



A. 30°

B. 45°

C. 60°

D. 75°

【答案】 C

【解析】 $\because BD$ 为 $\odot O$ 的直径，

$$\therefore \angle BCD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle CDB = 90^\circ - \angle CBD = 60^\circ.$$

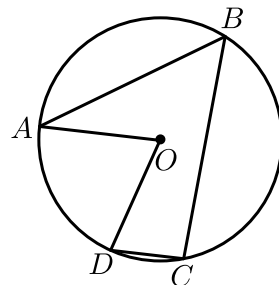
$$\therefore \angle A = \angle CDB = 60^\circ.$$

【标注】【知识点】圆周角定理以及应用

【重点强调】

2016~2017学年天津红桥区初三上学期期末第7题3分

17. 如图， A 、 B 、 C 、 D 四个点均在 $\odot O$ 上， $\angle AOD = 70^\circ$ ， $AO \parallel DC$ ，则 $\angle B$ 的度数为（ ）.



A. 40°

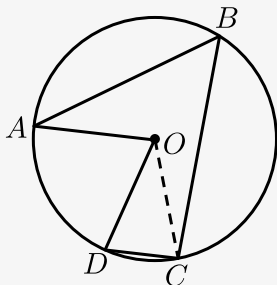
B. 45°

C. 50°

D. 55°

【答案】D

【解析】连接 OC ，



$$\because AO \parallel DC,$$

$$\therefore \angle ODC = \angle AOD = 70^\circ,$$

$$\because OD = OC,$$

$$\therefore \angle ODC = \angle OCD = 70^\circ,$$

$$\therefore \angle COD = 40^\circ,$$

$$\therefore \angle AOC = 110^\circ,$$

$$\therefore \angle B = \frac{1}{2} \angle AOC = 55^\circ.$$

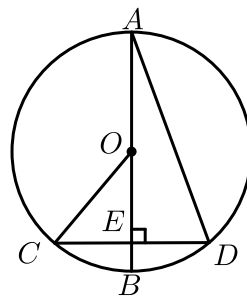
故选：D.

【标注】【知识点】圆周角定理以及应用

【重点强调】

2015年天津宝坻区初三二模第8题3分

18. 如图，在 $\odot O$ 中， AB 是直径， CD 是弦， $AB \perp CD$ ，垂足为 E ，连接 CO ， AD ， $\angle BAD = 20^\circ$ ，则下列说法正确的是（ ）。



- A. $AD = 2OB$ B. $CE = EO$ C. $\angle OCE = 40^\circ$ D. $\angle BOC = 2\angle BAD$

【答案】D

【解析】连接 OD ，

$\because AD$ 是非直径的弦， OB 是半径，

$\therefore AD \neq 2OB$ ，则A错误，

$\because \angle BAD = 20^\circ$ ， $AB \perp CD$

，

由垂径定理性质，可得：

$\angle COB = \angle DOB = 2\angle BAD = 40^\circ$ ，则D正确，

$\therefore \triangle COB$ 不是等腰直角三角形，

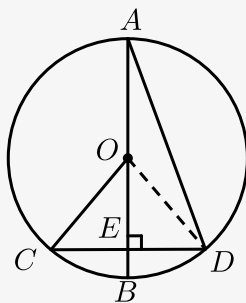
$\therefore CE \neq EO$ ，则B错误，

$\because \angle COB = 40^\circ$ ，

$\therefore \angle OCE = 90^\circ - \angle COB = 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ$ ，

则C错误，

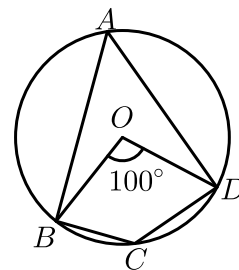
故选D。



【标注】【知识点】圆周角定理以及应用

【重点强调】

19. 如图，四边形 $ABCD$ 为 $\odot O$ 的内接四边形，已知 $\angle BOD = 100^\circ$ ，则 $\angle BCD$ 的度数为（ ）.



- A. 50° B. 80° C. 100° D. 130°

【答案】 D

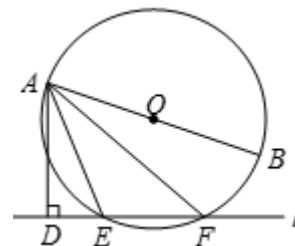
【解析】 $\because \angle BOD = 100^\circ$,
 $\therefore \angle BAD = 50^\circ$, 由于圆内接四边形的对角互补 ,
 $\therefore$ 在四边形 $ABCD$ 中, $\angle BCD = 130^\circ$.

