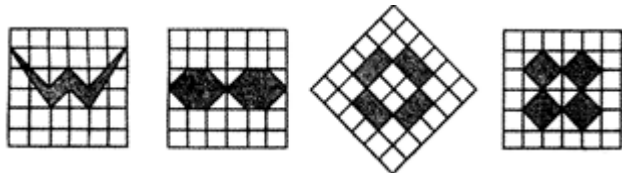


综合复习（二）练习

一、旋转

练习

1. 以下四个图形中，既是轴对称图形又是中心对称图形的有()。

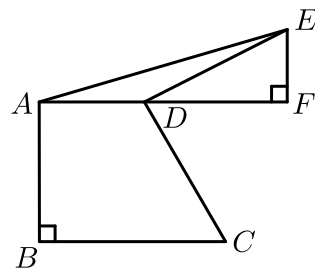


- A. 4个 B. 3个 C. 2个 D. 1个

【答案】 B

【标注】 【知识点】 判断轴对称图形和中心对称图形

2. 如图，梯形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ，且 $AB \perp BC$ ， $AD = 3$ ， $BC = 5$ ，将腰 DC 绕点 D 逆时针方向旋转 90° 至 DE ，连接 AE ，过点 E 作 $EF \perp AD$ 交 AD 的延长线于 F ，则 EF 的长为 _____ 。



【答案】 2

【解析】 过点 D 作 $DH \perp BC$ 于 H ，

$$\because AB \perp BC,$$

$$\therefore AB \parallel DH,$$

$$\text{又} \because AD \parallel BC,$$

$$\therefore AD \perp DH,$$

$$\therefore AD = BH = 3,$$

$$\because BC = 5,$$

$$\therefore CH = BC - BH = 5 - 3 = 2,$$

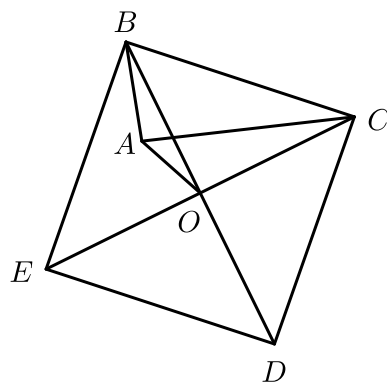
$\therefore DC$ 绕 D 逆时针旋转 90° ,
 $\therefore \angle EDF + \angle CDF = 90^\circ$,
 $\therefore \angle HDC + \angle CDF = 90^\circ$,
 $\therefore \angle HDC = \angle EDF$,
 在 $\triangle HDC$ 和 $\triangle FDE$ 中 ,

$$\begin{cases} \angle HDC = \angle FDE \\ \angle DHC = \angle DFE , \\ DC = DE \end{cases}$$

 $\therefore \triangle HDC \cong \triangle FDE (\text{AAS})$
 $\therefore EF = HC = 2$.

【标注】【知识点】旋转型全等

3. 如图，以 $\text{Rt}\triangle ABC$ 的斜边 BC 为一边作正方形 $BCDE$ ，设正方形的中心为 O ，连接 AO ，如果 $AB = 3$ ， $AO = 2\sqrt{2}$ ，那么 AC 的长等于（ ）。



A. 12

B. 7

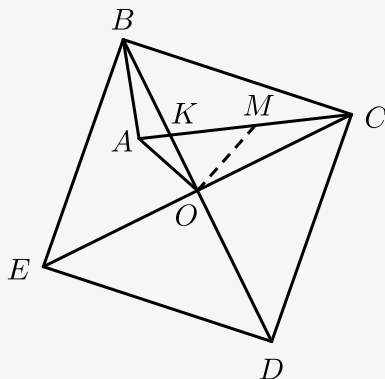
C. $\sqrt{17}$

D. $6\sqrt{2}$

【答案】B

【解析】如图，在 CA 上截取 $CM = AB$ ，连接 OM ，

$\therefore$ 四边形 $BCDE$ 是正方形，
 $\therefore OB = OC$ ，
 $\angle BOC = 90^\circ$ ，
 $\therefore \angle ABO + \angle AKB = 90^\circ$ ，
 $\therefore \angle OCM + \angle OKC = 90^\circ$ ，
 $\therefore \angle AKB = \angle OKC$ ，
 $\therefore \angle ABO = \angle OCM$ ，



在 $\triangle ABO$ 与 $\triangle MCO$ 中，

$$\begin{cases} AB = CM \\ \angle ABO = \angle MCO, \\ BO = CO \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABO \cong \triangle MCO$,

$\therefore AO = MO$, $\angle AOB = \angle COM$,

$\therefore \angle AOM = \angle BOC = 90^\circ$,

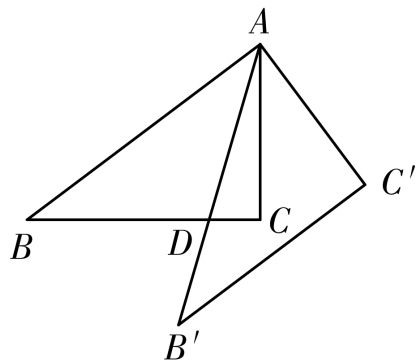
$\therefore AO = OM = 2\sqrt{2}$, $AB = CM = 3$,

$\therefore AM = \sqrt{AO^2 + MO^2} = 4$,

$\therefore AC = AM + CM = 4 + 3 = 7$.

【标注】【知识点】等腰直角三角形的手拉手模型

4. 如图， $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $AC = 3$ ， $BC = 4$ ，将 $\triangle ABC$ 绕点 A 逆时针旋转得到 $\triangle AB'C'$ ， AB' 与 BC 相交于点 D ，当 $B'C' \parallel AB$ 时， $CD = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



【答案】 $\frac{7}{8}$

【解析】 解：设 $CD = x$ ，

$\therefore B'C' \parallel AB$ ，

$\therefore \angle BAD = \angle B'$ ，

由旋转的性质得： $\angle B = \angle B'$ ，

$\therefore \angle BAD = \angle B$ ，

$\therefore AD = BD = 4 - x$ ，

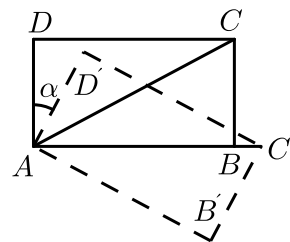
$\therefore (4 - x)^2 = x^2 + 3^2$ ，

解得： $x = \frac{7}{8}$ 。

故答案为： $\frac{7}{8}$ 。

【标注】【知识点】旋转的性质

5. 如图，在长方形 $ABCD$ 中， $AB = \sqrt{3}$ ， $AD = 1$ ，该长方形绕点 A 顺时针旋转 α 度得长方形 $AB'C'D'$ ，点 C' 落在 AB 的延长线上，则线段 BC' 的长是 _____ 。

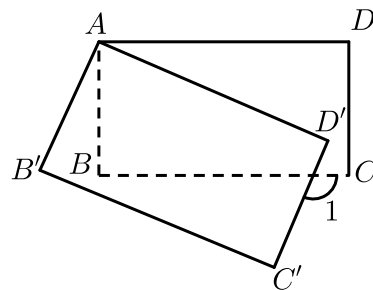


【答案】 $2 - \sqrt{3}$

【解析】 由题意可得： $AC = AC'$ ，
 $\because AB = \sqrt{3}$ ， $AD = 1$ ，
 $\therefore AC = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$ ，
 $\therefore BC' = AC' - AB = 2 - \sqrt{3}$ 。

【标注】 【知识点】 利用旋转求线段长

6. 如图，将矩形 $ABCD$ 绕点 A 顺时针旋转到矩形 $AB'C'D'$ 的位置，旋转角为 α ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$)。若 $\angle 1 = 112^\circ$ ，则 $\angle \alpha$ 的大小是 ()。



A. 68°

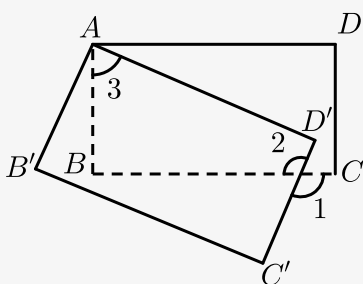
B. 20°

C. 28°

D. 22°

【答案】 D

【解析】 如图所示：



$\because$ 矩形 $ABCD$ 绕点 A 顺时针旋转到矩形 $AB'C'D'$ 的位置，

$$\therefore \angle ADC = \angle D' = 90^\circ, \angle DAD' = \alpha.$$

$$\therefore \angle ABC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BAD' = 180^\circ - \angle 2.$$

$$\text{而 } \angle 2 = \angle 1 = 112^\circ,$$

$$\therefore \angle BAD' = 180^\circ - 112^\circ = 68^\circ,$$

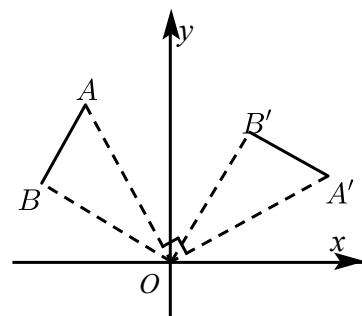
$$\therefore \angle DAD' = 90^\circ - 68^\circ = 22^\circ,$$

$$\text{即 } \alpha = 22^\circ.$$

故选D.

【标注】【知识点】旋转的性质

7. 如图, 将线段 AB 绕点 O 顺时针旋转 90° 得到线段 $A'B'$, 那么 $A(-2, 5)$ 的对应点 A' 的坐标是().



A. (2, 5)

B. (5, 2)

C. (2, -5)

D. (5, -2)

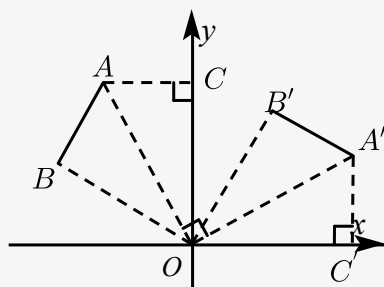
【答案】 B

【解析】 $\because$ 线段 AB 绕点 O 顺时针旋转 90° 得到线段 $A'B'$,

$$\therefore \triangle ABO \cong \triangle A'B'O, \angle AOA' = 90^\circ, AO = A'O.$$

作 $AC \perp y$ 轴于点 C , $A'C' \perp x$ 轴于点 C' ,

$\therefore$



$$\angle ACO = \angle A'C'O = 90^\circ.$$

$$\therefore \angle COC' = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle AOA' - \angle COA' = \angle COC' - \angle COA',$$

$$\therefore \angle AOC = \angle A'OC'.$$

在 $\triangle ACO$ 和 $\triangle A'C'O$ 中,

$$\begin{cases} \angle ACO = \angle A'C'O \\ \angle AOC = \angle A'OC' , \\ AO = A'O \end{cases}$$

$\therefore \triangle ACO \cong \triangle A'C'O$ (AAS) ,

$\therefore AC = A'C' , CO = C'O .$

$\therefore A(-2, 5) ,$

$\therefore AC = 2 , CO = 5 ,$

$\therefore A'C' = 2 , OC' = 5 ,$

$\therefore A'(5, 2) .$

【标注】【知识点】旋转性质综合应用

【知识点】旋转的性质

【知识点】全等三角形的性质

【知识点】AAS

【知识点】坐标系中的旋转-图形关于原点的旋转

【思想】数形结合思想

【能力】推理论证能力

练习

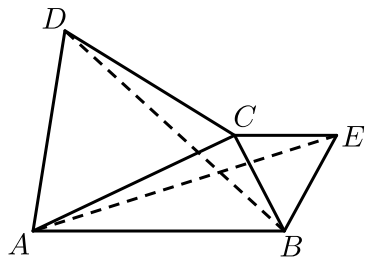
8. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，分别以 AC ， BC 为边作等边三角形 ACD 和等边三角形 BCE ．设 $\triangle ACD$ 、 $\triangle BCE$ 、 $\triangle ABC$ 的面积分别是 S_1 、 S_2 、 S_3 ，现有如下结论：

① $S_1 : S_2 = AC^2 : BC^2$.

② 连接 AE ， BD ，则 $\triangle BCD \cong \triangle ECA$.

③ 若 $AC \perp BC$ ，则 $S_1 \cdot S_2 = \frac{3}{4} S_3^2$.

其中结论正确的序号是 _____ .



【答案】①②③

【解析】① $S_1 : S_2 = AC^2 : BC^2$ 正确，

$\therefore \triangle ADC$ 与 $\triangle BCE$ 是等边三角形，

$$\therefore \triangle ADC \sim \triangle BCE,$$

$$\therefore S_1 : S_2 = AC^2 : BC^2.$$

② $\triangle BCD \cong \triangle ECA$, 正确,

证明: $\because \triangle ADC$ 与 $\triangle BCE$ 是等边三角形,

$$\therefore \angle ACD = \angle BCE = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle ACD + \angle ACB = \angle BCE + \angle ACB,$$

$$\text{即 } \angle ACE = \angle DCB,$$

在 $\triangle ACE$ 与 $\triangle DCB$ 中,

$$\begin{cases} AC = DC \\ \angle ACE = \angle DCB, \\ CE = CB \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ECA \cong \triangle BCD (\text{SAS}).$$

③ 若 $AC \perp BC$, 则 $S_1 \cdot S_2 = \frac{3}{4} S_3^2$ 正确,

设等边三角形 ADC 的边长 = a , 等边三角形 BCE 边长 = b , 则 $\triangle ADC$ 的高 = $\frac{\sqrt{3}}{2}a$,

$$\triangle BCE \text{ 的高} = \frac{\sqrt{3}}{2}b,$$

$$\therefore S_1 = \frac{1}{2}a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2, S_2 = \frac{1}{2}b \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}b = \frac{\sqrt{3}}{4}b^2,$$

$$\therefore S_1 \cdot S_2 = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}b^2 = \frac{3}{16}a^2b^2,$$

$$\therefore S_3 = \frac{1}{2}ab,$$

$$\therefore S_3^2 = \frac{1}{4}a^2b^2,$$

$$\therefore S_1 \cdot S_2 = \frac{3}{4}S_3^2.$$

【标注】【知识点】相似三角形的性质与判定综合

9. 我们给出如下定义: 若一个四边形中存在一组对边的平方和等于另一组对边的平方和, 则称这个四边形为等平方和四边形.

