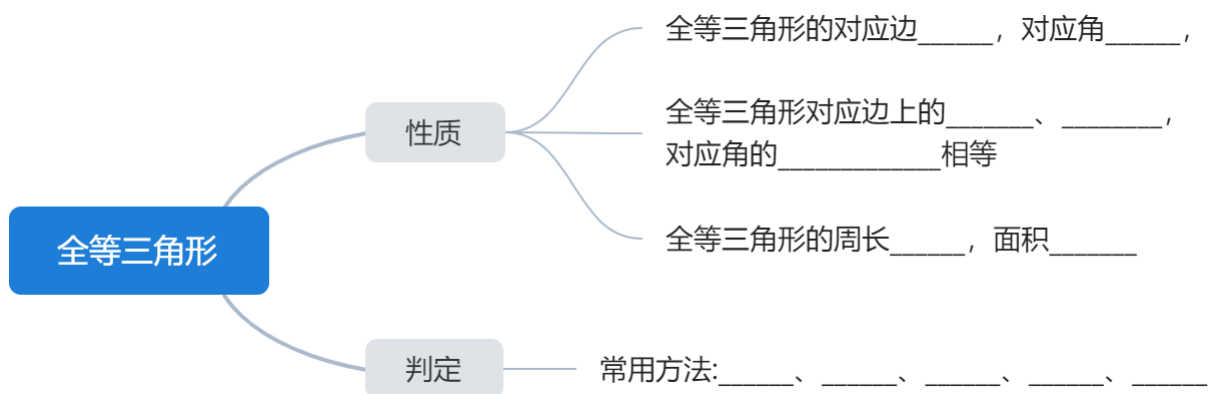


第3讲全等与相似基础

一、全等三角形

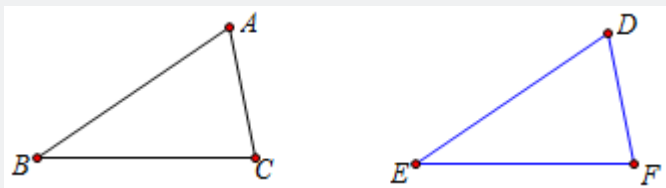


教法备注

1.性质

全等三角形的对应边相等, 全等三角形的对应角相等.

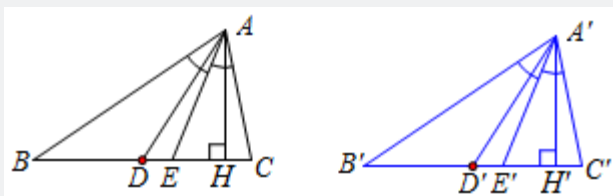
如图 $AB = DE$, $AC = DF$, $BC = EF$, $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$, $\angle C = \angle F$.



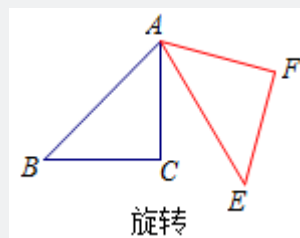
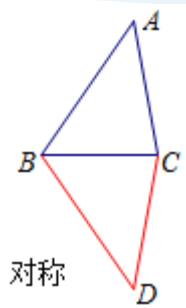
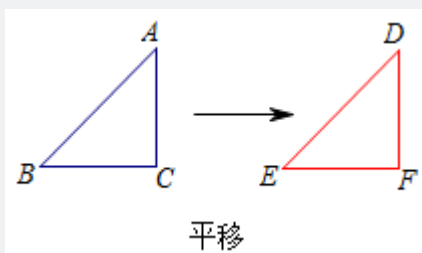
【拓展】

① 全等三角形对应边上的中线相等, 对应边上的高相等, 对应角的角平分线相等.

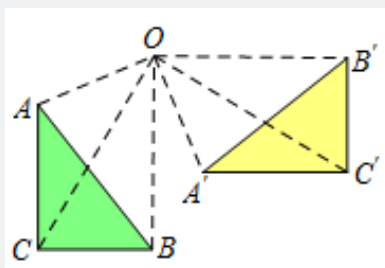
② 全等三角形的周长相等, 面积相等.



一个三角形经过**平移**、**翻折**、**旋转**后, 位置变化了, 但是形状、大小都没有改变, 即平移、翻折和旋转前后的图形全等.



【旋转性质】



对应点到旋转中心的距离相等 . $OA = OA'$, $OB = OB'$, $OC = OC'$.

对应点与旋转中心所连线段的夹角都等于旋转角 . $\angle AOA' = \angle BOB' = \angle COC'$.

旋转前、后的图形全等 . $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

2.全等三角形的判定

(1)一般三角形全等的判定方法

- ①三条边分别对应相等的两个三角形全等(简记为“边边边”或“SSS”) .
- ②两边及这两边的**夹角**对应相等的两个三角形全等(简记为“边角边”或“SAS”) .
- ③两角及这两角的夹边对应相等的两个三角形全等(简记为“角边角”或“ASA”) .
- ④两角及其中一角对边对应相等的两个三角形全等(简记为“角角边”或“AAS”) .

注：①两个三角形的“三个角对应相等”不能判定这两个三角形全等 .

②两个三角形的“两边及其中一边的对角对应相等”(一般称为“边边角”或“SSA”)不能判定这两个三角形全等 .

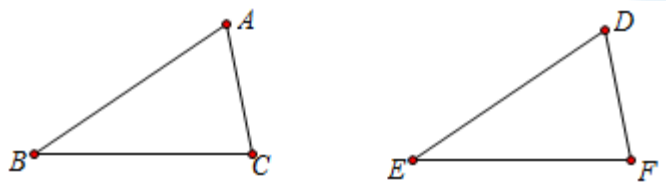
(2)直角三角形全等的判定方法

- ①特殊方法：斜边及一条直角边对应相等的两个直角三角形全等(简记为“斜边、直角边”或“HL”) .
- ②一般方法：SAS、ASA、AAS .

注：①使用HL判定时需要先判定两个三角形是直角三角形 .

②并非所有直角三角形全等都都用HL判定，一般方法也可以判定 .

【书写过程示例】

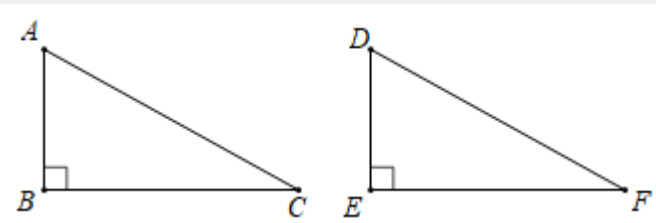


在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 中

$$\begin{cases} AB = DE \\ AC = DF \\ BC = EF \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABC \cong \triangle DEF (SSS)$

【书写过程示例】



在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 和 $\text{Rt}\triangle DEF$ 中

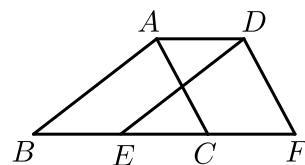
$$\begin{cases} AC = DF \\ AB = DE \end{cases}$$

$\therefore \text{Rt}\triangle ABC \cong \text{Rt}\triangle DEF (HL)$

与平移综合

典题精炼

1. 如图，将 $\triangle ABC$ 沿 BC 方向平移得到 $\triangle DEF$ ，使点 B 的对应点 E 恰好落在边 BC 的中点上，点 C 的对应点 F 在 BC 的延长线上，连接 AD 。下列结论一定正确的是（ ）。



A. $\angle B = \angle F$

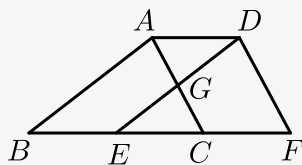
B. $AC \perp DE$

C. $BC = DF$

D. AC 平分 DE

【答案】D

【解析】A 选项：由平移可知： $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ ，



故 $\angle B = \angle DEF$ 但 $\angle B$ 不一定等于 $\angle F$,

故A错误;

B选项: 有 $AC \parallel DF$, $AB \parallel DE$,

但 $\angle BAC$ 不一定等于 90° ,

故AC不一定垂直于DE,

故B错误;

C选项: 有 $BC = EF$, 但BC不一定等于DF,

故C错误;

D选项: $\because E$ 是BC中点,

$\therefore BE = CE$,

又 $BC = EF$,

$\therefore BC - EC = EF - EC$,

即 $EC = CF$, 又 $AC \parallel DF$,

$\therefore CG$ 是 $\triangle DEF$ 的中位线,

$\therefore AC$ 平分DE.