【标注】 【知识点】 圆内接四边形的性质定理

【重点强调】

2016~2017学年天津河北区初三上学期期中第7题3分

20. 如图，已知直线 l 与 $\odot O$ 相交于点 E 、 F ， AB 是 $\odot O$ 的直径， $AD \perp l$ 于点 D ，若 $\angle DAE = 22^\circ$ ，则 $\angle BAF$ 的大小为（ ）.



- A. 12° B. 18° C. 22° D. 30°

【答案】 C

【解析】 方法一：
 连接 BE ,
 $\because AB$ 是 $\odot O$ 的直径 ,
 $\therefore \angle AEB = 90^\circ$.
 $\because AD \perp l$ 于点 D , $\angle DAE = 22^\circ$,

$$\begin{aligned}\therefore \angle AED &= 90^\circ - 22^\circ = 68^\circ, \\ \therefore \angle BEF &= 90^\circ - \angle AED = 90^\circ - 68^\circ = 22^\circ, \\ \therefore \angle BAF &= \angle BEF = 22^\circ.\end{aligned}$$

方法二：

连接 BF ，

则四边形 $AEFB$ 为圆内接四边形，

$$\therefore \angle AEF + \angle ABF = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle ABF = 68^\circ,$$

$\because AB$ 是 $\odot O$ 的直径，

$$\therefore \angle AFB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BAF = 90^\circ - 68^\circ = 22^\circ.$$

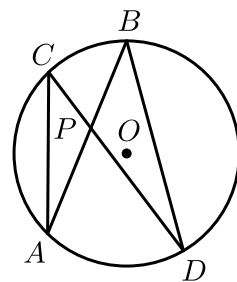
【标注】【知识点】圆内接四边形的性质定理

【重点强调】

2016年天津河西区初三一模第9题3分

 过关斩将

21. 如图， $\odot O$ 中，弦 AB 、 CD 相交于点 P ，若 $\angle A = 30^\circ$ ， $\angle APD = 70^\circ$ ，则 $\angle B$ 等于 () .



A. 30°

B. 35°

C. 40°

D. 50°

【答案】 C

【解析】 方法一：同弧所对的圆周角相等，

$$\therefore \angle D = \angle A = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle BPD = 180^\circ - \angle APD = 110^\circ,$$

$$\text{在 } \triangle BPD \text{ 中, } \angle B = 180^\circ - \angle BPD - \angle D = 40^\circ.$$

故选 C .

$$\text{方法二: } \because \angle A = 30^\circ, \angle APD = 70^\circ,$$

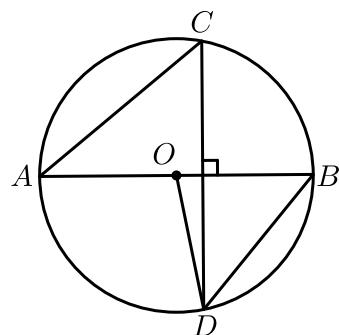
$\therefore \angle C = \angle APD - \angle A = 40^\circ$,
 $\therefore \angle B$ 与 $\angle C$ 是 $\widehat{AD}$ 对的圆周角 ,
 $\therefore \angle B = \angle C = 40^\circ$.
 故选C .

【标注】【知识点】圆周角定理的推论

【重点强调】

2018年天津河东区毕业考试第6题

22. 如图，线段 AB 是 $\odot O$ 的直径，弦 $CD \perp AB$ ， $\angle CAB = 40^\circ$ ，则 $\angle ABD$ 与 $\angle AOD$ 分别等于（ ） .



A. 40° , 80°

B. 50° , 100°

C. 50° , 80°

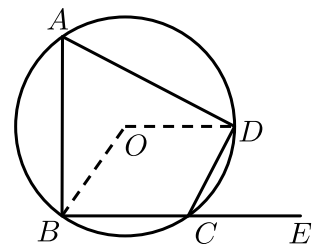
D. 40° , 100°

【答案】 B

【解析】 $\because AB$ 是 $\odot O$ 的直径， $CD \perp AB$ ，
 $\therefore \widehat{BC} = \widehat{BD}$ ，
 $\because \angle CAB = 40^\circ$ ，
 $\therefore \angle BOD = 2\angle CAB = 80^\circ$ ，
 $\therefore OB = OD$ ，
 $\therefore \angle OBD = \angle ODB = 50^\circ$ ，
 $\therefore \angle AOD = 2\angle OBD = 100^\circ$.