(1) 写出一个你所学过的特殊四边形中是等平方和四边形的图形的名称: _____.

(2) 如图1, 在梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $AC \perp BD$, 垂足为 O . 求证:

$$AD^2 + BC^2 = AB^2 + DC^2, \text{ 即四边形 } ABCD \text{ 是等平方和四边形.}$$

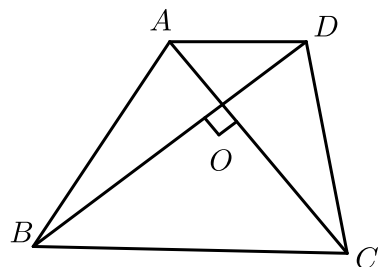


图 1

- (3) 如果将图(1)中的 $\triangle AOD$ 绕点 O 按逆时针方向旋转 α 度($0 < \alpha < 90^\circ$)后得到图2, 那么四边形 $ABCD$ 能否成为等平方和四边形? 若能, 请你证明; 若不能, 请说明理由.

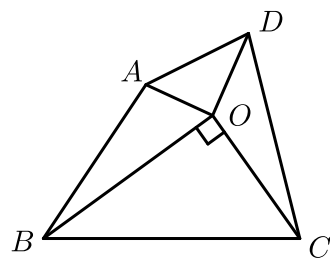


图 2

【答案】 (1) 菱形或正方形

(2) 证明见解析.

(3) 四边形 $ABCD$ 是等平方和四边形, 证明见解析.

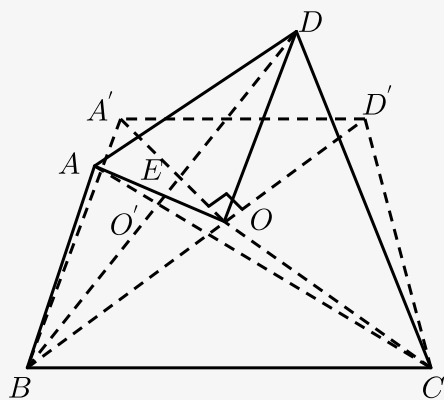
【解析】 (1) 菱形或正方形.

(2) $\because AC \perp BD$,

$$\therefore OA^2 + OD^2 = AD^2, OB^2 + OC^2 = BC^2, OA^2 + OB^2 = AB^2, \\ OD^2 + OC^2 = DC^2.$$

$$\therefore AD^2 + BC^2 = AB^2 + DC^2, \text{ 即四边形 } ABCD \text{ 是等平方和四边形.}$$

(3) 四边形 $ABCD$ 是等平方和四边形.



解法一: 原梯形记为 $A'BCD'$, 依题意旋转后得四边形 $ABCD$, 连结 AC 、 BD 交于点 O' ,

$$\because A'D' \parallel BC,$$

$$\therefore \triangle A'OD' \sim \triangle COB.$$

$$\therefore \frac{OA'}{OC} = \frac{OD'}{OB}.$$

$$\because OA' = OA, OD' = OD,$$

$$\therefore \frac{OA}{OC} = \frac{OD}{OB}.$$

$$\therefore \angle AOA' = \angle DOD' = \alpha,$$

$$\therefore \angle AOC = \angle DOB = 180^\circ - \alpha$$

$$\text{又} \because \frac{OA}{OC} = \frac{OD}{OB},$$

$$\therefore \triangle AOC \sim \triangle DOB$$

$$\therefore \angle CAO = \angle BDO.$$

$$\text{又} \because \angle AEB = \angle OED,$$

$$\therefore \angle AO'D = \angle AOD = 90^\circ.$$

$$\text{由(2)的结论得: } AD^2 + BC^2 = AB^2 + DC^2.$$

即四边形 $ABCD$ 是等平方和四边形.

解法二: 连结 AC 、 BD ,

$$\therefore \angle AOD = \angle BOC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle AOC = \angle BOD.$$

$$\therefore \frac{OA}{OD} = \frac{OC}{OB},$$

$$\therefore \triangle AOC \sim \triangle DOB,$$

$$\therefore \angle ACO = \angle DBO,$$

$$\therefore AC \perp BD.$$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 对角线互相垂直,

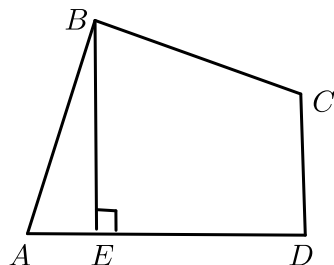
$$\therefore AD^2 + BC^2 = AB^2 + CD^2,$$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是等平方和四边形.

【标注】【知识点】与四边形有关的新定义

练习

10. 在四边形 $ABCD$ 中, $AB = BC$, $\angle ABC = \angle CDA = 90^\circ$, $BE \perp AD$ 于 E , 四边形 $ABCD$ 的面积为8, 求 BE 的长.



【答案】 $2\sqrt{2}$.

【解析】 根据 $AB = BC$ 、 $\angle ABC = 90^\circ$ 将 $\triangle ABE$ 绕点 B 逆时针方向旋转 90° ,

如图，

$$\therefore \angle ABC = \angle CDA = 90^\circ,$$

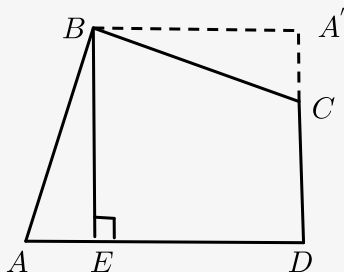
$$\therefore \angle A + \angle BCD = 180^\circ,$$

$\therefore A'、C、D$ 共线，

又 $\because BE \perp AD, BE = BA'$ ，

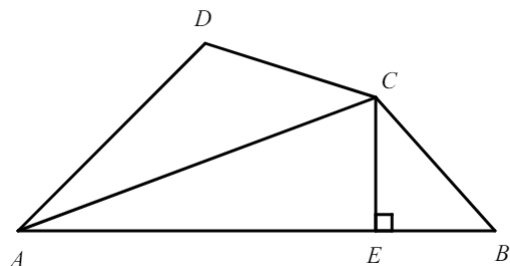
$\therefore$ 四边形 $A'BED$ 为正方形，且面积为8，

$$\therefore BE = 2\sqrt{2}.$$



【标注】【知识点】旋转性质综合应用

11. 已知：在四边形 $ABCD$ 中，过 C 作 $CE \perp AB$ 于 E ，并且 $CD = CB$ ， $\angle ABC + \angle ADC = 180^\circ$ ，若 $AE = 9$ ， $BE = 3$ ，则 AD 的长是 _____。



【答案】6

【解析】延长 EB 到 F 使得 $BF = AD$ ，

$$\therefore \angle D + \angle CBA = 180^\circ,$$

$$\angle CBA + \angle CBF = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle D = \angle CBF,$$

在 $\triangle ADC$ 和 $\triangle FBC$ 中，

$$\begin{cases} AD = FB \\ \angle ADC = \angle FBC, \\ DC = BC \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ADC \cong \triangle FBC \text{ (SAS)}$$

$$\therefore AC = CF,$$

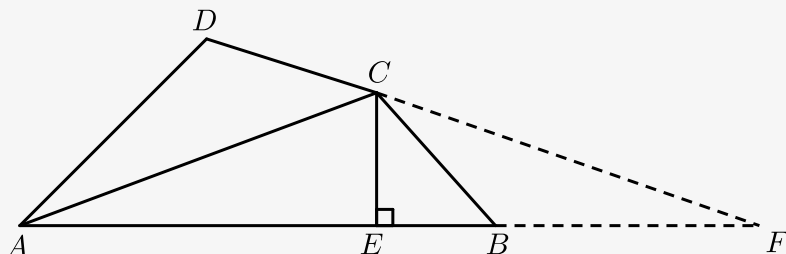
在 $\text{Rt}\triangle CEA$ 与 $\text{Rt}\triangle CEF$ 中，

$$\begin{cases} CA = CF \\ CE = CE \end{cases}$$

$\therefore \triangle CEA \cong \triangle CEF$ (HL) .

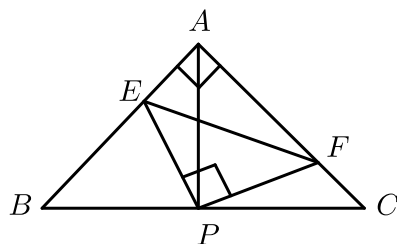
$\therefore EF = EA = 9$,

$\therefore AD = BF = EF - BE = 9 - 3 = 6$.



【标注】【知识点】截长补短

12. 已知 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ， $\angle BAC = 90^\circ$ ，直角 $\angle EPF$ 的顶点 P 是 BC 中点，两边 PE 、 PF 分别交 AB 、 AC 于点 E 、 F ，给出以下4个结论：① $AE = CF$ ；② $\triangle EPF$ 是等腰直角三角形；③ $S_{\text{四边形}AEPF} = \frac{1}{2}S_{\triangle ABC}$ ；④ $EF = AP$. 当 $\angle EPF$ 在 $\triangle ABC$ 内绕顶点 P 旋转时（点 E 不与 A 、 B 重合），上述结论中始终正确的有（ ） .



A. 1个

B. 2个

C. 3个

D. 4个

【答案】 C

【解析】 $\because AB = AC$ ， $\angle BAC = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle B = \angle C = 45^\circ$ ，

$\because P$ 是 BC 中点，

$\therefore AP \perp BC$ ，

$\angle BAP = \angle CAP = 45^\circ$ ， $AP = PC$ ，

$\because \angle EPF = 90^\circ$ ， $\angle APC = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle APE = \angle CPE$ ，

在 $\triangle AEP$ 和 $\triangle CFP$ 中，

$$\begin{cases} \angle BAP = \angle C \\ AP = PC \\ \angle APE = \angle CPE \end{cases},$$

$$\therefore \triangle AEP \cong \triangle CFP,$$

$$\therefore AE = CF,$$

$\therefore \triangle EPF$ 是等腰直角三角形,

故①②正确,

$$S_{\text{四边形}AEPF} = S_{\triangle AEP} + S_{\triangle AFP},$$

$$= S_{\triangle PFC} + S_{\triangle AFP},$$

$$= S_{\triangle APC},$$

$$\therefore S_{\text{四边形}AEPF} = \frac{1}{2} S_{\triangle ABC},$$

故③正确,

当 E 、 F 分别在 AB 、 AC 中点时, $EF = AP$, 故④不正确.

【标注】【知识点】等腰直角三角形与全等

13. 如图, $\angle MAN = 60^\circ$, AP 平分 $\angle MAN$, 点 B 是射线 AP 上一定点, 点 C 在直线 AN 上运动, 连接 BC , 将 $\angle ABC (0^\circ < \angle ABC < 120^\circ)$ 的两边射线 BC 和 BA 分别绕点 B 顺时针旋转 120° , 旋转后角的两边分别与射线 AM 交于点 D 和点 E .

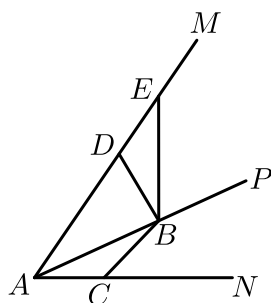


图 1

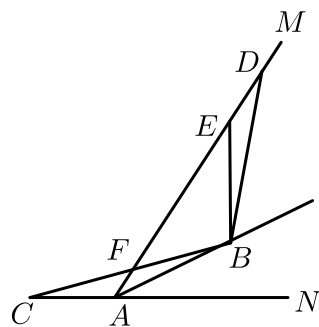


图 2

如图1, 当点 C 在射线 AN 上时,

- ① 请判断线段 BC 与 BD 的数量关系, 直接写出结论.
- ② 请探究线段 AC , AD 和 BE 之间的数量关系, 写出结论并证明.

【答案】 (1) ① $BC = BD$.

② $AD + AC = \sqrt{3}BE$, 证明见解析.

【解析】 (1) ① 如图1中, 作 $BG \perp AM$ 于 G , $BH \perp AN$ 于 H .

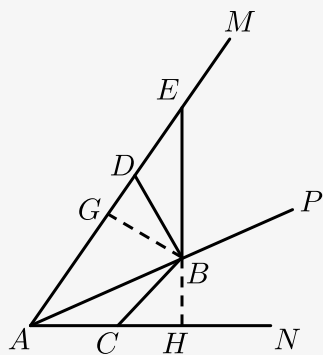


图 1

$\because \angle MAN = 60^\circ$,
 PA 平分 $\angle MAN$,
 $BG \perp AM$ 于 G ,
 $BH \perp AN$ 于 H ,
 $\therefore BG = BH$, $\angle GBH = \angle CBD = 120^\circ$,
 $\therefore \angle CBH = \angle GBD$,
 $\therefore \angle BGD = \angle BHC = 90^\circ$,
 $\therefore \triangle BGD \cong \triangle BHC$,
 $\therefore BD = BC$.