故D正确.

故选D.

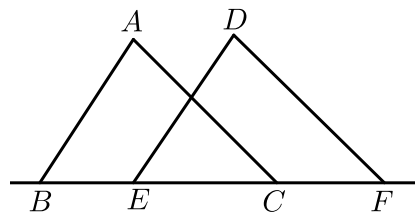
【标注】【知识点】平移型全等

【重点强调】

2020年天津津南区初三一模第11题3分

过关斩将

2. 如图, $\triangle ABC$ 沿BC边所在的直线向右平移得到 $\triangle DEF$, 下列结论中错误的是().



A. $AC \parallel DF$ B. $\angle A = \angle D$ C. $AC = DF$ D. $EC = CF$ **【答案】** D**【解析】** $\because \triangle ABC$ 沿直角边 BC 所在的直线向右平移得到 $\triangle DEF$,

$$\therefore \triangle ABC \cong \triangle DEF,$$

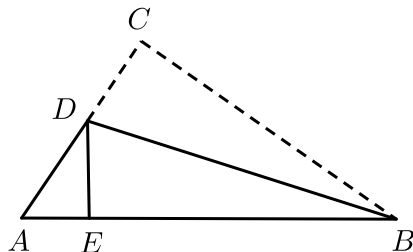
$$\therefore \angle A = \angle D, AC = DF, \angle ACB = \angle DFE,$$

$$\therefore AC \parallel DF, BE = CF,$$

故选D.

【标注】【知识点】全等三角形的对应边与角**与翻折综合****典题精炼**

3. 如图 $\triangle ABC$ 制片中, $\angle A = 56^\circ$, $\angle C = 88^\circ$, 沿过点 B 的直线折叠这个三角形, 使点 C 落在 AB 边上的点 E 处, 折痕为 BD , 则 $\angle BDE$ 的度数为().

A. 76° B. 74° C. 72° D. 70° **【答案】** B**【解析】** $\because \angle A = 56^\circ, \angle C = 88^\circ$,

$$\therefore \text{在} \triangle ABC \text{中}, \angle ABC = 36^\circ,$$

$$\text{又} \because \triangle DEB \cong \triangle DCB.$$

$$\therefore \angle CBD = \angle EBD = \frac{1}{2} \angle ABC = 18^\circ,$$

$$\therefore \angle DEB = 88^\circ,$$

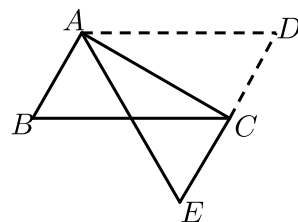
$$\therefore \text{在} \text{Rt} \triangle DEB \text{中}, \angle BDE = 180^\circ - 88^\circ - 18^\circ = 74^\circ.$$

【标注】【知识点】全等三角形的对应边与角

【重点强调】

2018年天津津南区初三二模第9题3分

4. 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，将 $\triangle ADC$ 沿 AC 折叠后，点 D 恰好落在 DC 的延长线上的点 E 处．若 $\angle B = 60^\circ$ ， $AB = 3$ ，则 $\triangle ADE$ 的周长为（ ）．



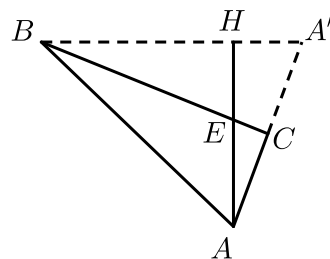
- A. 12 B. 15 C. 18 D. 21

【答案】 C

【解析】 $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形， $\angle B = 60^\circ$ ， $AB = 3$ ，
 $\therefore \angle D = \angle B = 60^\circ$ ， $CD = AB = 3$ ．
 由折叠的性质可知， $AD = AE$ ， $CD = CE$ ，
 $\therefore \triangle ADE$ 是等边三角形，
 $\therefore DE = 2CD = 6$ ，
 $\therefore \triangle ADE$ 的周长为 $3 \times 3 = 9$ ．
 故选C．

【标注】 【知识点】 四边形与折叠问题

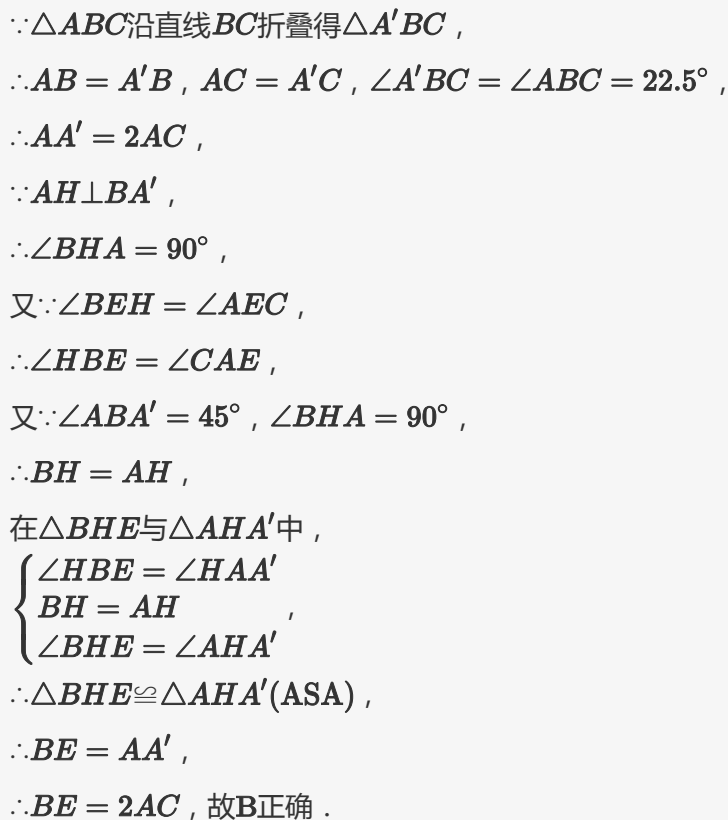
5. 如图， $\triangle ABC$ 中， $\angle BCA = 90^\circ$ ， $\angle ABC = 22.5^\circ$ ，将 $\triangle ABC$ 沿直线 BC 折叠，得到点 A 的对称点 A' ，连接 BA' ，过点 A 作 $AH \perp BA'$ 于 H ， AH 与 BC 交于点 E ，下列结论一定正确的是（ ）．



- A. $A'C = A'H$ B. $2AC = EB$ C. $AE = EH$ D. $AE = A'H$

【答案】 B

【解析】 方法一：



方法二： $\because \triangle ABC$ 沿 BC 折叠至 $\triangle A'BC$ ，

$$\therefore \angle ABC = \angle A'BC = 22.5^\circ,$$

$$\angle BAC = \angle BA'C$$

$$= (180^\circ - \angle ABA') \div 2$$

$$= (180^\circ - 22.5^\circ \times 2) \div 2$$

$$= 67.5^\circ,$$

$$\therefore \angle ABA' = 2\angle ABC = 45^\circ, AH \perp BA',$$

$$\therefore \angle BAH = 180^\circ - \angle ABH - \angle AHB = 45^\circ,$$

$$\therefore BH = AH, \angle HAA' = \angle BAA' - \angle BAH = 22.5^\circ,$$

$$\therefore \angle HBE = \angle HAA' = 22.5^\circ,$$

在 $\triangle BHE$ 与 $\triangle AHA'$ 中,

$$\begin{cases} BH = AH \\ \angle EBH = \angle HAA' \\ \angle EHB = \angle AHA' = 90^\circ \end{cases},$$

$$\therefore \triangle BHE \cong \triangle AHA' \text{ (ASA)},$$

$$\therefore BE = AA',$$

$$\text{又} \because AA' = 2AC,$$

$$\therefore BE = 2AC.$$

故选B.