【标注】【知识点】圆周角定理以及应用

23. 如图，四边形 $ABCD$ 内接于圆 O ，若 $\angle BOD = 138^\circ$ ，则它的一个外角 $\angle DCE$ 的度数为（ ） .



A. 138°

B. 69°

C. 52°

D. 42°

【答案】 B

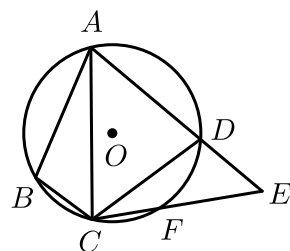
【解析】 由圆周角定理得, $\angle A = \frac{1}{2}\angle BOD = 69^\circ$,
 $\therefore \angle DCE = \angle A = 69^\circ$,
 故选: B.

【标注】 【知识点】 圆周角定理以及应用

【重点强调】

2016~2017学年天津河西区初三上学期中第4题3分

24. 如图, 四边形 $ABCD$ 内接于 $\odot O$, F 是 $\widehat{CD}$ 上一点, 且 $\widehat{DF} = \widehat{BC}$, 连接 CF 并延长交 AD 的延长线于点 E , 连接 AC . 若 $\angle ABC = 105^\circ$, $\angle BAC = 25^\circ$, 则 $\angle E$ 的度数为 ().



A. 45°

B. 50°

C. 55°

D. 60°

【答案】 B

【解析】 $\because$ 四边形 $ABCD$ 内接于 $\odot O$, $\angle ABC = 105^\circ$,
 $\therefore \angle ADC = 180^\circ - \angle ABC = 180^\circ - 105^\circ = 75^\circ$.
 $\because \widehat{DF} = \widehat{BC}$, $\angle BAC = 25^\circ$,
 $\therefore \angle DCE = \angle BAC = 25^\circ$,
 $\therefore \angle E = \angle ADC - \angle DCE = 75^\circ - 25^\circ = 50^\circ$.

【标注】 【知识点】 圆内接四边形综合

【重点强调】

2017~2018学年2月天津天津市第二南开中学初三下学期月考第7题3分

四、切线的性质与判定

切线的性质与判定

切线的判定定理：经过半径的_____并且垂直于_____是圆的切线.

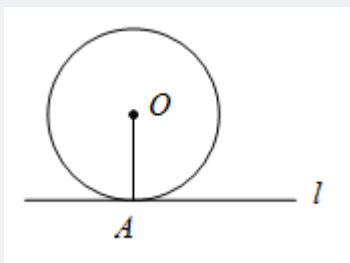
切线的性质定理：圆的切线垂直于_____.

切线长定理：从圆外一点引圆的两条切线，它们的切线长_____, 这一点和圆心的连接平分_____.

教法备注

1.切线的判定定理：

如图，在 $\odot O$ 中，经过半径 OA 的外端点 A 作直线 $l \perp OA$ ，则圆心 O 到直线 l 的距离是线段 OA 即半径，所以可以得到直线 l 与 $\odot O$ 的位置关系是相切.



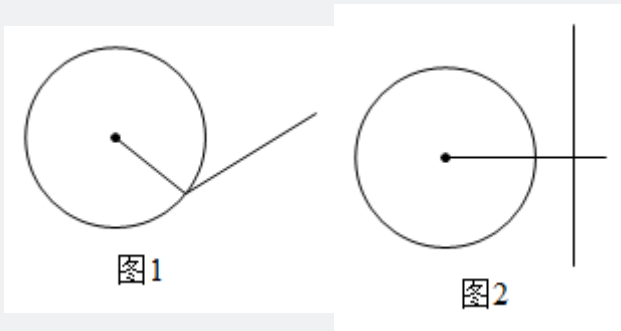
这样我们可以得到切线的判定定理：

经过半径的外端并且垂直于这条半径的直线是圆的切线.

【注意】

定理中的“经过半径外端”和“垂直于这条半径”这两个条件缺一不可.