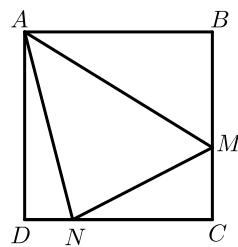
② $\because \angle ABE = 120^\circ$, $\angle BAE = 30^\circ$,
 $\therefore \angle BEA = \angle BAE = 30^\circ$,
 $\therefore BA = BE$, $\because BG \perp AE$,
 $\therefore AG = GE$, $EG = BE \cdot \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} BE$,
 $\therefore \triangle BGD \cong \triangle BHC$,
 $\therefore DG = CH$,
 $\therefore AB = AB$, $BG = BH$,
 $\therefore \text{Rt} \triangle ABG \cong \text{Rt} \triangle ABH$,
 $\therefore AG = AH$,
 $\therefore AD + AC = AG + DG + AH - CH = 2AG = \sqrt{3} BE$,
 $\therefore AD + AC = \sqrt{3} BE$.

【标注】【知识点】解直角三角形的综合应用

练习

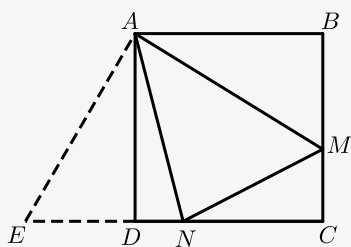
14.

如图，在正方形 $ABCD$ 中，点 M 、 N 为边 BC 和 CD 上的点， $\angle MAN = 45^\circ$ ， $MN = 2MC$ ，则 $\angle NAD = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



【答案】 15°

【解析】 如图，将 $\triangle ABM$ 绕点 A 顺时针旋转 90° 得 $\triangle ADE$ ，



则 $\angle EAN = \angle EAM - \angle MAN = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$ ，

则在 $\triangle EAN$ 和 $\triangle MAN$ 中，

$$\begin{cases} AE = AM \\ \angle EAN = \angle MAN, \\ AN = AN \end{cases}$$

$\therefore \triangle EAN \cong \triangle MAN (\text{SAS})$ ，

$\therefore \angle ANM = \angle ANE$ ，

$\because MN = 2MC$ ，

$\therefore \text{Rt}\triangle MNC$ 中， $\angle MNC = 30^\circ$ ，

$\therefore \angle ANE + \angle ANM + \angle MNC = 180^\circ$ ，

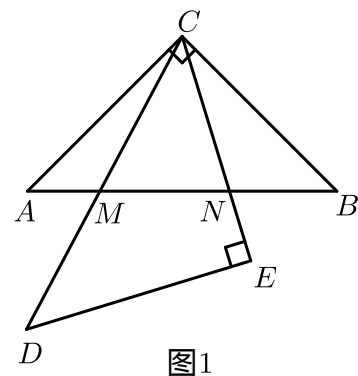
$\therefore \angle ANE = 75^\circ$ ，

$\therefore \text{Rt}\triangle ADN$ 中， $\angle NAD = 15^\circ$ 。

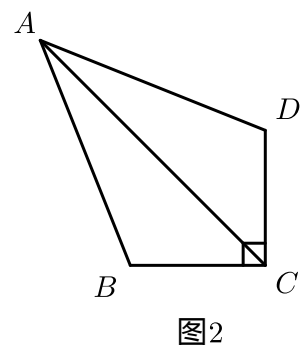
故答案为： 15° 。

【标注】 【知识点】正方形中的半角模型

15. 旋转变换在平面几何中有着广泛的应用，特别是在解（证）有关等腰三角形、正三角形、正方形等问题时，更是经常用到的思维方法，请你用旋转变换等知识，解决下面的问题．如图1， $\triangle ABC$ 与 $\triangle DCE$ 均为等腰直角三角形， DC 与 AB 交于点 M ， CE 与 AB 交于点 N ．



- (1) 以点 C 为中心，将 $\triangle ACM$ 逆时针旋转 90° ，画出旋转后的图形，并证明 $AM^2 + BN^2 = MN^2$.
- (2) 如图2，在四边形 $ABCD$ 中， $\angle BAD = 45^\circ$ ， $\angle BCD = 90^\circ$ ， AC 平分 $\angle BCD$ ，若 $BC = 4$ ， $CD = 3$ ，则对角线 AC 的长度为多少？

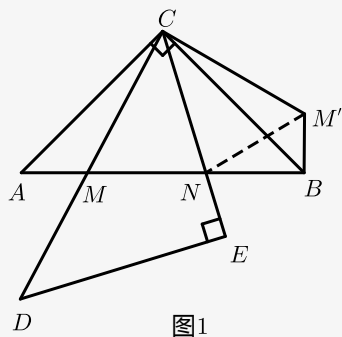


【答案】 (1) 画图见解析，证明见解析 .

(2) $6\sqrt{2}$.

【解析】 (1) 旋转后的图形如图1所示：

如图1，连接 $M'N$ ，



$\because \triangle ABC$ 与 $\triangle DCE$ 为等腰直角三角形， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $\angle DCE = 45^\circ$ ，
 $\therefore \angle A = \angle CBA = 45^\circ$ ， $\angle ACM + \angle BCN = 45^\circ$ ，
 $\because \triangle BCM'$ 是由 $\triangle ACM$ 旋转得到的，

$\therefore \angle BCM' = \angle ACM$, $CM = CM'$, $AM = BM'$, $\angle CBM' = \angle A = 45^\circ$,
 $\therefore \angle M'CN = \angle MCN = 45^\circ$, $\angle NBM' = 90^\circ$,
 在 $\triangle MCN$ 与 $\triangle M'CN$ 中 , $\begin{cases} CM = CM' \\ \angle MCN = \angle M'CN \\ CN = CN \end{cases}$,
 $\therefore \triangle MCN \cong \triangle M'CN$ (SAS) ,
 $\therefore MN = M'N$,
 在 $\text{Rt}\triangle BM'N$ 中 , 根据勾股定理得 : $M'N^2 = BN^2 + BM'^2$,
 $\therefore MN^2 = AM^2 + BN^2$.

(2) 如图2 , 将 $\triangle ACD$ 顺时针旋转 90° 到 $\triangle AC'D'$, 连接 BD 、 BD' 、 CC' ,

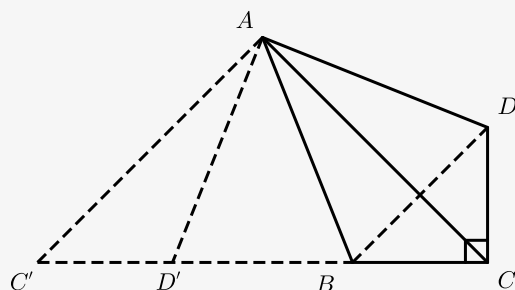


图 2

$\therefore AC$ 平分 $\angle BCD$, $\angle BCD = 90^\circ$,
 $\therefore \angle ACB = \angle ACD = 45^\circ$,
 由旋转的性质得 : $AC' = AC$, $AD' = AD$, $C'D' = CD$,
 $\angle CAC' = \angle DAD' = 90^\circ$, $\angle AC'D' = \angle ACD = 45^\circ$,
 $\therefore \triangle CAC'$ 是等腰直角三角形 ,
 $\therefore \angle AC'C = \angle ACC' = 45^\circ$, $AC = \frac{\sqrt{2}}{2} CC'$,
 $\therefore \angle AC'D' = \angle AC'C = \angle ACC' = \angle ACB$,
 $\therefore$ 点 C' , D' , B , C 在同一直线上 ,
 又 $\therefore \angle BAD = 45^\circ$, $\angle DAD' = 90^\circ$,
 $\therefore \angle BAD' = \angle DAD' - \angle BAD = 45^\circ$,
 $\therefore \angle BAD = \angle BAD'$,
 在 $\triangle DAB$ 和 $\triangle D'AB$ 中 ,
 $\begin{cases} AD = AD' \\ \angle BAD = \angle BAD' \\ AB = AB \end{cases}$,
 $\therefore \triangle DAB \cong \triangle D'AB$ (SAS) ,
 $\therefore BD = BD'$,
 在 $\text{Rt}\triangle BCD$ 中 , $\therefore BC = 4$, $CD = 3$,
 $\therefore BD = \sqrt{BC^2 + CD^2} = 5$,

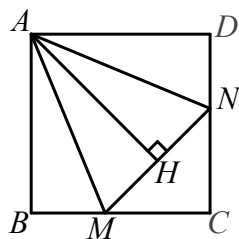
$$\therefore CC' = C'D' + BD' + BC = CD + BD + BC = 3 + 5 + 4 = 12,$$

$$\therefore AC = \frac{\sqrt{2}}{2}CC' = \frac{\sqrt{2}}{2} \times 12 = 6\sqrt{2}.$$

【标注】【知识点】等腰直角三角形中的半角模型

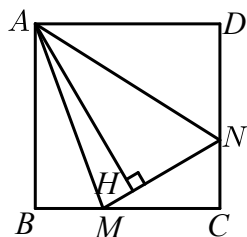
16. 已知，正方形 $ABCD$ 中， $\angle MAN = 45^\circ$ ， $\angle MAN$ 绕点 A 顺时针旋转，它的两边分别交 BC 、 DC （或它们的延长线）于点 M 、 N ， $AH \perp MN$ 于点 H 。

（1）如图①，当 $\angle MAN$ 绕点 A 旋转到 $BM = DN$ 时，请你直接写出 AH 与 AB 的数量关系：_____。



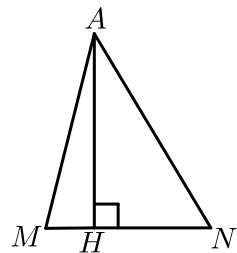
图①

（2）如图②，当 $\angle MAN$ 绕点 A 旋转到 $BM \neq DN$ 时，（1）中发现的 AH 与 AB 的数量关系还成立吗？如果不成立请写出理由．如果成立请证明．



图②

（3）如图③，已知 $\angle MAN = 45^\circ$ ， $AH \perp MN$ 于点 H ，且 $MH = 2$ ， $NH = 3$ ，求 AH 的长．（可利用（2）得到的结论）。



图③

【答案】（1） $AH = AB$

（2）成立，证明见解析．

（3） AH 的长为6．

【解析】(1) $AH = AB$

(2) 方法一：成立，理由如下：

如图，将 $\triangle ABM$ 绕点 A 旋转 90° ，由于 $AB = AD$ ，

$\therefore$ 旋转后 B 点与 D 点对应， M 点与 M' 点对应。

由旋转可知 $\triangle ABM \cong \triangle ADM'$ ，

$\therefore \angle BAM = \angle M'AD$ ， $AM = AM'$

，

又 $\angle MAN = 45^\circ$ ，

$\therefore \angle NAM' = \angle NAD + \angle M'AD$

$= \angle NAD + \angle MAB$

$= 90^\circ - \angle MAN = 45^\circ$ 。

$\therefore \angle MAN = \angle M'AN = 45^\circ$ 。

在 $\triangle MAN$ 和 $\triangle M'AN$ 中，

$$\begin{cases} AN = AN \\ \angle MAN = \angle M'AN, \\ AM = AM' \end{cases}$$

$\therefore \triangle MAN \cong \triangle M'AN$ (SAS)。

又 $AD \perp M'N$ ， $AH \perp MN$ ，

$\therefore AD = AH$ ， $\therefore AB = AH$ 。

方法二：延长 CD 至点 M' ，使 $DM' = BM$ ，连接 AM' ，

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

$\therefore AB = AD$ ，

$\angle B = \angle ADM' = 90^\circ$ 。

$\therefore \triangle ABM \cong \triangle ADM'$ (SAS)。

$\therefore \angle BAM = \angle M'AD$ ，

$AM = AM'$ ，

又 $\angle MAN = 45^\circ$ ，

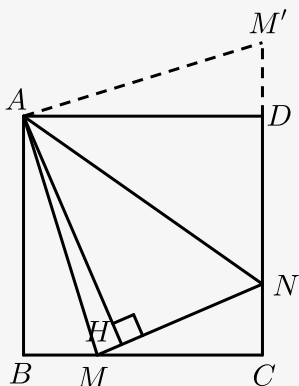
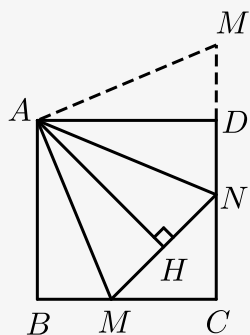
$\therefore$

$\angle NAM' = \angle NAD + \angle M'AD$

$= \angle NAD + \angle MAB$ 。

$= 90^\circ - \angle MAN = 45^\circ$ 。

$\therefore \angle MAN = \angle M'AN = 45^\circ$ 。



在 $\triangle MAN$ 和 $\triangle M'AN$ 中,

$$\begin{cases} AN = AN \\ \angle MAN = \angle M'AN, \\ AM = AM' \end{cases}$$

$\therefore \triangle MAN \cong \triangle M'AN$ (SAS).

又 $AD \perp M'N$, $AH \perp MN$,

$\therefore AD = AH$, $\therefore AB = AH$.

(3) 作 $\triangle AMH$ 关于直线 AM 的对称 $\triangle AMB$,

作 $\triangle ANH$ 关于直线 AN 的对称 $\triangle AND$,

$\therefore AH$ 是 $\triangle AMN$ 的高,

$\therefore \angle AHM = \angle AHN = 90^\circ$,

$\therefore \angle B = \angle D = 90^\circ$.

又 $\therefore \angle MAN = 45^\circ$,

$\therefore \angle BAD = 90^\circ$.