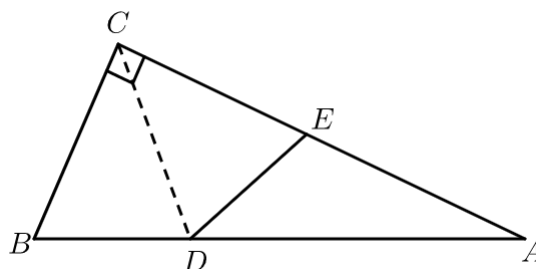
【标注】【知识点】ASA

【重点强调】

2020年天津河西区初三一模第11题3分

过关斩将

6. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ，沿 CD 折叠 $\triangle CBD$ ，使点 B 恰好落在 AC 边上的点 E 处．若 $\angle A = 32^\circ$ ，则 $\angle ADE = \underline{\hspace{2cm}}$ ．



【答案】 26°

【解析】 $\because \angle A = 32^\circ, \angle ACB = 90^\circ$

$$\therefore \angle ABC = 58^\circ$$

由题可得 $\triangle CBD \cong \triangle CED, \angle ABC = \angle CED = 58^\circ$

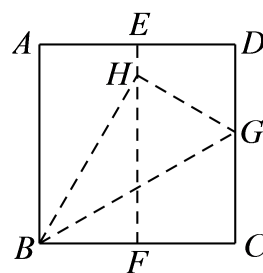
$$\therefore \angle ADE = \angle CED - \angle A = 58^\circ - 32^\circ = 26^\circ$$

【标注】【知识点】三角形折叠

【重点强调】

2015年天津河北区初三一模第16题3分

7. 如图， $ABCD$ 为正方形， E 、 F 分别为 AD 、 BC 的中点， G 为 DC 上一点，沿 BG 折叠，点 C 落在 EF 上的点 H 处，连接 BH 、 GH ，则下列结论错误的是（ ）．



- A. $\angle BHG = 90^\circ$ B. $HG = CG$ C. $\angle HBC = 60^\circ$ D. $DG = CG$

【答案】 D

【解析】 A 选项： $\triangle BCG$ 翻折得到 $\triangle BHG$ ，

$$\triangle BCG \cong \triangle BHG,$$

$$\angle BHG = \angle BCG = 90^\circ, \text{ A正确.}$$

B 选项： $HG = CG$ ，B正确.

C 选项： $\because E、F$ 为 $AD、BC$ 中点，

$$\therefore EF \parallel AB \parallel DC.$$

$\therefore \triangle BFH$ 为直角三角形.

$$BH = BC, BF = \frac{1}{2}BC,$$

$$\therefore \cos \angle HBC = \frac{BF}{BH} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \angle HBC = 60^\circ, \text{ C正确.}$$

D 选项： DG 与 CD 没有特殊数量关

系，D错误.

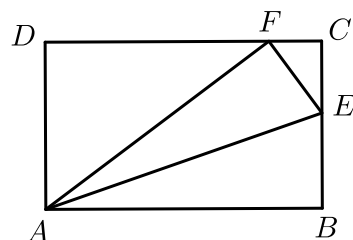
故选 D.

【标注】【知识点】四边形与折叠问题

【重点强调】

2018年天津滨海新区初三一模第9题3分

8. 如图，将长方形纸片 $ABCD$ 沿 AE 向上折叠，使点 B 落在 DC 边上的 F 点处，若 $\triangle AFD$ 的周长为12， $\triangle ECF$ 的周长为4，则长方形 $ABCD$ 的周长为 _____.



【答案】 16

【解析】 由折叠可得 $EF = BE$, $AF = BA$,

$\because C_{\triangle ECF} = 4$ 可得 $CF + CE + EF = CF + CE + BE = 4$,

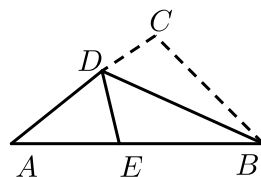
又 $\because C_{\triangle ADF} = 12$ 可得 $AD + DF + AF = AD + DF + AB = 12$,

$\therefore AD + DF + AB + CF + CE + EB = AD + DC + BC + AB = 16$.

【标注】 【知识点】 平行线相关折叠问题

🔗 经典再现

9. 如图, 将一个三角形纸片 ABC 沿过点 B 的直线折叠, 使点 C 落在 AB 边上的点 E 处, 折痕为 BD , 则下列结论一定正确的是 ().



- A. $AD = BD$ B. $AE = AC$ C. $ED + EB = DB$ D. $AE + CB = AB$

【答案】 D

【解析】 $\because \triangle BDE$ 由 $\triangle BDC$ 翻折而成,

$\therefore BE = BC$,

$\therefore AE + BE = AB$,

$\therefore AE + CB = AB$.

【标注】 【知识点】 对称型全等

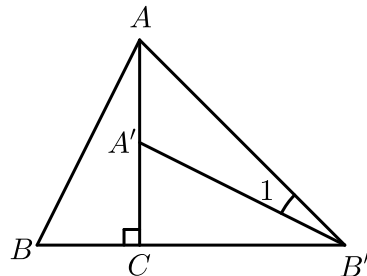
【重点强调】

2018年天津中考第10题 (3分)

全等三角形的对应边相等 $BC = BE$

典题精炼

10. 如图，将 $\text{Rt}\triangle ABC$ 绕直角顶点 C 顺时针旋转 90° ，得 $\triangle A'B'C$ ，连接 AB' ，若 $\angle A'B'A = 25^\circ$ ，则 $\angle B$ 的大小为（ ）。



- A. 80° B. 70° C. 50° D. 45°

【答案】 B

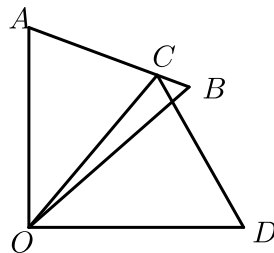
【解析】 由旋转可知： $\triangle A'CB' \cong \triangle BCA$ ， $\angle ACB = 90^\circ$ ，
 $\therefore CB' = CA$ ， $\angle B = \angle CA'B'$ ，
 $\therefore \angle CB'A = \angle CAB' = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle ACB) = 45^\circ$ ，
 $\therefore \angle A'B'C = \angle AB'C - \angle A'B'A = 45^\circ - 25^\circ = 20^\circ$ ，
 $\therefore \angle B = \angle CA'B' = 90^\circ - \angle A'B'C = 90^\circ - 20^\circ = 70^\circ$ 。
 故选B。