如图：图1经过半径外端但不垂直，图2垂直却不经过半径外端，所以图中的两条线都不是圆的切线.



2.判断切线的常用方法：

- (1) 定义法：和圆只有一个公共点的直线是圆的切线；
- (2) 距离法：和圆心距离等于半径的直线是圆的切线；
- (3) 定理：经过半径的外端并且垂直于这条半径的直线是圆的切线。

证明一条直线是圆的切线有两个思路：

- (1) 若给出直线与圆有公共点：连半径、证垂直；
- (2) 若没给直线与圆的交点：作垂直、证半径。

3.切线的性质定理：

- (1) 定理：圆的切线垂直于过切点的半径。
- (2) 注意：

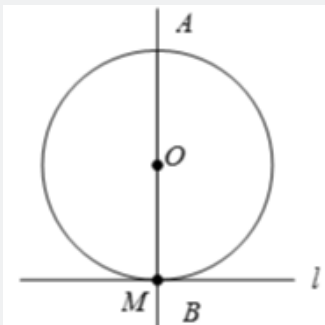
这个定理共有三个条件，即一条直线满足：

①垂直于切线②过切点③过圆心中的两个，则一定满足第三个。

①过圆心，过切点 $\Rightarrow$ 垂直于切线。 AB 过圆心， AB 切点 M ，则 $AB \perp l$ 。

②过圆心，垂直于切线 $\Rightarrow$ 过切点。 AB 过圆心， $AB \perp l$ ，则 AB 过切点 M 。

③过切点，垂直于切线 $\Rightarrow$ 过圆心。 $AB \perp l$ ， AB 过切点 M ，则 AB 过圆心。



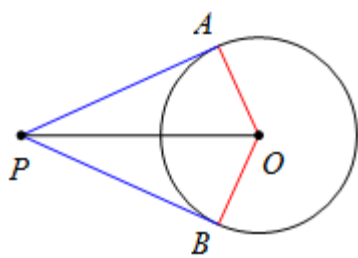
4.切线长定理：

(1) 切线长：在经过圆外一点的圆的切线上，这点和切点之间的线段的长，叫做这点到圆的切线长。

【注意】区分切线和切线长：切线是直线，无法度量；切线长是切线上一条线段的长，即圆外一点与切点之间的距离，可以度量

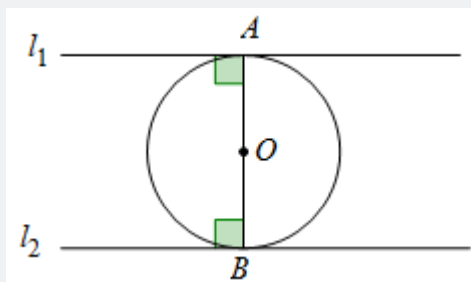
(2) 切线长定理：从圆外一点可以引圆的两条切线，它们的切线长相等，这一点和圆心的连线平分两条切线的夹角。

如图，已知 PA 、 PB 是圆的两条切线，则 $PA = PB$ 、 $\angle APO = \angle BPO$ 。

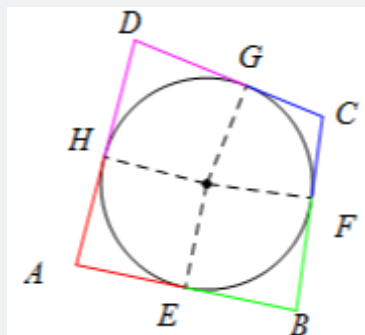


(3) 相关结论

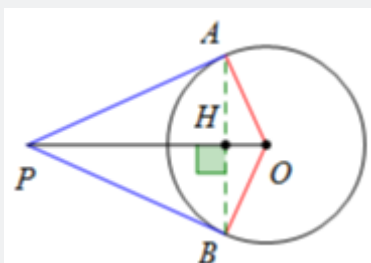
①圆的两条平行切线，切点间的线段是直径。



②圆外切四边形的两组对边和相等。

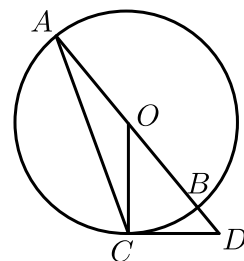


③圆心和圆外这点的连线垂直平分两切点的连线。



典题精炼

25. 如图， AB 是 $\odot O$ 的直径，点 C 在 $\odot O$ 上，过点 C 作 $\odot O$ 的切线交 AB 的延长线于点 D ，连接 OC 、 AC ，若 $\angle D = 50^\circ$ ，则 $\angle A$ 的度数是（ ）。