延长 BM 、 DN 交于点 C ,

则四边形 $ABCD$ 是矩形,

又 $\therefore AB = AH = AD$,

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是正方形,

由(1)、(2)知: $BM = HM = 2$, $DN = HN = 3$,

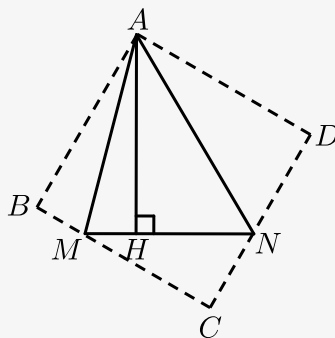
设 $AH = x$, 则 $BC = AB = AH = DC = x$,

$\therefore MC = x - 2$, $NC = x - 3$, $MN = 5$,

在 $\text{Rt}\triangle MCN$ 中, $(x - 2)^2 + (x - 3)^2 = 5^2$,

解得 $x_1 = 6$, $x_2 = -1$,

故 AH 的长为6.



【标注】【知识点】正方形与全等综合

17. 问题: 如图(1), 点 E 、 F 分别在正方形 $ABCD$ 的边 BC 、 CD 上, $\angle EAF = 45^\circ$, 试判断 BE 、 EF 、 FD 之间的数量关系.

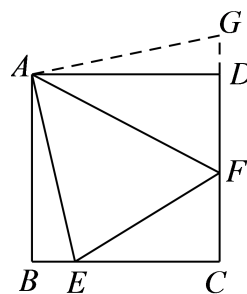


图 (1)

- (1) 【发现证明】小聪把 $\triangle ABE$ 绕点 A 逆时针旋转 90° 至 $\triangle ADG$ ，从而发现 $EF = BE + FD$ ，请你利用图(1)证明上述结论．
- (2) 【类比引申】如图(2)，四边形 $ABCD$ 中， $\angle BAD \neq 90^\circ$ ， $AB = AD$ ， $\angle B + \angle D = 180^\circ$ ，点 E 、 F 分别在边 BC 、 CD 上，则当 $\angle EAF$ 与 $\angle BAD$ 满足 _____ 关系时，仍有 $EF = BE + FD$ ．

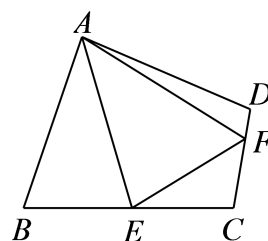


图 (2)

- (3) 【探究应用】如图(3)，在某公园的同一水平面上，四条通道围成四边形 $ABCD$ ．已知 $AB = AD = 80$ 米， $\angle B = 60^\circ$ ， $\angle ADC = 120^\circ$ ， $\angle BAD = 150^\circ$ ，道路 BC 、 CD 上分别有景点 E 、 F ，且 $AE \perp AD$ ， $DF = 40(\sqrt{3} - 1)$ 米，现要在 E 、 F 之间修一条笔直道路．求这条道路 EF 的长(结果取整数，参考数据， $\sqrt{2} \approx 1.41$ ， $\sqrt{3} \approx 1.73$)．

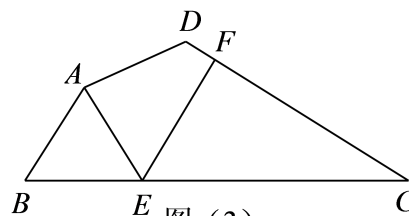


图 (3)

【答案】(1) 证明见解析．

(2) $\angle BAD = 2\angle EAF$

(3) EF 的长约为109米．

【解析】(1) 如图(1)， $\because \triangle ADG \cong \triangle ABE$ ，

$\therefore AG = AE$ ， $\angle DAG = \angle BAE$ ， $DG = BE$ ， $\angle B = \angle ADG = 90^\circ$ ，

又 $\because$ 四边形 $ABCD$ 为正方形,

$$\therefore \angle ADF = 90^\circ,$$

$\therefore G、D、F$ 三点共线,

又 $\because \angle EAF = 45^\circ$, 即

$$\angle DAF + \angle BEA = \angle EAF = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle GAF = \angle FAE,$$

在 $\triangle GAF$ 和 $\triangle FAE$ 中,

$$\begin{cases} AG = AE \\ \angle GAF = \angle FAE, \\ AF = AF \end{cases}$$

$$\therefore \triangle AFG \cong \triangle AFE \text{ (SAS)}.$$

$$\therefore GF = EF.$$

$$\text{又} \because DG = BE,$$

$$\therefore GF = BE + DF,$$

$$\therefore BE + DF = EF.$$

(2) $\angle BAD = 2\angle EAF$.

理由如下: 如图(2), 延长 CB 至 M , 使 $BM = DF$, 连接 AM ,

$$\because \angle ABC + \angle D = 180^\circ,$$

$$\angle ABC + \angle ABM = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle D = \angle ABM,$$

在 $\triangle ABM$ 和 $\triangle ADF$ 中,

$$\begin{cases} AB = AD \\ \angle ABM = \angle D, \\ BM = DF \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABM \cong \triangle ADF \text{ (SAS)},$$

$$\therefore AF = AM, \angle DAF = \angle BAM,$$

$$\therefore \angle BAD = 2\angle EAF,$$

$$\therefore \angle DAF + \angle BAE = \angle EAF,$$

$$\therefore \angle EAB + \angle BAM = \angle EAM = \angle EAF,$$

在 $\triangle FAE$ 和 $\triangle MAE$ 中,

$$\begin{cases} AE = AE \\ \angle FAE = \angle MAE, \\ AF = AM \end{cases}$$

$$\therefore \triangle FAE \cong \triangle MAE \text{ (SAS)},$$

$$\therefore EF = EM = BE + BM = BE + DF,$$

$$\text{即 } EF = BE + DF.$$

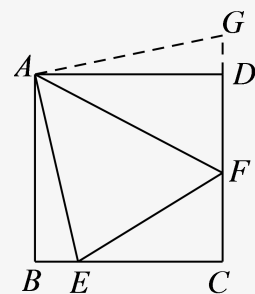
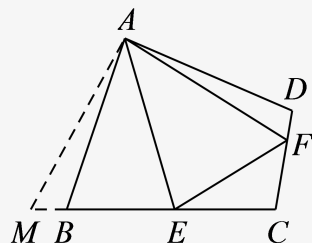


图 (1)



(3)

如图3，把 $\triangle ABE$ 绕点A逆时针旋转 150° 至 $\triangle ADG$ ，连接AF，过A作 $AH \perp GD$ ，垂足为H．

$$\because \angle BAD = 150^\circ, \angle DAE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BAE = 60^\circ,$$

$$\text{又} \because \angle B = 60^\circ,$$

$\therefore \triangle ABE$ 是等边三角形，

$$\therefore BE = AB = 80 \text{ 米}.$$

根据旋转的性质得到：

$$\angle ADG = \angle B = 60^\circ,$$

$$\text{又} \because \angle ADF = 120^\circ,$$

$\therefore \angle GDF = 180^\circ$ ，即点G在CD的延长线上．

易得， $\triangle ADG \cong \triangle ABE$ ，

$$\therefore AG = AE, \angle DAG = \angle BAE, DG = BE,$$

$$\text{又} \because AH = 80 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 40\sqrt{3},$$

$$HF = HD + DF = 40 + 40(\sqrt{3} - 1) = 40\sqrt{3}.$$

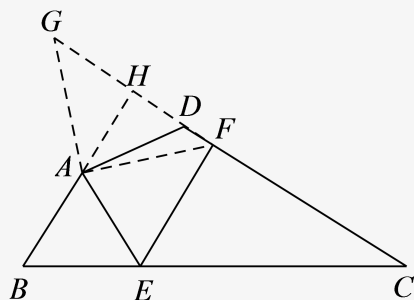
$$\text{故} \angle HAF = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle DAF = \angle HAF - \angle HAD = 45^\circ - 30^\circ = 15^\circ.$$

$$\text{从而} \angle EAF = \angle EAD - \angle DAF = 90^\circ - 15^\circ = 75^\circ.$$

$$\text{又} \because \angle BAD = 150^\circ = 2 \times 75^\circ = 2\angle EAF,$$

$\therefore$ 根据上述推论有： $EF = BE + DF = 80 + 40(\sqrt{3} - 1) \approx 109$ （米），即这条道路EF的长约为109米．



【标注】【思想】类比思想

【知识点】全等三角形的性质

【知识点】全等三角形的对应边与角

【知识点】旋转型全等

【知识点】SAS

【知识点】旋转性质综合应用

【知识点】旋转的性质

【知识点】正方形的性质

【能力】推理论证能力

【能力】运算能力

二、圆

练习

18. 下列判断中正确的是 () .

- A. 平分弦的直线垂直于弦
- B. 平分弦的直线也必平分弦所对的两条弧
- C. 弦的垂直平分线必平分弦所对的两条弧
- D. 平分一条弧的直线必平分这条弧所对的弦

【答案】 C

【解析】 A、平分弦（非直径）的直径垂直于弦，故本选项错误；

B、平分弦的直径也必平分弦所对的两条弧，故本选项错误；

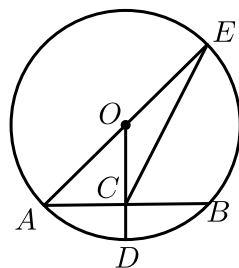
C、弦的垂直平分线必平分弦所对的两条弧，符合垂径定理，故本选项正确；

D、平分弧的直径必平分这条弧所对的弦，故本选项错误.

故选：C.

【标注】 【知识点】 垂径定理的推论以及应用

19. 如图， $\odot O$ 的半径 $OD \perp$ 弦 AB 于点 C ，连接 AO 并延长交 $\odot O$ 于点 E ，连接 EC . 若 $AB = 8$ ， $CD = 2$.



(1) 求 OD 的长 .

(2) 求 EC 的长 .

【答案】 (1) $OD = 5$.

(2) $EC = 2\sqrt{13}$.

【解析】 (1) 连接 BE ,

设 $\odot O$ 半径为 r , 则 $OA = OD = r$, $OC = r - 2$,

$\because OD \perp AB$,

$\therefore \angle ACO = 90^\circ$,

$$AC = BC = \frac{1}{2}AB = 4,$$

在Rt△ACO中，由勾股定理得：

$$r^2 = 4^2 + (r - 2)^2,$$

$$r = 5,$$

$$\therefore OD = r = 5.$$

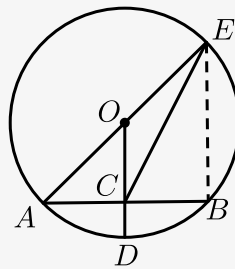
(2) 由(1)得： $AE = 2r = 10$,

$\therefore AE$ 为⊙O的直径，

$$\therefore \angle ABE = 90^\circ,$$

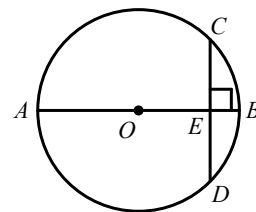
由勾股定理得： $BE = 6$,

$$\text{在Rt}\triangle ECB\text{中}, EC = \sqrt{BE^2 + BC^2} = \sqrt{6^2 + 4^2} = 2\sqrt{13}.$$



【标注】【知识点】圆与勾股

20. 如图， AB 为⊙O的直径，弦 $CD \perp AB$ 于 E ，已知 $CD = 12$ ， $BE = 2$ ，则⊙O的直径为（ ）。



A. 8

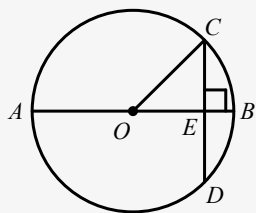
B. 10

C. 16

D. 20

【答案】 D

【解析】 连接OC，根据题意，



$$CE = \frac{1}{2}CD = 6, BE = 2.$$

在Rt△OEC中，

设 $OC = x$ ，则 $OE = x - 2$ ，

$$\text{故：}(x - 2)^2 + 6^2 = x^2.$$

解得： $x = 10$ 。

即直径 $AB = 20$ 。

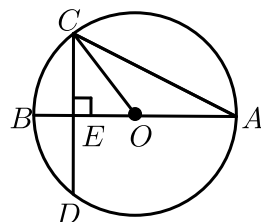
故选：D。

【标注】【能力】推理论证能力

【知识点】垂径定理以及应用

【思想】数形结合思想

21. 如图, $\odot O$ 的直径 AB 垂直于弦 CD , 垂足为 E , $\angle A = 22.5^\circ$, $OC = 4$, 则 CD 的长为 () .



A. $2\sqrt{2}$

B. 4

C. $4\sqrt{2}$

D. 8

【答案】C

【解析】 $\because \angle A = 22.5^\circ$,

$\therefore \angle BOC = 2\angle A = 45^\circ$,

$\because \odot O$ 的直径 AB 垂直于弦 CD ,

$\therefore CE = DE$, $\triangle OCE$ 为等腰直角三角形,

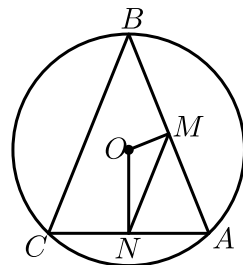
$\therefore CE = \frac{\sqrt{2}}{2} OC = 2\sqrt{2}$,

$\therefore CD = 2CE = 4\sqrt{2}$.

故选C.

【标注】【知识点】垂径定理以及应用

22. 如图, AB 、 AC 是 $\odot O$ 的弦, $OM \perp AB$, $ON \perp AC$, 垂足分别为 M 、 N . 如果 $MN = 2.5$, 那么 $BC =$ _____ .