【标注】 【知识点】 旋转性质综合应用

【重点强调】

2020年天津滨海新区初三二模第11题3分

11. 如图， $\triangle COD$ 是 $\triangle AOB$ 绕点 O 顺时针旋转 40° 后得到的图形，若点 C 恰好落在 AB 上，且 $\angle AOD$ 的度数为 90° ，则 $\angle B$ 的度数是（ ）。



- A. 30° B. 40° C. 50° D. 60°

【答案】D

【解析】如图，由旋转变换的性质得：

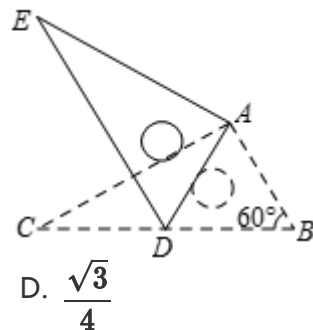
$$\begin{aligned}\angle AOC &= \angle BOD = 40^\circ, OA = OC, \\ \therefore \angle A &= \angle ACO = \frac{180^\circ - 40^\circ}{2} = 70^\circ, \\ \therefore \angle AOD &= 90^\circ, \\ \therefore \angle BOC &= 90^\circ - 80^\circ = 10^\circ, \angle AOB = 50^\circ, \\ \therefore \angle B &= 180^\circ - 70^\circ - 50^\circ = 60^\circ. \\ \text{故选D.}\end{aligned}$$

【标注】【知识点】旋转性质综合应用

【重点强调】

2019年天津河西区初三一模第11题3分

12. 如图，将 $\text{Rt}\triangle ABC$ 绕点 A 按顺时针旋转一定角度得到 $\text{Rt}\triangle ADE$ ，点 B 的对应点 D 恰好落在 BC 边上，若 $AB = 1$ ， $\angle B = 60^\circ$ ，则 $\triangle ABD$ 的面积为（ ）。



A. $2\sqrt{3}$

B. $\sqrt{3}$

C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

D. $\frac{\sqrt{3}}{4}$

【答案】D

【解析】 $\because \text{Rt}\triangle ABC$ 绕点 A 按顺时针旋转一定角度得到 $\text{Rt}\triangle ADE$ ，

$$\begin{aligned}\therefore AD &= AB, \\ \therefore \angle B &= 60^\circ, \\ \therefore \triangle ABD &\text{为等边三角形}, \\ \therefore \triangle ABD \text{的面积} &= \frac{\sqrt{3}}{4} AB^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 1^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}.\end{aligned}$$

【标注】【知识点】旋转求周长和面积

【重点强调】

2020年天津滨海新区初三一模第11题3分

$$\therefore AB = AD, AE = AC, \angle CAB = \angle EAD,$$

可得 $AE = AC$ 正确, A选项成立;

$$\therefore \angle CAE + \angle EAB = \angle CAB,$$

$$\angle EAB + \angle BAD = \angle EAD,$$

$$\therefore \angle EAC = \angle BAD, \text{B选项成立};$$

无法判断 $\angle CBA = \angle BAD$,

即无法得出 $BC \parallel AD$, $\therefore$ C选项不一定成立;

$\therefore AB = AD$, 连接 BD 后可得 $\triangle ABD$ 为等腰三角形, D选项成立.

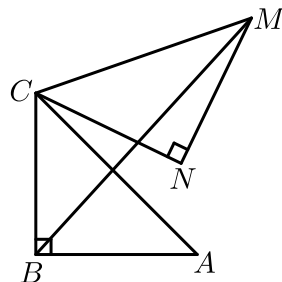
故选C.

【标注】【知识点】旋转性质综合应用

【重点强调】

2019年天津西青区初三一模第9题3分

15. 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ABC = 90^\circ$, $AB = BC = \sqrt{2}$, 将 $\triangle ABC$ 绕点 C 逆时针旋转 60° , 得到 $\triangle MNC$, 连接 BM , 则 BM 的长是 _____.



【答案】 $\sqrt{3} + 1$

【解析】如图, 连接 AM , 设 AC 与 BM 交于点 O

由题意得: $CA = CM$, $\angle ACM = 60^\circ$,

$\therefore \triangle ACM$ 为等边三角形,

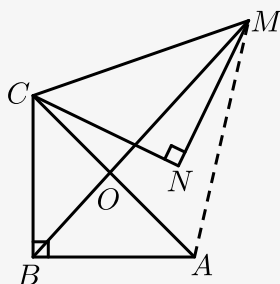
$\therefore AM = CM$, $\angle MAC = \angle MCA = \angle AMC = 60^\circ$,

$\therefore \angle ABC = 90^\circ$, $AB = BC = \sqrt{2}$,

$\therefore CM = AC = 2$,

$\therefore AB = BC$, $CM = AM$,

$\therefore BM$ 垂直平分 AC ,



$$\therefore BO = \frac{1}{2}AC = 1, OM = CM \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3},$$

$$\therefore BM = BO + OM = 1 + \sqrt{3},$$

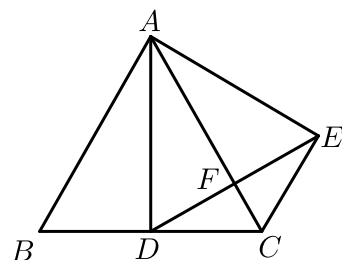
故答案为： $1 + \sqrt{3}$ 。

【标注】【知识点】利用旋转求线段长

【重点强调】

2019~2020学年12月天津河东区天津市育才中学初三上学期月考第20题3分

16. 如图，在等边 $\triangle ABC$ 中， $AB = 4$ ， D 是 BC 的中点，将 $\triangle ABD$ 绕点 A 旋转后得到 $\triangle ACE$ ，连接 DE 交 AC 于点 F ，则 $\triangle AEF$ 的面积为 _____。



【答案】 $\frac{3}{2}\sqrt{3}$

【解析】 $\because \triangle ACE \cong \triangle ABD$,

$$\therefore AD = AE, \angle BAD = \angle CAE,$$

$$\because \angle BAD + \angle CAD = \angle BAC = 60^\circ,$$

$$\angle CAE + \angle CAD = \angle DAE = 60^\circ,$$

$$\text{又 } AD = AE,$$

$\therefore \triangle ADE$ 是等边三角形，

$\because \triangle ABC$ 是等边三角形， D 是 BC 中点，

$$\therefore AD \perp BC, BD = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}AB = 2, \angle BAD = \frac{1}{2}\angle BAC = 30^\circ,$$

$$\therefore AD = \sqrt{3}BD = 2\sqrt{3}, \angle CAE = \angle BAD = 30^\circ,$$

$$\therefore AE = AD = 2\sqrt{3} = DE,$$

$$\therefore \angle DAE = 60^\circ, \angle CAE = 30^\circ,$$

$\therefore AF$ 是 $\triangle ADE$ 的角平分线，

$$\therefore AF \perp DE \text{ 且 } DF = EF = \frac{1}{2}DE = \sqrt{3},$$

$$\therefore AF = \sqrt{3}EF = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 3,$$

$$\therefore S_{\triangle AEF} = \frac{1}{2}AF \cdot EF$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \times 3 \times \sqrt{3} \\
 &= \frac{3}{2} \sqrt{3}. \\
 \therefore \triangle AEF \text{ 的面积为 } \frac{3}{2} \sqrt{3}.
 \end{aligned}$$