A. 20°

B. 25°

C. 40°

D. 50°

【答案】A

【解析】 $\because AB$ 是 $\odot O$ 的直径， CD 是 $\odot O$ 的切线，

$$\therefore \angle OCD = 90^\circ .$$

$$\because \angle D = 50^\circ , \therefore \angle COD = 40^\circ ,$$

$$\therefore \angle A = \frac{1}{2} \angle COD = 20^\circ .$$

【标注】【能力】推理论证能力

【能力】运算能力

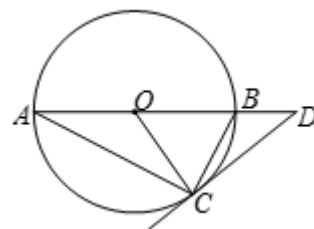
【知识点】圆周角定理以及应用

【知识点】切线的性质定理

【重点强调】

2015年天津河西区初三二模第7题3分

26. 如图，圆 O 是 $\text{Rt} \triangle ABC$ 的外接圆， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $\angle A = 25^\circ$ ，过点 C 作圆 O 的切线，交 AB 的延长线于点 D ，则 $\angle D$ 的度数是（ ）.



A. 60°

B. 50°

C. 40°

D. 25°

【答案】C

【解析】 $\because OA = OC$ ， $\angle A = 25^\circ$ ，

$$\therefore \angle OCA = \angle A = 25^\circ ,$$

$$\therefore \angle DOC = 2\angle A = 50^\circ .$$

$\because DC$ 为 $\odot O$ 切线，切于点 C ，

$$\therefore \angle OCD = 90^\circ .$$

$$\text{在} \triangle OCD, \angle D = 90^\circ - \angle DOC = 40^\circ .$$

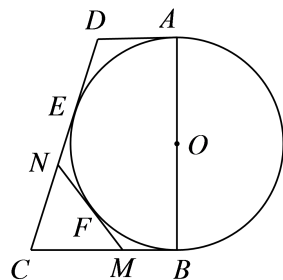
【标注】【能力】运算能力

【能力】推理论证能力

【知识点】圆周角定理以及应用

【知识点】切线的性质定理

27. 如图，四边形 $ABCD$ 中， AD 平行 BC ， $\angle ABC = 90^\circ$ ， $AD = 2$ ， $AB = 6$ ，以 AB 为直径的半 $\odot O$ 切 CD 于点 E ． F 为弧 BE 上一动点，过 F 点的直线 MN 为半 $\odot O$ 的切线， MN 交 BC 于 M ，交 CD 于 N ，则 $\triangle MCN$ 的周长为（ ）．



A. 9

B. 10

C. $3\sqrt{11}$

D. $2\sqrt{23}$

【答案】A

【解析】作 $DH \perp BC$ 交 BC 于点 H ，

$\because$ 四边形 $ABCD$ 中，

$AD \parallel BC$ ， $\angle ABC = 90^\circ$

，

$\therefore AB \perp AD$ ， $AB \perp BC$ ，

$\therefore AB$ 为直径，

$\therefore AD$ 为 BC 为 $\odot O$ 切线，

$\therefore CD$ 和 MN 为 $\odot O$ 切线，

$\therefore DE = DA = 2$ ，

$CE = CB$ ，

$NE = NF$ ，

$MB = MF$ ，

$\therefore$ 四边形 $ABHD$ 为矩形，

$\therefore BH = AD = 2$ ， $DH = AB = 6$ ，

设 $BC = x$ ，则 $CH = x - 2$ ， $CD = x + 2$ ，

在 $\text{Rt}\triangle DCH$ 中： $CH^2 + DH^2 = DC^2$ ，

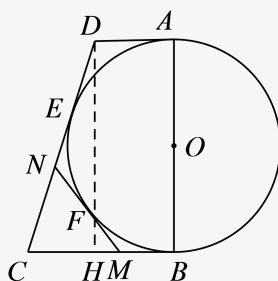
$\therefore (x - 2)^2 + 6^2 = (x + 2)^2$

解得 $x = \frac{9}{2}$ ，

$\therefore CB = CE = \frac{9}{2}$ ，

$\therefore C_{\triangle MCN} = CN + CM + MN$ ，

$= CN + CM + NF + MF$ ，



$$\begin{aligned}
 &= CN + CM + NF + MB \\
 &= CE + CB \\
 &= 9
 \end{aligned}$$

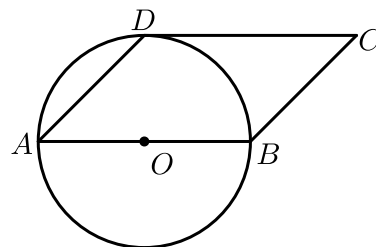
故选A .