【答案】5

【解析】 $\because AB$ 、 AC 是 $\odot O$ 的弦, $OM \perp AB$, $ON \perp AC$,

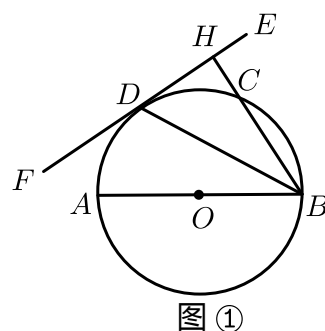
$\therefore M$ 为 AB 中点, N 为 AC 中点,
 $\therefore MN$ 为 $\triangle ABC$ 的中位线,
 $\therefore BC = 2MN = 5$.

【标注】【知识点】中位线定理及其应用

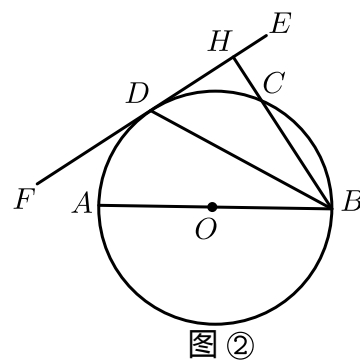
练习

23. 已知 AB 为 $\odot O$ 的直径, EF 切 $\odot O$ 于点 D , 过点 B 作 $BH \perp EF$ 于点 H , 交 $\odot O$ 于点 C , 连接 BD .

(1) 如图①, 若 $\angle BDH = 65^\circ$, 求 $\angle ABH$ 的大小.



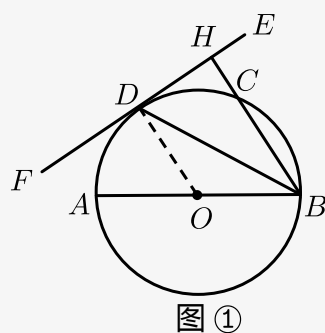
(2) 如图②, 若 C 为弧 BD 的中点, 求 $\angle ABH$ 的大小.



【答案】(1) 50° .

(2) 60° .

【解析】(1) 连接 DO ,



$\because BH \perp EF$,
 $\therefore \angle BHD = 90^\circ$,
 $\because BDH = 65^\circ$,
 $\therefore \angle HBD = 25^\circ$,
 $\because EF$ 切 $\odot O$ 于 D ,
 $\therefore DO \perp EF$,
 $\because BH \perp EF$,
 $\therefore DO \parallel BH$,
 $\therefore \angle HBD = \angle BDO = 25^\circ$,
 $\because OB = OD$,
 $\therefore \angle OBD = \angle ODB = 25^\circ$,
 $\therefore \angle ABH = \angle ABD + \angle DBH = 50^\circ$.

(2) 连接 DO , CO ,

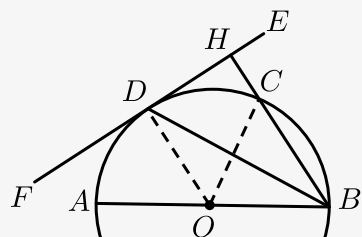


图 ②

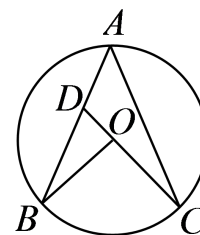
$\because EF$ 切 $\odot O$ 于 D ,
 $\therefore OD \perp EF$,
 $\because BH \perp EF$,
 $\therefore OD \parallel BH$,
 $\therefore \angle DBH = \angle ODB$,
 $\because OB = OD$,
 $\therefore \angle ODB = \angle OBD$,
 $\therefore \angle OBD = \angle DBC$,
 $\therefore \angle AOD = \angle COD$,
 $\because C$ 为 $\widehat{BD}$ 中点 ,
 $\therefore \angle DOC = \angle BOC$,
 $\therefore \angle AOD = \angle DOC = \angle COB$,
 $\because \angle AOB = 180^\circ$,
 $\therefore \angle AOD = \angle DOC = \angle COB = 60^\circ$,

$$\therefore \angle AOC = 120^\circ,$$

$$\therefore \angle ABH = 60^\circ.$$

【标注】【知识点】角的和差的计算与证明-不需要分类讨论

24. 如图，点 A, B, C 在 $\odot O$ 上， CO 的延长线交 AB 于点 D ， $\angle A = 50^\circ$ ， $\angle B = 30^\circ$ ，则 $\angle ADC$ 的度数为（ ）。



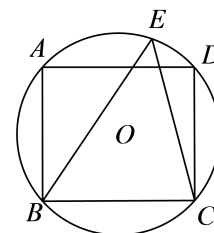
- A. 70° B. 90° C. 110° D. 120°

【答案】C

【解析】 $\because \angle A = 50^\circ$ ，
 $\therefore \angle BOC = 2\angle A = 100^\circ$ 。
 $\because \angle B = 30^\circ$ ， $\angle BOC = \angle B + \angle BDC$ 。
 $\therefore \angle BDC = \angle BOC - \angle B = 100^\circ - 30^\circ = 70^\circ$ 。
 $\therefore \angle ADC = 180^\circ - \angle BDC = 110^\circ$ 。

【标注】【知识点】圆周角定理以及应用

25. 如图， $\odot O$ 是正方形 $ABCD$ 的外接圆，点 E 是弧 AD 上任意一点，则 $\angle BEC$ 的度数为（ ）。



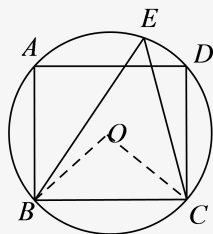
- A. 30° B. 45° C. 60° D. 90°

【答案】B

【解析】连接 OB, OC ，
 $\because \odot O$ 是正方形 $ABCD$ 的外接圆，

$$\therefore \angle BOC = 90^\circ$$

,
∴

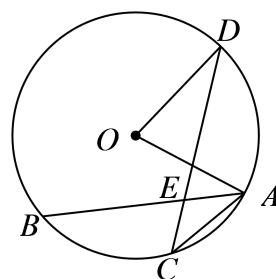


$$\angle BEC = \frac{1}{2} \angle BOC = 45^\circ.$$

故选：B.

【标注】【知识点】圆内接四边形综合

26. 如图，弦 AB 、 CD 相交于 E 点，若 $\angle BAC = 27^\circ$ ， $\angle BEC = 64^\circ$ ，则 $\angle AOD$ 等于 _____ .



【答案】 74°

【解析】 $\because \angle BEC = \angle C + \angle BAC$,

$$\angle BAC = 27^\circ, \angle BEC = 64^\circ,$$

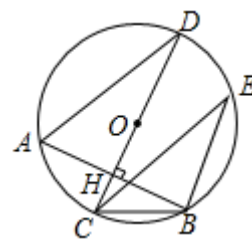
$$\therefore \angle C = \angle BEC - \angle BAC = 64^\circ - 27^\circ = 37^\circ,$$

$$\because \widehat{AD} = \widehat{AD},$$

$$\therefore \angle AOD = 2\angle C = 2 \times 37^\circ = 74^\circ.$$

【标注】【知识点】圆周角定理以及应用

27. 如图， AB 为 $\odot O$ 的弦， CD 为直径，且 $CD \perp AB$ 于 H ， $\angle E = 30^\circ$ ， $CB = 3$ ，则 AD 的长为 () .



A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

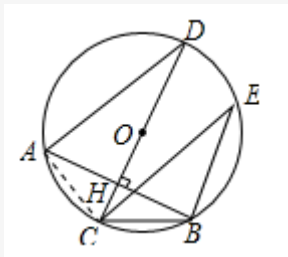
B. $\sqrt{3}$

C. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

D. $3\sqrt{3}$

【答案】 D

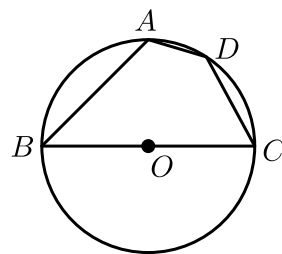
【解析】 连接 AC ，如图所示：



$$\begin{aligned} &\because CD \perp AB, \\ &\therefore \widehat{AC} = \widehat{BC}, \\ &\therefore AC = BC = 3, \angle D = \angle E = 30^\circ, \\ &\because CD \text{ 为直径}, \\ &\therefore \angle DAC = 90^\circ, \\ &\therefore CD = 2AC = 6, \\ &\therefore AD = \sqrt{CD^2 - AC^2} = \sqrt{6^2 - 3^2} = 3\sqrt{3}. \end{aligned}$$

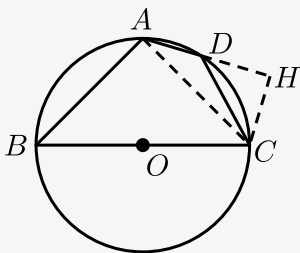
【标注】 【知识点】 圆周角定理以及应用

28. 四边形 $ABCD$ 内接于圆， BC 为 $\odot O$ 的直径，且 $CD = 1$ ， $AB = \sqrt{2}$ ， $BC = 2$ ， $\angle ABC = 45^\circ$ ，则四边形 $ABCD$ 的面积是 _____ .



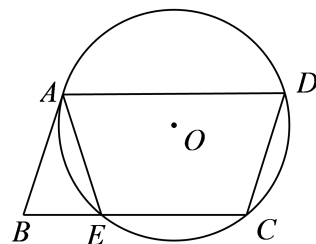
【答案】 $\frac{3 + \sqrt{3}}{4}$

【解析】 $S_{\text{四边形}ABCD} = S_{\triangle ABC} + S_{\triangle ADC}$ ，过点 C 作 $CH \perp AD$ 于点 H ，注意特殊角的应用．



【标注】【知识点】圆内接四边形综合

29. 如图，四边形 $ABCD$ 是平行四边形，经过点 A 、 C 、 D 的 $\odot O$ 与 BC 交于点 E ，连接 AE ，若 $\angle D = 72^\circ$ ，则 $\angle BAE = \underline{\hspace{2cm}}$.

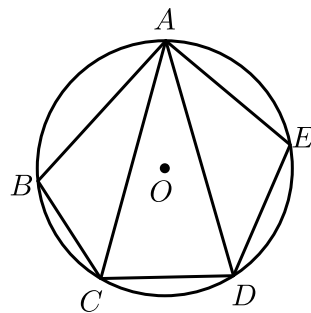


【答案】 36°

【解析】 $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形， $\angle D = 72^\circ$ ，
 $\therefore \angle DCB = (180^\circ - \angle D) = 108^\circ$ ，
 $\because$ 四边形 $AECD$ 是圆内接四边形，
 $\therefore \angle AEB = \angle D = 72^\circ$ ， $\angle DAC = 180^\circ - \angle DCB = 72^\circ$
 $\therefore \angle BAE = 180^\circ - 72^\circ - 72^\circ = 36^\circ$ ，
 故答案为： 36° .

【标注】【知识点】圆内接四边形综合

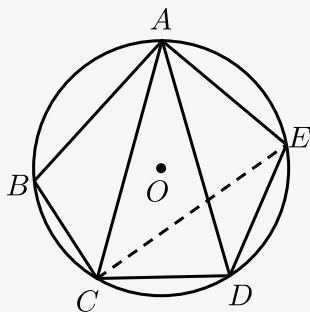
30. 如图，在 $\odot O$ 的内接五边形 $ABCDE$ 中， $\angle B + \angle E = 210^\circ$ ，则 $\angle CAD = \underline{\hspace{2cm}}^\circ$.



【答案】 30

【解析】 如图，连接 CE .

$\because$



$$\angle B + \angle AEC = 180^\circ .$$

$$\angle B + \angle AED = 210^\circ .$$

$$\therefore \angle CED = 30^\circ ,$$

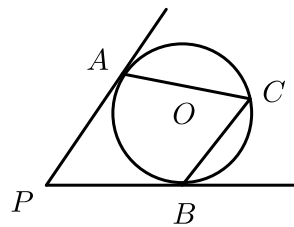
$$\because \angle CED = \angle CAD .$$

$$\therefore \angle CAD = 30^\circ .$$

【标注】 【知识点】 圆内接正多边形相关计算

练习

31. 图， PA ， PB 分别与圆 O 相切于 A ， B 两点， $\angle P = 70^\circ$ ，则 $\angle C = ()$.



A. 50°

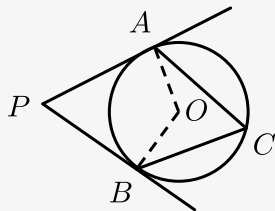
B. 55°

C. 110°

D. 140°

【答案】 B

【解析】 如图，连接 OA ， OB ，



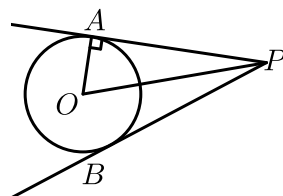
$\because PA$ ， PB 分别切 $\odot O$ 于点 A ， B ，

$\therefore \angle PAO = \angle PBO = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle AOB = 180^\circ - \angle P = 110^\circ$,
由圆周角定理知 , $\angle C = \frac{1}{2} \angle AOB = 55^\circ$.

【标注】【知识点】切线长定理

32. 如图 , PA 、 PB 分别切 $\odot O$ 于 A 、 B , $AP = 5$, 则 $BP = (\quad)$.



A. 4

B. 10

C. 3

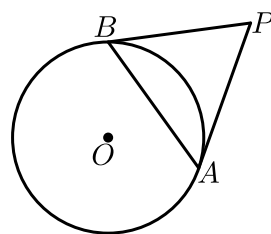
D. 5

【答案】D

【解析】由切线长定理可知 , PA 、 PB .