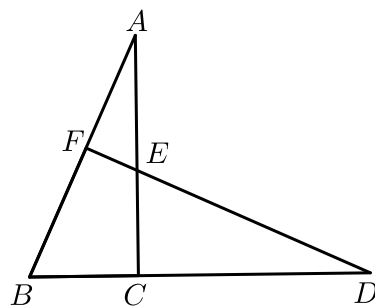
【标注】【知识点】等边三角形与全等

【重点强调】

2018年天津红桥区初三一模第17题3分

经典再现

17. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ，将 $\triangle ABC$ 绕点 C 顺时针旋转得到 $\triangle DEC$ ，使点 B 的对应点 E 恰好落在边 AC 上，点 A 的对应点为 D ，延长 DE 交 AB 于点 F ，则下列结论一定正确的是（ ）。



- A. $AC = DE$ B. $BC = EF$ C. $\angle AEF = \angle D$ D. $AB \perp DF$

【答案】D

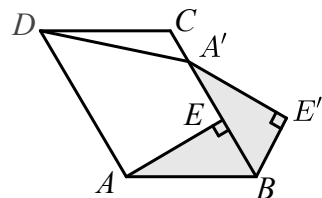
【解析】 $\because \triangle DEC$ 是由 $\triangle ABC$ 绕点 C 顺时针旋转得到的，
 $\therefore AC = DC$ ， $BC = EC$ ， $\angle D = \angle A$ ．故A、B、C错误；
 $\because \angle ACB = 90^\circ$ ，
 $\therefore \angle B + \angle A = 90^\circ$ ，
 $\therefore \angle B + \angle D = 90^\circ$ ．
 $\therefore \angle BFD = 90^\circ$ ，
 则 $AB \perp DF$ ，故D正确．
 故选D．

【标注】【知识点】旋转的性质

【重点强调】

2020年天津中考真题第11题3分

18. 如图，已知平行四边形 $ABCD$ 中， $AE \perp BC$ 于点 E ，以点 B 为中心，取旋转角等于 $\angle ABC$ ，把 $\triangle BAE$ 顺时针旋转，得到 $\triangle BA'E'$ ，连接 DA' 。若 $\angle ADC = 60^\circ$ ， $\angle ADA' = 50^\circ$ ，则 $\angle DA'E'$ 的大小为（ ）。



- A. 130° B. 150° C. 160° D. 170°

【答案】 C

【解析】 在平行四边形 $ABCD$ 中，

$$\therefore \angle ADC = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle ABC = 60^\circ.$$

$$\therefore AE \perp BC,$$

$$\therefore \angle AEB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BAE = 30^\circ.$$

由旋转性质可得， $\angle BA'E' = \angle BAE = 30^\circ$ ，

$\therefore$ 在平行四边形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ，

$$\therefore \angle ADA' + \angle DA'B = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle ADA' = 50^\circ,$$

$$\therefore \angle DA'B = 130^\circ,$$

$$\therefore \angle DA'E' = \angle DA'B + \angle BA'E' = 130^\circ + 30^\circ = 160^\circ.$$

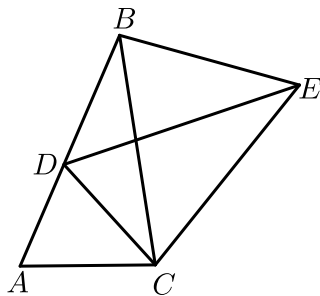
【标注】【知识点】旋转的性质

【重点强调】

2015年天津中考第11题（3分）

平行四边形的对应角相等，互余倒角，平行线的性质（同旁内角互补）

19. 如图，将 $\triangle ABC$ 绕点 C 顺时针旋转得到 $\triangle DEC$ ，使点 A 的对应点 D 恰好落在边 AB 上，点 B 的对应点为 E ，连接 BE ，下列结论一定正确的是（ ）。



A. $AC = AD$

B. $AB \perp EB$

C. $BC = DE$

D. $\angle A = \angle EBC$

【答案】 D

【解析】 由旋转性质可知，

$$AC = CD, AC \neq AD,$$

$\therefore$ A选项是错误的；

又由旋转性质可知， $BC = EC, BC \neq DE$ ，

$\therefore$ C选项是错误的；

由旋转性质可知， $\angle ACB = \angle DCE$ ，

$$\therefore \angle ACB = \angle ACD + \angle DCB, \angle DCE = \angle ECB + \angle DCB,$$

$$\therefore \angle ACD = \angle ECB,$$

$$\therefore AC = CD, BC = CE,$$

$$\therefore \angle A = \angle CDA = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle ACD), \angle EBC = \angle CEB = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle ECB),$$

$$\therefore \angle A = \angle EBC,$$

$\therefore$ D选项是正确的，

由题意无法推出 $\angle ABE = 90^\circ$ ，

$\therefore$ B选项是错误的。

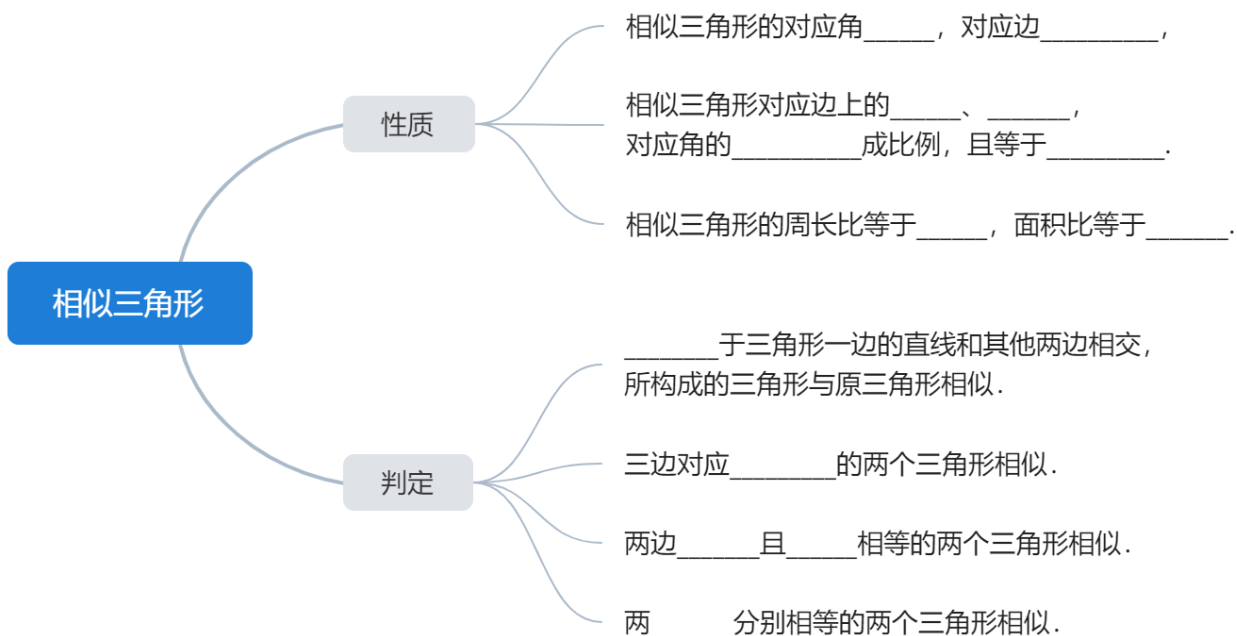
【标注】【知识点】旋转性质综合应用

【重点强调】

2019年天津中考第11题（3分）

全等三角形的对应边相等，可推导等腰三角形，结合旋转角对应相等倒角

二、相似三角形



教法备注

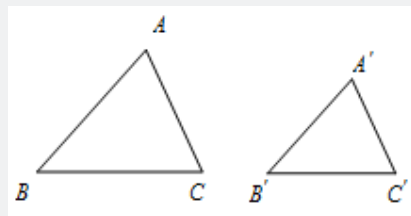
1. 性质

(1) 相似三角形对应角相等, 对应边成比例.