【标注】【知识点】切线的性质定理

【重点强调】

2017~2018学年12月天津和平区天津市第二南开中学初三上学期月考第12题3分

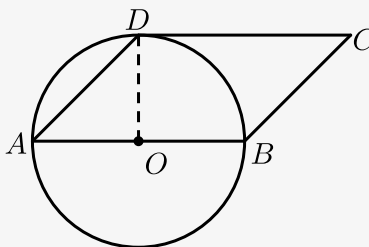
28. 如图，四边形 $ABCD$ 是平行四边形， $\angle C = 45^\circ$ ，以 AB 为直径的 $\odot O$ 经过点 D ，求证： CD 是 $\odot O$ 的切线 .



【答案】证明见解析 .

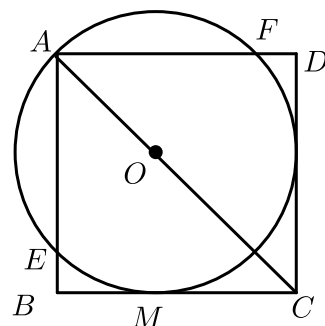
【解析】连结 OD ，如图，

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，
 $\therefore \angle A = \angle C = 45^\circ$ ， $AB \parallel CD$ ，
 $\therefore OA = OD$ ，
 $\therefore \angle ODA = \angle A = 45^\circ$ ，
 $\therefore \angle AOD = 90^\circ$ ，
 $\therefore OD \perp AB$ ，
 $\because CD \parallel AB$ ，
 $\therefore OD \perp CD$ ，
 $\therefore CD$ 是 $\odot O$ 的切线 .



【标注】【知识点】切线的判定定理

29. 如图，已知 O 是正方形 $ABCD$ 对角线上一点，以 O 为圆心、 OA 长为半径的 $\odot O$ 与 BC 相切于 M ，与 AB 、 AD 分别相交于 E 、 F .

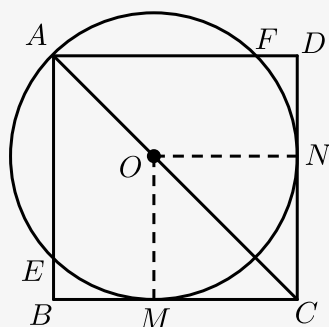


- (1) 求证： CD 与 $\odot O$ 相切．
- (2) 若正方形 $ABCD$ 的边长为1，求 $\odot O$ 的半径．

【答案】 (1) 证明见解析．

(2) $\odot O$ 的半径为 $2 - \sqrt{2}$ ．

【解析】 (1) 连接 OM ，作 $ON \perp CD$ 于 N 点．



$\because BC$ 切 $\odot O$ 于 M ，

$\therefore OM \perp BC$ ．

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形， AC 是对角线， $ON \perp CD$ ，

$\therefore OM = ON$ ，即 ON 是 $\odot O$ 的半径，

$\therefore CD$ 与 $\odot O$ 相切．

(2) 由(1)易知四边形 $OMCN$ 是正方形，

$\therefore OC = \sqrt{2}OM$ ．

设 $\odot O$ 半径为 r ，

$\because$ 正方形 $ABCD$ 的边长为1，

$\therefore$ 对角线 $AC = \sqrt{2}$ ，

$\therefore \sqrt{2}r + r = \sqrt{2}$ ，

$\therefore r = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} + 1} = 2 - \sqrt{2}$ ，即 $\odot O$ 的半径为 $2 - \sqrt{2}$ ．

【标注】 【知识点】 正方形的性质

【知识点】 切线的性质定理

【知识点】切线长定理

【知识点】切线的判定定理

【能力】推理论证能力

30. 已知 AB 为 $\odot O$ 的直径， $OC \perp AB$ ，弦 DC 与 OB 交于点 F ，在直线 AB 上有一点 E ，连接 ED ，且有 $ED = EF$.