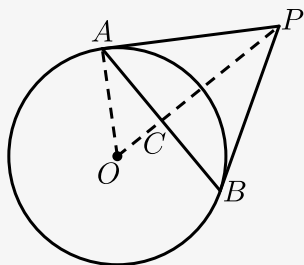
【标注】【知识点】切线长定理

33. 如图 , PA , PB 是 $\odot O$ 的两条切线 , 切点分别为 A , B . 连接 AB , 若 $\odot O$ 的半径为6 , 且 $PA = 8$, 则 $\triangle PAB$ 的面积是 _____ .



【答案】30.72

【解析】 $\because PA$ 、 PB 是半径为1的 $\odot O$ 的两条切线 ,



$\therefore OA \perp PA$. OP 平分 $\angle APB$, $PA = PB$,

$\therefore AC = BC$, $OP \perp AB$,

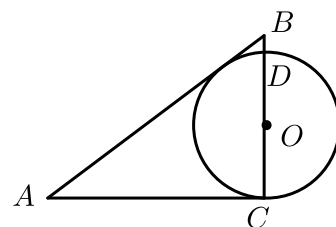
在 $\text{Rt}\triangle PAO$ 中，由勾股定理得： $OP = \sqrt{AP^2 + OA^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$ ，
 $\sqrt{AP^2 + OA^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$ ，
 由三角形面积公式得： $\frac{1}{2} \times AP \times OA = \frac{1}{2} \times OP \times AC$ ，
 $\therefore 6 \times 8 = 10 \times AC$ ，
 $\therefore AC = 4.8$ ，
 即 $AB = 2AC = 9.6$ ， $PC = \sqrt{8^2 - 4 \cdot 8^2} = 6.4$ ，
 $\therefore \triangle APB$ 的面积为 $\frac{1}{2} \times AB \times PC = \frac{1}{2} \times 9.6 \times 6.4 = 30.72$ ，
 故答案为：30.72。

【标注】【知识点】切线的性质定理

【知识点】垂径定理以及应用

【能力】推理论证能力

34. 如图， $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $AC = 4$ ， $BC = 3$ ，以 BC 上一点 O 为圆心作 $\odot O$ 与 AB 、 AC 相切，又 $\odot O$ 与 BC 的另一交点为 D ，则线段 BD 的长为（ ）。



A. $\frac{4}{3}$

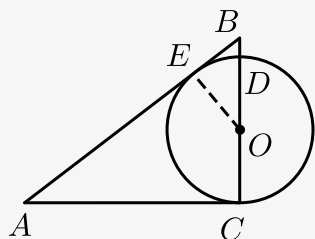
B. 1

C. $\frac{2}{3}$

D. $\frac{1}{3}$

【答案】D

【解析】设 AB 与 $\odot O$ 的切点为 E ，联结 OE 。则 $OE \perp AB$ ， $AB = 5$



又 AC 与 $\odot O$ 相切，

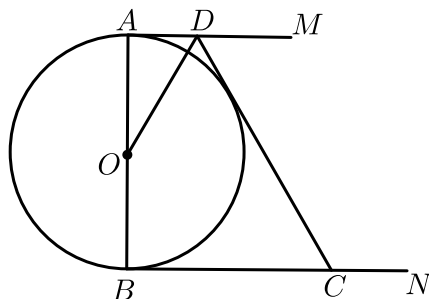
$$\therefore AC = AE = 4, BE = AB - AE = 1.$$

设 $\odot O$ 的半径为 r ，在 $\text{Rt}\triangle OBE$ 中， $\angle OEB = 90^\circ$ 。

$$\therefore OE^2 + BE^2 = OB^2, \text{ 即 } r^2 + 1^2 = (3 - r)^2, \text{ 解得 } r = \frac{4}{3},$$

$$\text{则 } BD = BC - CD = 3 - \frac{4}{3} \times 2 = \frac{1}{3}.$$

35. 如图, AB 是 $\odot O$ 的直径, AM 、 BN 分别与 $\odot O$ 相切于点 A 、 B , CD 交 AM 、 BN 于点 D 、 C , DO 平分 $\angle ADC$.



- (1) 求证: CD 是 $\odot O$ 的切线.
 (2) 设 $AD = 4$, $AB = x (x > 0)$, $BC = y (y > 0)$. 求 y 关于 x 的函数解析式.

【答案】(1) 证明见解析.

(2) $y = \frac{1}{16}x^2$.

【解析】(1) 过 O 作 $OE \perp CD$ 于点 E , 则 $\angle OED = 90^\circ$.

$\because \odot O$ 与 AM 相切于点 A ,

$\therefore \angle OAD = 90^\circ$.

$\because OD$ 平分 $\angle ADE$,

$\therefore \angle ADO = \angle EDO$.

$\because OD = OD$,

在 $\triangle OAD$ 与 $\triangle OED$ 中,

$$\therefore \begin{cases} \angle ODA = \angle ODE \\ OD = OD \\ \angle OAD = \angle OED \end{cases},$$

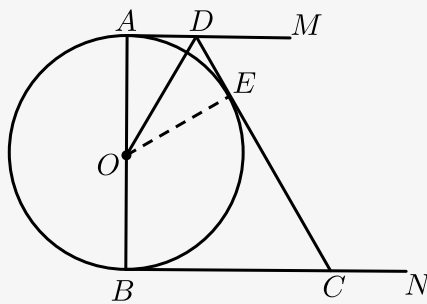
$\therefore \triangle OAD \cong \triangle OED$.

$\therefore OE = OA$.

$\because OA$ 是 $\odot O$ 的半径,

$\therefore OE$ 是 $\odot O$ 的半径.

$\therefore CD$ 是 $\odot O$ 的切线.



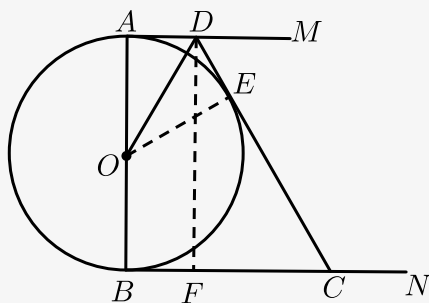
- (2) 如图所示: 过 O 作 $OE \perp CD$ 于点 E ,

过点 D 作 $DF \perp BC$ 于点 F , 则 $DF = AB = x$.

$\because AD = 4$, $BC = y$,

$\therefore CF = BC - AD = y - 4$.

由切线长定理可得： $DE = DA$ ，
 $CE = CB$ ，
 $\therefore$



$$CD = CE + ED = BC + AD = 4 + y$$

在 $\text{Rt}\triangle DFC$ 中，

$$\therefore CD^2 = DF^2 + FC^2$$

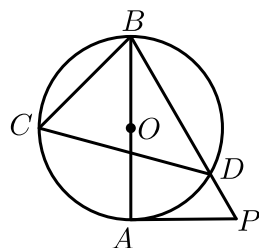
$$\therefore (y + 4)^2 = x^2 + (y - 4)^2.$$

$$\text{整理得：} y = \frac{1}{16}x^2,$$

$$\text{则 } y \text{ 关于 } x \text{ 的函数关系式为：} y = \frac{1}{16}x^2.$$

【标注】【知识点】切线长定理

36. 如图， AB 是 $\odot O$ 的直径， PA 与 $\odot O$ 相切于点 A ， BP 与 $\odot O$ 相交于点 D ， C 为 $\odot O$ 上一点，分别连接 CB 、 CD ， $\angle BCD = 60^\circ$ 。



- (1) 求 $\angle ABD$ 的度数。
 (2) 若 $AB = 6$ ，求 PD 的长度。

【答案】 (1) 30° 。

(2) $PD = \sqrt{3}$ 。

【解析】 (1) 如图，连接 AD ，

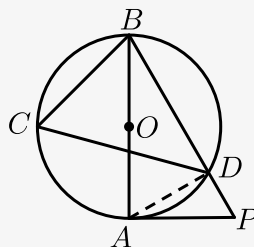
$\therefore \angle BCD$ 和 $\angle BAD$ 为同弧
 所对的圆周角，

$\therefore$

$$\angle BAD = \angle BCD = 60^\circ$$

，

$\therefore AB$ 是 $\odot O$ 的直径，



$$\therefore \angle ADB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ABD = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ.$$

(2) $\because AP$ 是 $\odot O$ 的切线,

$$\therefore AB \perp AP,$$

在 $\text{Rt}\triangle ABP$ 中, $\because \angle ABD = 30^\circ$, $AB = 6$,

$$\therefore AP = AB \cdot \tan \angle ABD = 2\sqrt{3}, \angle P = 60^\circ,$$

$$\text{在 } \text{Rt}\triangle APD \text{ 中, } PD = AP \cdot \cos \angle P = \sqrt{3}.$$

【标注】【知识点】圆与勾股

【知识点】切线的性质定理

【知识点】垂径定理的推论以及应用

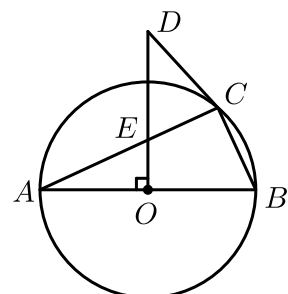
【知识点】圆周角定理以及应用

【知识点】垂径定理以及应用

【知识点】圆中对称性

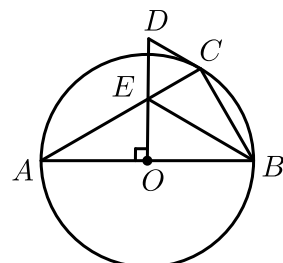
37. 已知 $\triangle ABC$ 内接于 $\odot O$, AB 为 $\odot O$ 的直径, 过点 O 作 AB 的垂线, 与 AC 相交于点 E , 与过点 C 的 $\odot O$ 的切线相交于点 D .

(1) 如图①, 若 $\angle ABC = 67^\circ$, 求 $\angle D$ 的大小.



图①

(2) 如图②, 若 $EO = EC$, $AB = 2$, 求 CD 的长.

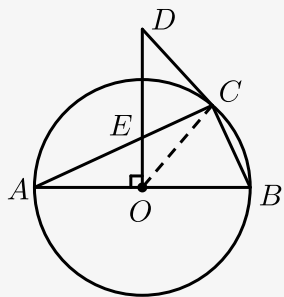


图②

【答案】(1) 46° .

$$(2) \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

【解析】(1) 连结 OC ,



$$\because OB = OC ,$$

$$\therefore \angle OCB = \angle OBC = 67^\circ ,$$

$$\therefore \angle COB = 180^\circ - \angle OCB - \angle OBC = 180^\circ - 67^\circ - 67^\circ = 46^\circ ,$$

$$\because OD \perp AB ,$$

$$\therefore \angle DOB = 90^\circ ,$$

$$\therefore \angle DOC = \angle DOB - \angle COB = 90^\circ - 46^\circ = 44^\circ ,$$

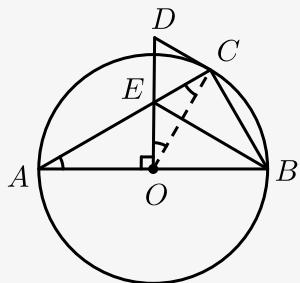
$$\because CD \text{ 切 } \odot O \text{ 于 } C ,$$

$$\therefore OC \perp CD ,$$

$$\therefore \angle OCD = 90^\circ ,$$

$$\therefore \angle D = 180^\circ - \angle DOC - \angle OCD = 46^\circ .$$

(2) 连结 OC ,



$$\because EO = EC ,$$

$$\therefore \text{ 设 } \angle EOC = \angle ECO = x ,$$

$$\because DO \perp OB ,$$

$$\therefore \angle DOB = 90^\circ ,$$

$$\therefore \angle COB = \angle DOB - \angle EOC = 90^\circ - x ,$$

$$\because OA = OC ,$$

$$\therefore \angle OAC = \angle OCA = x ,$$

$$\therefore \angle COB = \angle OAC + \angle OCA = 2x ,$$

$$\therefore 90^\circ - x = 2x ,$$

$$\therefore x = 30^\circ ,$$

$$\therefore \angle DOC = 30^\circ,$$

$$\because AB = 2,$$

$$\therefore OC = \frac{1}{2}AB = 1,$$

$$\text{在Rt}\triangle ODC\text{中}, \tan \angle DOC = \frac{CD}{OC}, \text{即} \frac{CD}{1} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore CD = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

【标注】【知识点】解直角三角形的综合应用

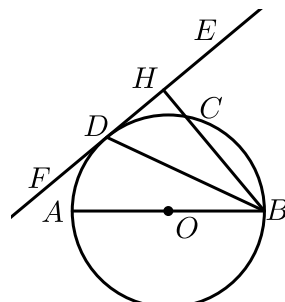
【知识点】切线的性质定理

【知识点】圆周角定理以及应用

【能力】推理论证能力

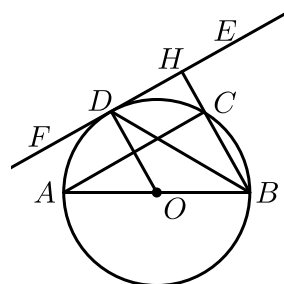
38. 已知 AB 为 $\odot O$ 的直径, EF 切 $\odot O$ 于点 D , 过点 B 作 $BH \perp EF$ 于点 H , 交 $\odot O$ 于点 C , 连接 BD .

(1) 如图①, 若 $\angle BDH = 65^\circ$, 求 $\angle ABH$ 的大小.



图①

(2) 如图②, 若 C 为 $\widehat{BD}$ 的中点, 求 $\angle ABH$ 的大小.



图②

【答案】(1) 50° .

(2) 60° .

【解析】(1) 如图③, 连接 OD .