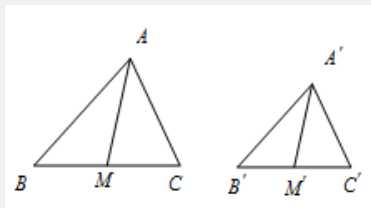
如图, $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$, 则有

$$\angle A = \angle A', \angle B = \angle B', \angle C = \angle C';$$

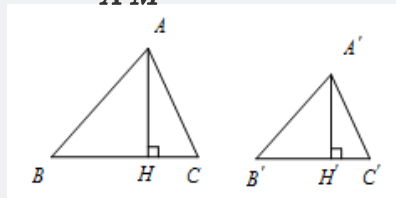
$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'} = k \text{ (} k \text{ 为相似比)}.$$



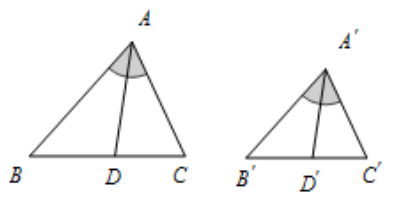
(2) 相似三角形的对应边上的中线, 高线 and 对应角的平分线成比例, 都等于相似比.



①如图, $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$, AM 是 $\triangle ABC$ 中 BC 边上的中线, $A'M'$ 是 $\triangle A'B'C'$ 中 $B'C'$ 边上的中线, 则有 $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'} = k = \frac{AM}{A'M'}$ (k 为相似比).



②如图, $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$, AH 是 $\triangle ABC$ 中 BC 边上的高线, $A'H'$ 是 $\triangle A'B'C'$ 中 $B'C'$ 边上的高线, 则有 $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'} = k = \frac{AH}{A'H'}$ (k 为相似比).

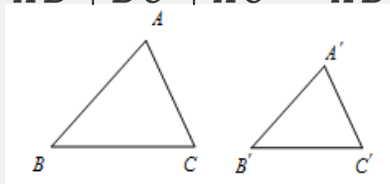


③如图, $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$, AD 是 $\triangle ABC$ 中 $\angle BAC$ 的角平分线, $A'D'$ 是 $\triangle A'B'C'$ 中 $\angle B'A'C'$ 的角平分线, 则有 $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'} = k = \frac{AD}{A'D'}$ (k 为相似比)。

(3) 相似三角形周长的比等于相似比。

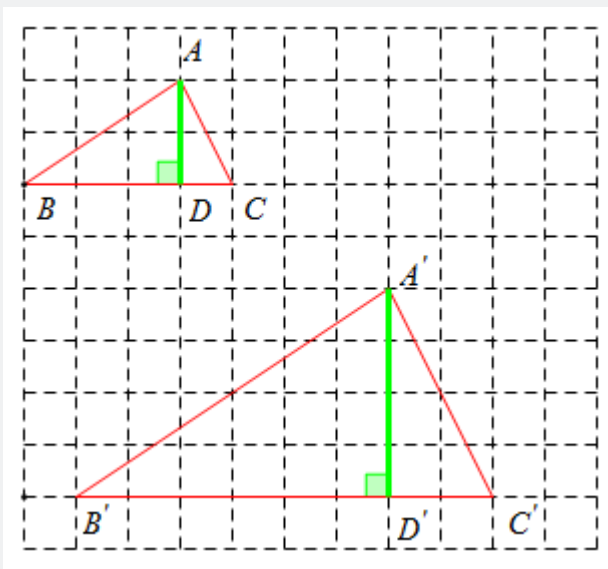
如图, $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$, 则有

$$\frac{AB + BC + AC}{A'B' + B'C' + A'C'} = \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'} = k;$$



(4) 相似三角形的面积比等于相似比的平方。

如图, $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$, 则有

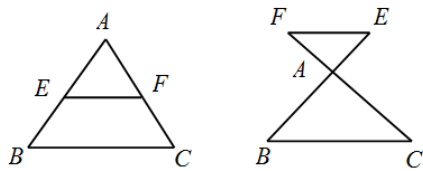


$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A'B'C'}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot BC \cdot AD}{\frac{1}{2} \cdot B'C' \cdot A'D'} = \frac{BC}{B'C'} \cdot \frac{AD}{A'D'} = k^2.$$

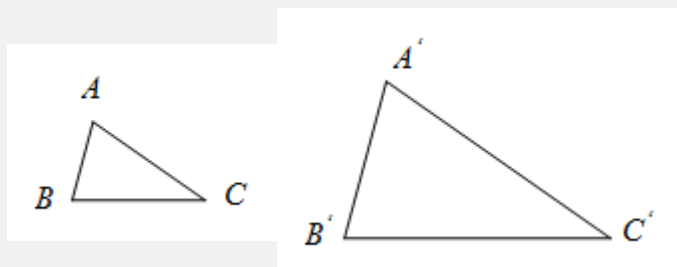
2.判定

(1) 平行于三角形一边的直线和其他两边相交, 所构成的三角形与原三角形相似。

已知 $BC \parallel EF$, 则 $\triangle AEF \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC} = \frac{EF}{BC}$ 。

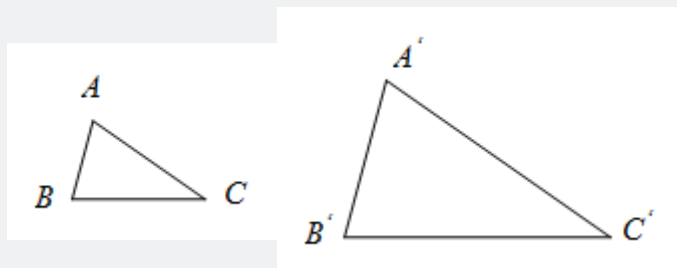


(2) 三边对应成比例的两个三角形相似.



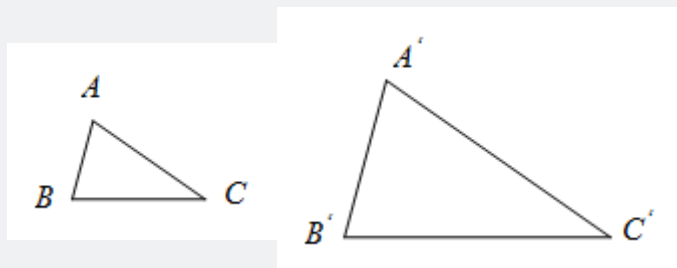
$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$

(3) 两边成比例且夹角相等的两个三角形相似.



$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}, \angle A = \angle A' \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$

(4) 两角分别相等的两个三角形相似.



$$\angle A = \angle A', \angle B = \angle B' \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$

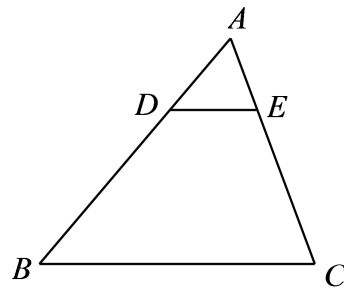
直角三角形相似的判定方法

(1) 如果两个直角三角形满足一个锐角相等, 那么这两个直角三角形相似.

(2) 如果两个直角三角形的直角边成比例, 那么这两个三角形相似.

(3) 如果两个直角三角形的斜边和一条直角边成比例, 那么这两个三角形相似 (**HL**)

20. 如图所示，在 $\triangle ABC$ 中， $DE \parallel BC$ ，若 $AD = 1$ ， $BD = 2$ ，则 $\frac{DE}{BC}$ 的值为（ ）.



- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{1}{4}$ D. $\frac{1}{2}$

【答案】A

【解析】 $\because DE \parallel BC$,

$$\therefore \triangle ADE \sim \triangle ABC,$$

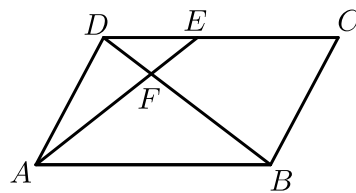
$$\therefore \frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AB} = \frac{AD}{AD + DB} = \frac{1}{3}.$$

【标注】【知识点】相似A字型

【重点强调】

2015年天津武清区初三三模第7题3分

21. 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中， E 为 CD 上一点，连接 AE 、 BD ，且 AE 、 BD 交于点 F ，
 $DE : EC = 2 : 3$ ，则 $S_{\triangle DEF} : S_{\triangle ABF} =$ （ ）.



- A. 2 : 3 B. 4 : 9 C. 4 : 25 D. 2 : 5

【答案】C

【解析】 $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$$\therefore DC \parallel AB, CD = AB.$$

$$\therefore \triangle DFE \sim \triangle BFA,$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle DEF}}{S_{\triangle ABF}} = \left(\frac{DE}{AB}\right)^2,$$

$$\because DE : EC = 2 : 3,$$

$$\therefore DE : DC = DE : AB = 2 : 5 ,$$

$$\therefore S_{\triangle DEF} : S_{\triangle ABF} = 4 : 25 .$$

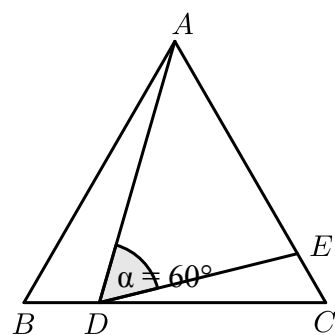
故选C .

【标注】【知识点】根据平行四边形边的性质计算与证明

【重点强调】

2015年天津红桥区初三一模第10题3分

22. 如图, $\triangle ABC$ 是等边三角形, 点D、E分别在BC、AC上, 且 $\angle ADE = 60^\circ$, 若 $\triangle ABC$ 的边长为6, $CD = 2BD$, 则AD的长为 _____ .



【答案】 $2\sqrt{7}$

【解析】 $\because \triangle ABC$ 是等边三角形,

$$\therefore \angle B = \angle C = \angle BAC = 60^\circ ,$$

$$\therefore \angle ADC = \angle B + \angle BAD , \angle ADE = 60^\circ ,$$

$$\therefore \angle BAD = \angle CDE ,$$

$$\therefore \triangle ABD \sim \triangle DCE ,$$

$$\therefore \frac{AB}{DC} = \frac{BD}{CE} ,$$

$$\therefore AB = BC = CA = 6 , CD = 2BD$$

$$\therefore BD = 2 , CD = 4 ,$$

$$\therefore \frac{6}{4} = \frac{2}{CE} ,$$

$$\therefore CE = \frac{4}{3} ,$$

$$\therefore AE = 6 - \frac{4}{3} = \frac{14}{3} ,$$

$$\therefore \triangle ADC \sim \triangle AED ,$$

$$\therefore \frac{AE}{AD} = \frac{AD}{AC} ,$$

$$\therefore AD^2 = AE \times AC = \frac{14}{3} \times 6 = 28 ,$$

$$\therefore AD = 2\sqrt{7}.$$

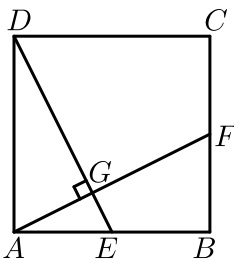
故答案为： $2\sqrt{7}$ 。

【标注】【知识点】相似三角形的性质与判定综合

【重点强调】

2014年天津南开区初三二模第17题3分

23. 如图，在正方形 $ABCD$ 中，点 E 为 AB 的中点， $AF \perp DE$ 于点 G ，则 $\frac{GA}{GD}$ 等于（ ）。



A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

B. $\frac{1}{2}$

C. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

D. $\frac{\sqrt{5}}{5}$

【答案】B

【解析】 $\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形， $AF \perp DE$ ，

$$\therefore \angle DGA = \angle DAE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ADG = \angle ADG,$$

$$\therefore \triangle AGD \sim \triangle EAD,$$

$$\therefore \frac{GA}{GD} = \frac{AE}{AD},$$

$$\therefore E \text{ 为 } AB \text{ 的中点,}$$

$$\therefore \frac{GA}{GD} = \frac{AE}{AD} = \frac{1}{2}.$$

故选B。

【标注】【知识点】相似三角形的性质与判定综合

【知识点】相似三角形的性质

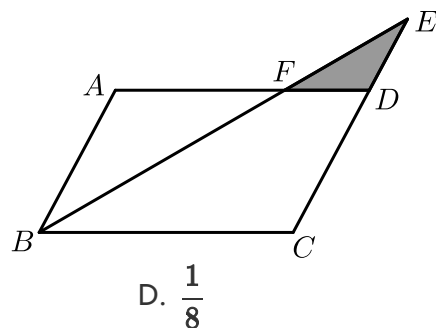
【知识点】正方形的性质

【能力】推理论证能力

【重点强调】

2015年天津宝坻区初三一模第7题3分

24. 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中， E 是 CD 延长线上一点， BE 与 AD 交于点 F ，若 $CD = 2DE$ ，则 $\frac{S_{\triangle DEF}}{S_{\triangle ABF}}$ 等于（ ）.



- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. $\frac{1}{4}$ D. $\frac{1}{8}$

【答案】 C

【解析】 $\because AB \parallel CE$,

$$\therefore \angle ABF = \angle BEC.$$

$$\text{又} \because \angle AFB = \angle EFD$$

$$\therefore \triangle FED \sim \triangle FAB.$$

$$\text{又} \because CD = 2DE = AB,$$

$$\therefore \frac{AB}{DE} = 2:1.$$

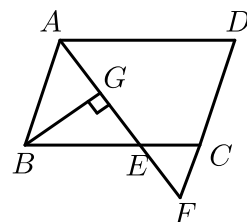
$$\therefore \frac{S_{\triangle DEF}}{S_{\triangle ABF}} = \frac{1}{4}.$$

【标注】【知识点】相似三角形的性质与判定综合

【重点强调】

2015年天津北辰区初三一模第8题3分

25. 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中， $AB = 6$ ， $AD = 9$ ， $\angle BAD$ 的平分线交 BC 于点 E ，交 DC 的延长线于点 F ， $BG \perp AE$ ，垂足为 G ， $BG = 4\sqrt{2}$ ，则 $\triangle CEF$ 的周长为（ ）.



- A. 8 B. 9.5 C. 10 D. 11.5

【答案】 A

【解析】 $\because$ 在平行四边形 $ABCD$ 中, $AB = CD = 6$, $AD = BC = 9$, $\angle BAD$ 的平分线交 BC 于点 E ,

$\therefore AB \parallel DC$, $\angle BAF = \angle DAF$,

$\therefore \angle BAF = \angle F$,

$\therefore \angle DAF = \angle F$,

$\therefore AD = FD$,

$\therefore \triangle ADF$ 是等腰三角形,

同理 $\triangle ABE$ 是等腰三角形,

$AD = DF = 9$;

$\therefore AB = BE = 6$,

$\therefore CF = 3$;

$\therefore$ 在 $\triangle ABG$ 中, $BG \perp AE$, $AB = 6$, $BG = 4\sqrt{2}$, 可得: $AG = 2$,

又 $BG \perp AE$,

$\therefore AE = 2AG = 4$,

$\therefore \triangle ABE$ 的周长等于 16,

又平行四边形 $ABCD$

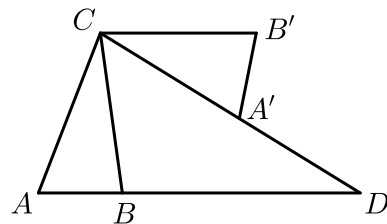
$\therefore \triangle CEF \sim \triangle BEA$, 相似比为 $1:2$,

$\therefore \triangle CEF$ 的周长为 8.