(1) 如图1，求证 ED 为 $\odot O$ 的切线 .

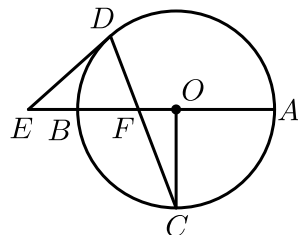


图 1

(2) 如图2，直线 ED 与切线 AG 相交于 G ，且 $OF = 1$ ， $\odot O$ 的半径为3，求 AG 的长 .

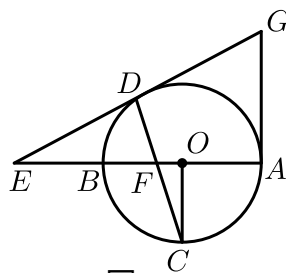


图 2

【答案】(1) 证明见解析 .

(2) 6 .

【解析】(1) 连接 OD ，如图1所示 .

$$\because ED = EF ,$$

$$\therefore \angle EDF = \angle EFD ,$$

$$\because \angle EFD = \angle CFO ,$$

$$\therefore \angle EDF = \angle CFO .$$

$$\because OD = OC ,$$

$$\therefore \angle ODF = \angle OCF .$$

$$\because OC \perp AB ,$$

$\therefore$

$$\angle CFO + \angle OCF = \angle EDF + \angle ODF = \angle EDO = 90^\circ ,$$

$\therefore ED$ 为 $\odot O$ 的切线 .

(2) 连接 OD ， OG ，如图2所示 .

由 (1) 可知 $\triangle EDO$ 为直角三角形， $OF = 1$ ，

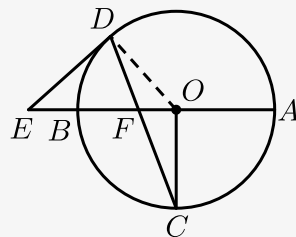


图 1

设 $ED = EF = a$, $EO = EF + FO = a + 1$,

由勾股定理得: $EO^2 = ED^2 + DO^2$,

即 $(a + 1)^2 = a^2 + 3^2$,

解得: $a = 4$,

即 $ED = 4$, $EO = 5$.

$\therefore \odot O$ 的半径为 3,

$\therefore EA = 8$,

$\therefore$ 直线 ED 与切线 AG 相交于 G , 由 (1) 可知 ED 为 $\odot O$ 的切线,

$\therefore \triangle GDO \cong \triangle GAO$ (HL)

$\therefore DG = AG$,

$\therefore$ 在 $Rt\triangle GEA$ 中, $EG^2 = EA^2 + AG^2$,

$\therefore (4 + AG)^2 = 8^2 + AG^2$,

$\therefore AG = 6$.

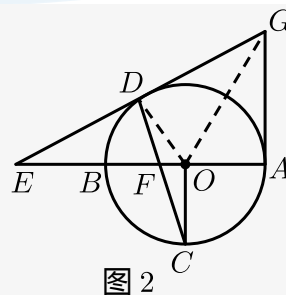


图 2

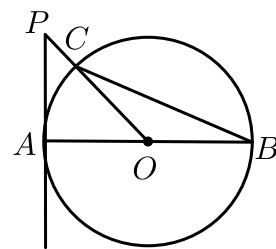
【标注】【知识点】圆与勾股

【重点强调】

2016年天津滨海新区初三一模第21题10分

过关斩将

31. 如图, AB 是 $\odot O$ 的直径, 直线 PA 与 $\odot O$ 相切于点 A , PO 交 $\odot O$ 于点 C , 连接 BC . 若 $\angle P = 40^\circ$, 则 $\angle ABC$ 的度数为 ().



A. 20°

B. 25°

C. 40°

D. 50°

【答案】B

【解析】 $\because AB$ 是 $\odot O$ 的直径, 直线 PA 与 $\odot O$ 相切于点 A ,

$\therefore \angle PAO = 90^\circ$.