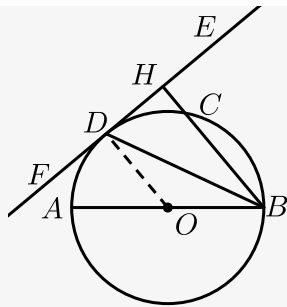


图 ③

$\because O$ 为圆心, EF 切 $\odot O$ 于点 D ,

$\therefore OD \perp EF$,

又 $BH \perp EF$,

$\therefore OD \parallel BH$,

$\therefore \angle ODB = \angle DBH$,

$\because OB = OD$,

$\therefore \angle ODB = \angle OBD$,

$\therefore \angle DBH = \angle OBD$,

$\therefore \angle DBH = 90^\circ - \angle BDH = 90^\circ - 65^\circ = 25^\circ$,

$\therefore \angle ABH = 2\angle DBH = 50^\circ$.

(2) 连接 OD 、 OC 、 CO , 如图④,

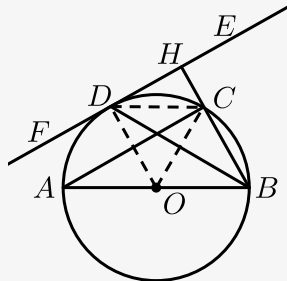


图 ④

$\because C$ 为 $\widehat{BD}$ 的中点,

$\therefore \angle COD = \angle COB$,

$\because OD \parallel BH$,

$\therefore \angle COD = \angle OCB$,

$\therefore \angle OCB = \angle COB$,

$\because OB = OC$,

$\therefore \angle OBC = \angle OCB$,

$\therefore \angle OBC = \angle OCB = \angle COB$,

$\therefore \angle OBC + \angle OCB + \angle COB = 180^\circ$,

$\therefore \angle OBC = 60^\circ$,

即 $\angle ABH = 60^\circ$.

【标注】【能力】推理论证能力

【能力】运算能力

【知识点】切线的性质定理

【知识点】圆周角定理以及应用

【思想】数形结合思想

练习

39. 以半径为1的圆内接正三角形的边心距为 () .

A. 1

B. $\frac{1}{2}$

C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

【答案】B

【解析】边心距 $d = \frac{1}{2}r = \frac{1}{2}$.

【标注】【知识点】正多边形的半径与边心距

40. 已知正六边形的边心距为2, 则它的外接圆的半径是 () .

A. $\frac{2}{3}\sqrt{3}$

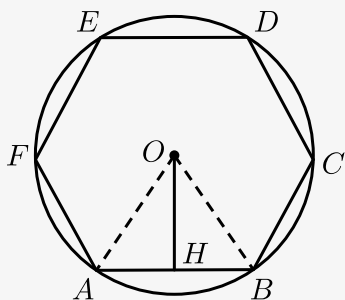
B. $\frac{4}{3}\sqrt{3}$

C. $2\sqrt{3}$

D. 4

【答案】B

【解析】如图, 连接 OA 、 OB ,



$\because$ 六边形 $ABCDEF$ 为正六边形 ,

$$\therefore \angle AOB = \frac{1}{6} \times 360^\circ .$$

$\because OA = OB$,

$\therefore \triangle OAB$ 是等边三角形 .

$\therefore \angle OAH = 60^\circ$.

$\therefore OH \perp AB$, $OH = 2$.

$\therefore OA = \frac{OH}{\sin 60^\circ} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$.

【标注】【知识点】正多边形的半径与边心距

41. 已知正六边形的周长是12 , 则它的外接圆的半径是 () .

A. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

B. $\sqrt{3}$

C. 2

D. 12

【答案】 C

【解析】 正六边形的周长是12 , 边长为2 , 则它的外接圆的半径是2 .

【标注】【知识点】正多边形的半径与边心距

42. 若正方形的边长为6 , 则其外接圆半径与内切圆半径的大小分别为 () .

A. 6 , $3\sqrt{2}$

B. $3\sqrt{2}$, 3

C. 6 , 3

D. $6\sqrt{2}$, $3\sqrt{2}$

【答案】 B

【解析】 $\therefore$ 正方形的边长为6 ,

$\therefore AB = 3$,

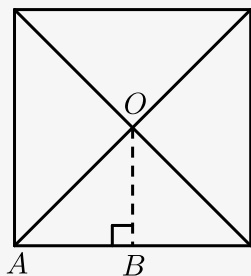
又 $\therefore \angle AOB = 45^\circ$,

$\therefore OB = 3$,

$\therefore$

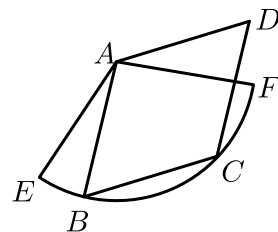
$AO = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$,

即外接圆半径为 $3\sqrt{2}$, 内切圆半径为3 .



【标注】【知识点】正多边形与圆的综合

43. 如图 , 边长为1的菱形 $ABCD$ 绕点 A 旋转 , 当 B 、 C 两点恰好落在扇形 AEF 的弧 $\widehat{EF}$ 上时 , 弧 $\widehat{BC}$ 的长度等于 () .



A. $\frac{\pi}{6}$

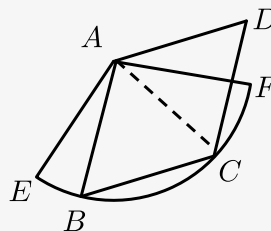
B. $\frac{\pi}{4}$

C. $\frac{\pi}{3}$

D. $\frac{\pi}{2}$

【答案】C

【解析】连接 AC ，可得 $AB = BC = AC = 1$ ，则 $\angle BAC = 60^\circ$ ，
根据弧长公式，可得弧 BC 的长度等于 $\frac{60^\circ \pi \times 1}{180^\circ} = \frac{\pi}{3}$ 。

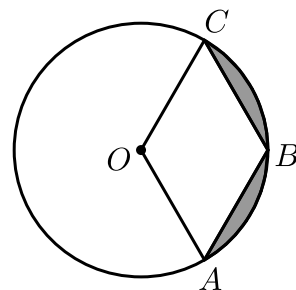


【标注】【能力】运算能力

【能力】推理论证能力

【知识点】弧长公式

44. 如图，已知 $\odot O$ 的半径是2，点 A 、 B 、 C 在 $\odot O$ 上，若四边形 $OABC$ 为菱形，则图中阴影部分面积为（ ）。



A. $\frac{2}{3}\pi - 2\sqrt{3}$

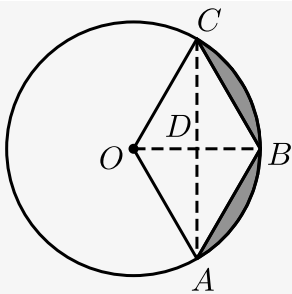
B. $\frac{2}{3}\pi - \sqrt{3}$

C. $\frac{4}{3}\pi - 2\sqrt{3}$

D. $\frac{4}{3}\pi - \sqrt{3}$

【答案】C

【解析】连接 OB 和 AC 交于点 D ，如图所示：



∵圆的半径为2，

∴ $OB = OA = OC = 2$ ，

又四边形OABC是菱形，

∴ $OB \perp AC$ ， $OD = \frac{1}{2}OB = 1$ ，

在Rt△COD中利用勾股定理可知： $CD = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$ ， $AC = 2CD = 2\sqrt{3}$ ，

∴ $\sin \angle COD = \frac{CD}{OC} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，

∴ $\angle COD = 60^\circ$ ， $\angle AOC = 2\angle COD = 120^\circ$ ，

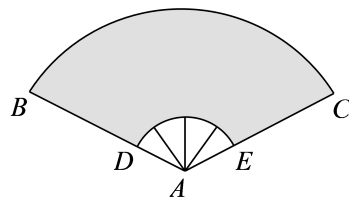
∴ $S_{\text{菱形}ABCO} = \frac{1}{2}OB \times AC = \frac{1}{2} \times 2 \times 2\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$ ，

$S_{\text{扇形}AOC} = \frac{120 \cdot \pi \cdot 2^2}{360} = \frac{4\pi}{3}$ ，

则图中阴影部分面积为 $S_{\text{菱形}ABCO} - S_{\text{扇形}AOC} = \frac{4}{3}\pi - 2\sqrt{3}$ 。

【标注】【知识点】与圆有关的不规则图形的周长与面积计算

45. 如图，扇形折扇完全打开后，如果张开的角度（ $\angle BAC$ ）为 120° ，骨柄AB的长为30cm，扇面的宽度BD的长为20cm，那么这把折扇的扇面面积为（ ）。



- A. $\frac{400\pi}{3} \text{ cm}^2$
C. $\frac{800\pi}{3} \text{ cm}^2$

- B. $\frac{500\pi}{3} \text{ cm}^2$
D. $300\pi \text{ cm}^2$

【答案】 C

【解析】 依题可知， $AB = 30 \text{ cm}$ ， $BD = 20 \text{ cm}$ ， $AD = 10 \text{ cm}$ ，

扇的扇面面积为 $\frac{120\pi(30^2 - 10^2)}{360} = \frac{800\pi}{3} \text{ cm}^2$ 。

【标注】【知识点】扇形的面积公式

46. 已知圆锥的底面半径为4cm，母线长为5cm，则这个圆锥的侧面积是（ ）。

A. $20\pi \text{ cm}^2$

B. 20cm^2

C. $40\pi \text{ cm}^2$

D. 40cm^2

【答案】A

【解析】圆锥的侧面积 = $2\pi \times 4 \times 5 \div 2 = 20\pi$ 。

故选A。

【标注】【知识点】求圆锥的侧面积

47. 圆锥体的高 $h = 2\sqrt{3}\text{cm}$ ，底面圆半径 $r = 2\text{cm}$ ，则圆锥体的全面积为（ ）。

A. $4\sqrt{3}\pi \text{ cm}^2$

B. $8\pi \text{ cm}^2$

C. $12\pi \text{ cm}^2$

D. $(4\sqrt{3} + 4)\pi \text{ cm}^2$

【答案】C

【解析】底面圆的半径为2cm，则底面周长 = $4\pi \text{ cm}$ ，

∵底面半径为2cm、高为 $2\sqrt{3}\text{cm}$ ，

∴圆锥的母线长为4cm，

∴侧面面积 = $\frac{1}{2} \times 4\pi \times 4 = 8\pi(\text{cm}^2)$ ；

底面积 = $4\pi \text{ cm}^2$ ，

∴全面积 = $8\pi + 4\pi = 12\pi(\text{cm}^2)$ 。

【标注】【知识点】求圆锥的侧面积

48. 已知扇形的半径为10cm，圆心角为 270° ，用它做成圆锥的侧面，则圆锥的高为 _____ cm。

【答案】 $\frac{5\sqrt{7}}{2}$

【解析】 $l_{\text{弧长}} = \frac{n\pi r}{180} = \frac{270 \times \pi \times 10}{180} = 15\pi$ ，

$$r_{\text{底}} = \frac{l_{\text{弧长}}}{2\pi} = \frac{15\pi}{2\pi} = \frac{15}{2}，$$

设高为 h ，

$$h^2 + r_{\text{底}}^2 = R_{\text{母线}}^2,$$

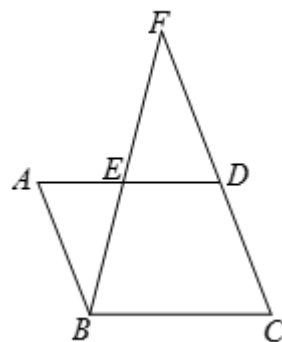
$$h = \sqrt{10^2 - \left(\frac{15}{2}\right)^2} = \frac{5\sqrt{7}}{2} \text{ cm}.$$

【标注】【知识点】求圆锥的高

三、相似三角形

练习

49. 在平行四边形 $ABCD$ 中，点 E 是 AD 边的中点，连接 BE 并延长交 CD 延长线于点 F ，则 $\triangle EDF$ 与 $\triangle BCF$ 的周长之比是（ ）。



- A. 1 : 2 B. 1 : 3 C. 1 : 4 D. 1 : 5

【答案】A

【解析】∵ 四边形 $ABCD$ 为平行四边形，

∴ ED 平行 BC ，

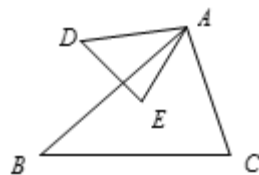
∴ E 为 FB 中点，

∴ $\triangle FED \sim \triangle FBC$ ， $\frac{FE}{FB} = \frac{1}{2}$ ，

∴ $\triangle EDF$ 与 $\triangle BCF$ 的周长比为 $1 : 2$ 。

【标注】【知识点】相似三角形的性质与判定综合

50. 已知：如图， $AB = 8$ ， $AC = 6$ ， $BC = 7$ ， $AD = 4$ ， $AE = 3$ ， $ED = 3.5$ 。求证： $\angle B = \angle D$ 。

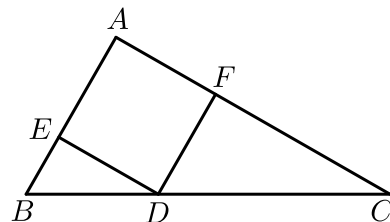


【答案】证明见解析 .

【解析】 $\because \frac{AD}{AB} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}, \frac{DE}{BC} = \frac{3.5}{7} = \frac{1}{2}, \frac{AE}{AC} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2},$
 $\therefore \frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC} = \frac{AE}{AC},$
 $\therefore \triangle ADE \sim \triangle ABC,$
 $\therefore \angle D = \angle B.$

【标注】【知识点】相似三角形的性质与判定综合

51. 如图, $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = 90^\circ$, D 在 BC 上, $DE \perp AB$ 于 E , $DF \perp AC$ 于 F , $DE = DF$.