故选: A.

【标注】 【知识点】相似三角形的性质与判定综合

26. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = 2$, $AC = 4$, 将 $\triangle ABC$ 绕点 C 按逆时针方向旋转得到 $\triangle A'B'C$, 使 $CB' \parallel AB$, 分别延长 AB , CA' 相交于点 D , 则线段 BD 的长为 _____.



【答案】 6

【解析】 $\because$ 将 $\triangle ABC$ 绕点 C 按逆时针方向旋转得到 $\triangle A'B'C$,

$\therefore AC = CA' = 4$, $AB = B'A' = 2$, $\angle A = \angle CA'B'$,

$\therefore CB' \parallel AB$,

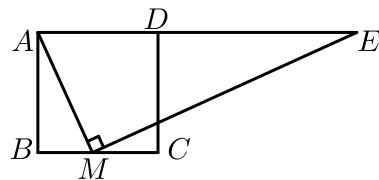
$$\begin{aligned}
&\therefore \angle B'CA' = \angle D, \\
&\therefore \triangle CAD \sim \triangle B'A'C, \\
&\therefore \frac{CA}{A'B'} = \frac{AD}{A'C}, \\
&\therefore \frac{4}{2} = \frac{AD}{4}, \\
&\text{解得 } AD = 8, \\
&\therefore BD = AD - AB = 8 - 2 = 6.
\end{aligned}$$

【标注】【知识点】相似三角形的性质与判定综合

【重点强调】

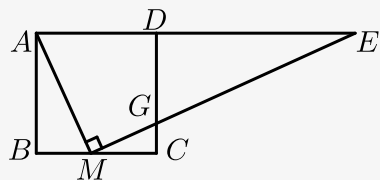
2015年天津河北区初三一模第17题3分

27. 如图，正方形 $ABCD$ 中， M 为 BC 上一点， $ME \perp AM$ ， ME 交 AD 的延长线于点 E ，若 $AB = 12$ ， $BM = 5$ ，则 DE 的长为 _____ .



【答案】 $\frac{109}{5}$

【解析】 ∵ 四边形 $ABCD$ 是正方形， $AB = 12$ ， $BM = 5$ ，



$$\begin{aligned}
&\therefore MC = 12 - 5 = 7, \\
&\therefore ME \perp AM, \\
&\therefore \angle AME = 90^\circ, \\
&\therefore \angle AMB + \angle CMG = 90^\circ, \\
&\therefore \angle AMB + \angle BAM = 90^\circ, \\
&\therefore \angle BAM = \angle CMG, \angle B = \angle C = 90^\circ, \\
&\therefore \triangle ABM \sim \triangle MCG, \\
&\therefore \frac{AB}{MC} = \frac{BM}{CG}, \text{ 即 } \frac{12}{7} = \frac{5}{CG}, \text{ 解得 } CG = \frac{35}{12}, \\
&\therefore DG = 12 - \frac{35}{12} = \frac{109}{12}. \\
&\therefore AE \parallel BC,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \angle E &= \angle CMG, \angle EDG = \angle C, \\ \therefore \triangle MCG &\sim \triangle EDG, \\ \therefore \frac{MC}{DE} &= \frac{CG}{DG}, \text{ 即 } \frac{7}{DE} = \frac{\frac{35}{12}}{\frac{109}{12}}, \\ \text{解得 } DE &= \frac{109}{5}. \end{aligned}$$

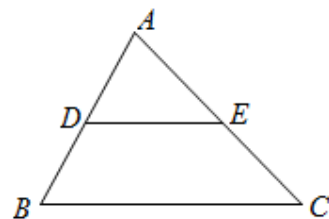
【标注】【知识点】相似三角形的性质与判定综合

【重点强调】

2018年天津西青区初三一模第17题3分

🕒 经典再现

28. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $DE \parallel BC$ ，分别交 AB ， AC 于点 D ， E ．若 $AD = 3$ ， $DB = 2$ ， $BC = 6$ ，则 DE 的长为 _____ ．



【答案】 $\frac{18}{5}$

【解析】 $\because DE \parallel BC$ ，

$$\therefore \triangle ADE \sim \triangle ABC,$$

$$\therefore \frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC},$$

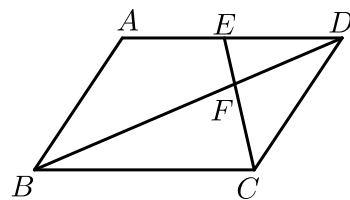
$$\therefore \frac{3}{2+3} = \frac{DE}{6}, \text{ 即 } DE = \frac{18}{5}.$$

【标注】【知识点】相似三角形的性质与判定综合

【重点强调】

2015年天津中考真题第16题

29. 如图，平行四边形 $ABCD$ 中，点 E 是边 AD 的中点， EC 交对角线 BD 于点 F ，则 $EF:FC$ 等于 () ．



A. 3 : 2

B. 3 : 1

C. 1 : 1

D. 1 : 2

【答案】 D

【解析】 在平行四边形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $AD = BC$,

$$\therefore \angle EDF = \angle CBF, \angle DEF = \angle BCF,$$

$$\therefore \triangle DEF \sim \triangle BCF,$$

$$\therefore \frac{EF}{FC} = \frac{DE}{BC}.$$

$\because E$ 为 AD 的中点,

$$\therefore DE = AE = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2}BC,$$

$$\therefore \frac{DE}{BC} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \frac{EF}{FC} = \frac{1}{2}.$$

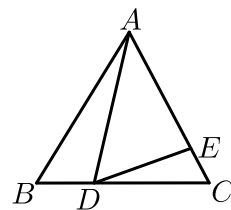
故选D.

【标注】【知识点】利用平行四边形对角线的性质计算与证明

【重点强调】

2014年天津中考真题第8题

30. 如图, 在边长为9的正三角形 ABC 中, $BD = 3$, $\angle ADE = 60^\circ$, 则 AE 的长为 _____.



【答案】 7

【解析】 $\because \triangle ABC$ 是等边三角形,

$$\therefore \angle B = \angle C = 60^\circ, AB = BC,$$

$$\therefore CD = BC - BD = 9 - 3 = 6,$$

$$\therefore \angle BAD + \angle ADB = 120^\circ.$$

$$\therefore \angle ADE = 60^\circ ,$$

$$\therefore \angle ADB + \angle EDC = 120^\circ ,$$

$$\therefore \angle DAB = \angle EDC ,$$

$$\text{又} \because \angle B = \angle C = 60^\circ ,$$

$$\therefore \triangle ABD \sim \triangle DCE , \text{ 则 } \frac{AB}{BD} = \frac{DC}{CE} , \text{ 即 } \frac{9}{3} = \frac{6}{CE} ,$$

$$\text{解得 } CE = 2 ,$$

$$\text{故 } AE = AC - CE = 9 - 2 = 7 .$$

【标注】【知识点】相似三角形的性质与判定综合

【重点强调】

2013年天津中考真题第17题3分