又 $\because \angle P = 40^\circ$,

$\therefore \angle POA = 50^\circ$,

$$\therefore \angle ABC = \frac{1}{2} \angle POA = 25^\circ .$$

【标注】【知识点】切线的性质定理

【知识点】圆周角定理以及应用

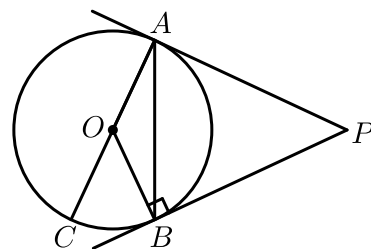
【能力】运算能力

【能力】推理论证能力

【重点强调】

2017~2018学年12月天津河东区初三上学期月考第5题3分

32. 如图, PA 、 PB 是 $\odot O$ 的切线, A 、 B 为切点, AC 是 $\odot O$ 的直径, $\angle P = 50^\circ$, 则 $\angle BAC =$ _____ .



【答案】 25°

【解析】 $\because PA$ 、 PB 是 $\odot O$ 的切线, A 、 B 为切点,

$$\therefore \angle PAO = \angle PBO = 90^\circ ,$$

$$\therefore \angle AOB = 360^\circ - \angle P - \angle PAO - \angle PBO = 130^\circ ,$$

$$\because OA = OB ,$$

$$\therefore \angle BAC = 25^\circ .$$

【标注】【知识点】圆周角定理以及应用

【重点强调】

2016~2017学年天津和平区初三上学期期末第15题3分



经典再现

33. 已知 AB 是 $\odot O$ 的直径, 弦 CD 与 AB 相交, $\angle BAC = 38^\circ$.

(1) 如图①, 若 D 为 $\widehat{AB}$ 的中点, 求 $\angle ABC$ 和 $\angle ABD$ 的大小 .

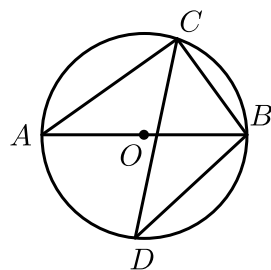


图 ①

(2) 如图②, 过点 D 作 $\odot O$ 的切线, 与 AB 的延长线交于点 P , 若 $DP \parallel AC$, 求 $\angle OCD$ 的大小.

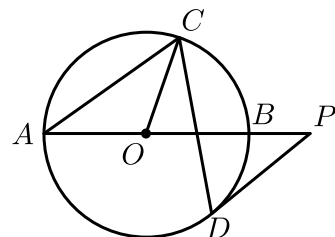


图 ②

【答案】 (1) $\angle ABC = 52^\circ$, $\angle ABD = \angle ACD = 45^\circ$.

(2) $\angle OCD = 26^\circ$.

【解析】 (1) $\because AB$ 是 $\odot O$ 的直径,

$$\therefore \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BAC + \angle ABC = 90^\circ,$$

$$\text{又} \because \angle BAC = 38^\circ,$$

$$\therefore \angle ABC = 90^\circ - 38^\circ = 52^\circ,$$

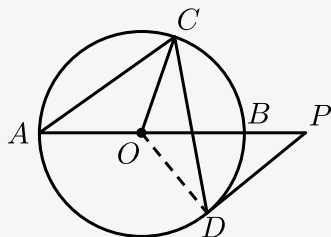
$\because D$ 为 $\widehat{AB}$ 的中点,

$$\therefore \widehat{AD} = \widehat{BD},$$

$$\therefore \angle ACD = \angle BCD = \frac{1}{2} \angle ACB = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle ABD = \angle ACD = 45^\circ.$$

(2) 如图, 连接 OD ,



$\because OP$ 切 $\odot O$ 于点 D ,

$$\therefore OD \perp DP,$$

$$\text{即} \angle ODP = 90^\circ,$$

$$\begin{aligned}
&\because DP \parallel AC, \\
&\therefore \angle BAC = 38^\circ, \\
&\therefore \angle P = \angle BAC = 38^\circ, \\
&\because \angle AOD \text{ 是 } \angle ODP \text{ 的外角}, \\
&\therefore \angle AOD = \angle ODP + \angle P = 128^\circ, \\
&\therefore \angle ACD = \frac{1}{2} \angle AOD = 64^\circ, \\
&\text{又} \because OA = OC, \\
&\therefore \angle ACO = \angle A = 38^\circ, \\
&\therefore \angle OCD = \angle ACD - \angle ACO = 64^\circ - 38^\circ = 26^\circ.
\end{aligned}$$

【标注】【知识点】圆与特殊角

【重点强调】

2018年天津中考真题第21题10分