(1) 求证: $\triangle DCF \sim \triangle BDE$.

(2) 若 $BD = 5$, $CD = 10$, 求四边形 $AEDF$ 的面积.

【答案】(1) 证明见解析 .

(2) 20 .

【解析】(1) $\because DE \perp AB, DF \perp AC,$
 $\therefore \angle BED = \angle DFC = 90^\circ,$
 $\because \angle BAC = 90^\circ = \angle DFC,$
 $\therefore AB \parallel DF,$
 $\therefore \angle B = \angle FDC,$
 $\therefore \triangle DCF \sim \triangle BDE.$
 (2) $\because \angle A = \angle AED = \angle DFA = 90^\circ,$
 $\therefore$ 四边形 $AFDE$ 为矩形,
 $\because ED = DF,$
 $\therefore$ 矩形 $AFDE$ 为正方形,

设 $ED = DF = x$,

$\therefore \triangle DCF \sim \triangle BDE$,

$$\therefore \frac{DC}{BD} = \frac{x}{BE} = 2,$$

$$\therefore BE = \frac{1}{2}x,$$

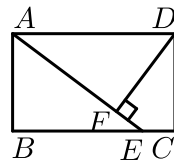
$$\text{在 Rt}\triangle EBD \text{ 中, } BD = \sqrt{x^2 + \left(\frac{1}{2}x\right)^2} = 5,$$

$$\therefore x = 2\sqrt{5},$$

$$\therefore S_{\text{四边形}AEDF} = 2\sqrt{5} \times 2\sqrt{5} = 20.$$

【标注】【知识点】正方形的周长与面积

52. 如图矩形 $ABCD$ 中, E 为 BC 上一点, $DF \perp AE$ 于 F .



(1) 求证: $\triangle ABE \sim \triangle DFA$.

(2) 若 $AB = 6$, $AD = 12$, $BE = 8$, 求 DF 的长.

【答案】(1) 证明见解析.

(2) $DF = 7.2$

【解析】(1) $\because DF \perp AE$,

$$\therefore \angle AFD = 90^\circ.$$

$$\therefore \angle B = \angle AFD = 90^\circ.$$

又 $\because AD \parallel BC$,

$$\therefore \angle DAE = \angle AEB.$$

$$\therefore \triangle ABE \sim \triangle DFA.$$

(2) $\because AB = 6$, $BE = 8$, $\angle B = 90^\circ$,

$$\therefore AE = 10.$$

$$\because \triangle ABE \sim \triangle DFA,$$

$$\therefore \frac{AB}{DF} = \frac{AE}{AD}.$$

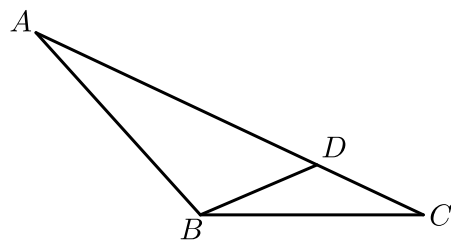
$$\text{即 } \frac{6}{DF} = \frac{10}{12}.$$

$$\therefore DF = 7.2.$$

【标注】【知识点】相似三角形的性质与判定综合

53. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， D 为 AC 边上一点， $BC = 4$ ， $AC = 8$ ， $CD = 2$ ．求证：

$$\triangle BCD \sim \triangle ACB.$$



【答案】证明见解析．

【解析】 $\because BC = 4$ ， $AC = 8$ ， $CD = 2$ ．

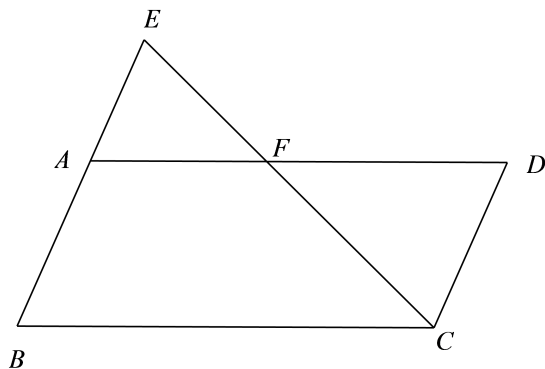
$$\therefore \frac{BC}{AC} = \frac{CD}{BC}.$$

又 $\because \angle C = \angle C$ ，

$$\therefore \triangle BCD \sim \triangle ACB.$$

【标注】【知识点】相似反A字型

54. 如图，平行四边形 $ABCD$ 中，点 E 在 BA 的延长线上，连接 CE ，与 AD 相交于 F ．



(1) 求证： $\triangle EBC \sim \triangle CDF$ ．

(2) 若 $BC = 8$ ， $CD = 3$ ， $AE = 1$ ，求 FD 的长．

【答案】(1) 证明见解析．

(2) DF 的长为6．

【解析】(1) 在平行四边形 $ABCD$ 中， $\angle B = \angle D$ ， $AB \parallel CD$ ，

$$\therefore \angle E = \angle ECD,$$

$$\therefore \triangle EBC \sim \triangle CDF.$$

(2) 平行四边形 $ABCD$ 中，

$$AB = CD = 3 ,$$

$$\therefore BE = AB + AE = 3 + 1 = 4 ,$$

由 (1) 知, $\triangle EBC \sim \triangle CDF$,

$$\therefore \frac{BE}{CD} = \frac{BC}{DF} ,$$

$$\therefore \frac{4}{3} = \frac{8}{DF} ,$$

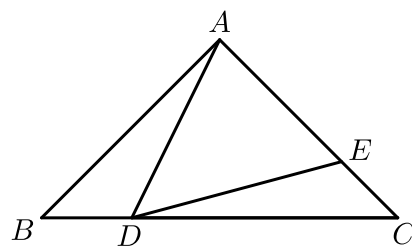
$$\therefore DF = 6 ,$$

$\therefore DF$ 的长为 6 .

【标注】【知识点】相似三角形的性质与判定综合

练习

55. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, D 是 BC 上的一点, DE 交 AC 于 E , 使 $\angle ADE = \angle B$, 则图中的相似三角形有 _____ 对 .



【答案】2

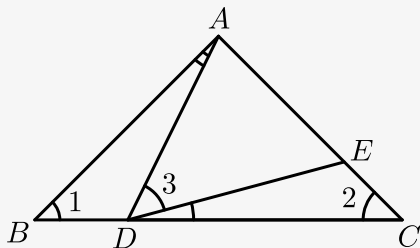
【解析】如图, $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3$,

$$\therefore \angle BAD + \angle BDA = \angle CDE + \angle BDA ,$$

$$\therefore \angle BAD = \angle CDE ,$$

$$\therefore \triangle ABD \sim \triangle DCE ; \triangle ADE \sim \triangle ACD ,$$

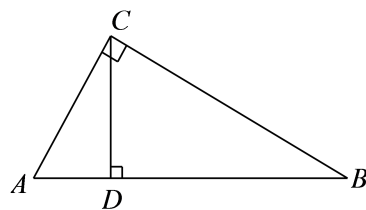
故答案为 : 2 .



【标注】【知识点】一线三等角相似

56. 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $CD \perp AB$ 于点 D ，若 $AC = 3$ ， $BD = 8$ ，则 $CD =$

_____ .

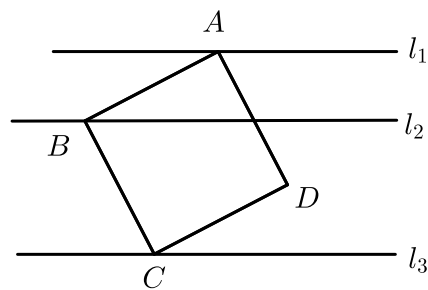


【答案】 $2\sqrt{2}$

【解析】 $\because \triangle ADC \sim \triangle ACB$,
 $\therefore \frac{AD}{AC} = \frac{AC}{BD + AD}$ 即 $\frac{AD}{3} = \frac{3}{8 + AD}$,
 解 $AD = 1$, 则 $BA = 9$,
 又 $\because \triangle ADC \sim \triangle BDC$,
 $\therefore \frac{AD}{CD} = \frac{CD}{BD} \Rightarrow CD^2 = AD \cdot BD = 8$,
 $\therefore CD = 2\sqrt{2}$.

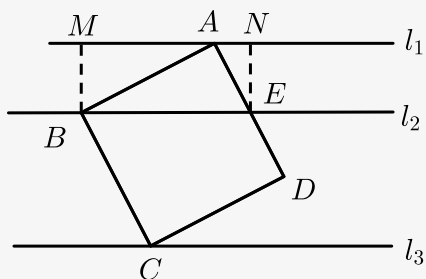
【标注】 【知识点】射影定理（双垂直）

57. 如图，直线 $l_1 // l_2 // l_3$ ，正方形 $ABCD$ 的三个顶点 A 、 B 、 C 分别在 l_1 、 l_2 、 l_3 上， l_1 与 l_2 之间的距离是2， l_2 与 l_3 之间的距离是4，则正方形 $ABCD$ 的面积为 _____ .



【答案】 20

【解析】 方法一：设 AD 与 l_2 交于点 E ，过点 B 、 E 向 l_1 作垂线，分别交 l_1 于点 M 、 N ，



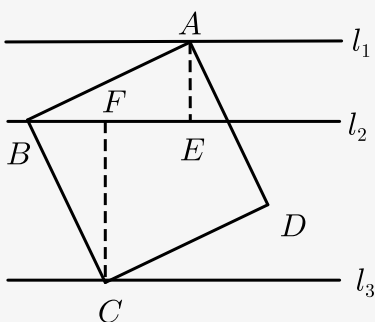
易知 $\triangle AEN \sim \triangle BAM$,

又 $\because AB:AE = 2:1$, $BM = EN = 2$,

$\therefore AM = 4$, $AN = 1$.

$$\begin{aligned} \therefore S_{\text{正方形}ABCD} &= 4S_{\triangle ABE} \\ &= 4 \times \frac{1}{2} \times 2 \times (4+1) \\ &= 20. \end{aligned}$$

方法二：过点A作 $AE \perp l_2$ ，过点C作 $CF \perp l_2$ ，



$\therefore \angle CBF + \angle BCF = 90^\circ$,

$\because$ 四边形ABCD是正方形，

$\therefore AB = BC = CD = AD$,

$\angle DAB = \angle ABC = \angle BCD = \angle CDA = 90^\circ$,

$\therefore \angle ABE + \angle CBF = 90^\circ$,

$\therefore \angle ABE = \angle BCF$,

在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle BCF$ 中，

$$\begin{cases} \angle AEB = \angle BFC \\ \angle ABE = \angle BCF \\ AB = BC \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABE \cong \triangle BCF (\text{AAS})$,

$\therefore BF = AE$,

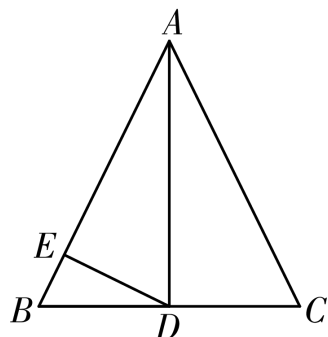
$\therefore BF^2 + CF^2 = BC^2$,

$\therefore BC^2 = 4^2 + 2^2 = 20$.

故答案为：20.

【标注】【知识点】一线三等角相似

58. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ， AD 为 BC 边上的中线， $DE \perp AB$ 于点 E 。



(1) 求证： $\triangle BDE \sim \triangle CAD$ 。

(2) 若 $AB = 13$ ， $BC = 10$ ，求线段 DE 的长。

【答案】 (1) 见解析

(2) 见解析

【解析】 (1) 证明： $\because AB = AC$ ， $BD = CD$ ，

$$\therefore AD \perp BC, \angle B = \angle C,$$

$$\because DE \perp AB,$$

$$\therefore \angle DEB = \angle ADC,$$

$$\therefore \triangle BDE \sim \triangle CAD.$$

(2) 解：由(1)知 $AD \perp BC$ ，

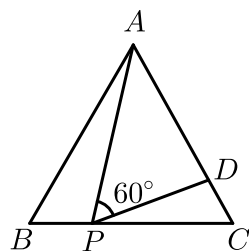
$$\text{在Rt}\triangle ADB\text{中}, AD = \sqrt{AB^2 - BD^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12,$$

$$\because \frac{1}{2} \cdot AD \cdot BD = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot DE,$$

$$\therefore DE = \frac{60}{13}.$$

【标注】【知识点】一线三等角相似

59. 如图，在等边 $\triangle ABC$ 中， P 为 BC 上一点， D 为 AC 上一点， $\angle APD = 60^\circ$ ， $BP = 1$ ， $CD = \frac{2}{3}$ 。



(1) 证明： $\triangle PCD \sim \triangle ABP$ 。

(2) 求： $\triangle ABC$ 的周长。

【答案】 (1) 证明见解析 .

(2) 9 .

【解析】 (1) $\because \triangle ABC$ 是等边三角形 ,

$$\therefore \angle DCP = \angle PBA = 60^\circ .$$

$$\because \angle APC = \angle APD + \angle DPC = \angle BAP + \angle ABP , \angle APD = 60^\circ ,$$

$$\therefore \angle BAP = \angle CPD .$$

$$\therefore \triangle ABP \sim \triangle PCD .$$

(2) 设 $\triangle ABC$ 的边长为 x ,

$$\because \triangle ABP \sim \triangle PCD ,$$

$$\therefore \frac{BP}{DC} = \frac{AB}{PC} ,$$

$$\therefore \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{x}{x-1} .$$

$$\therefore x = 3 .$$

$$\therefore \triangle ABC \text{ 的周长为 } 9 .$$

【标注】【知识点】一线三等角相似