

# 综合复习（一）练习

## 一、一元二次方程

### 练习

1. 下列方程中，① $2x^2 - 5 = 0$ ，② $2x^2 + \frac{1}{x} - 3 = 0$ ，③ $x^2 + 2x + 81 = 0$ ，④ $\sqrt{x^2 + 2x} = \sqrt{3}$ ，⑤ $x^2 + 2x + 2\sqrt{x^2 + 2x} - 3 = 0$ ，一元二次方程是\_\_\_\_\_。

【答案】①③

【解析】形如 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 的等式方程为一元二次方程。

【标注】【知识点】一元二次方程的定义

2. 下列关于 $x$ 的方程：① $ax^2 + bx + c = 0$ ；② $3(x - 9)^2 - (x + 1)^2 = 1$ ；③ $x + 3 = \frac{2}{x}$ ；④ $(a^2 + a + 1)x^2 - a = 0$ ；⑤ $\sqrt{x + 1} = x - 1$ ，其中一元二次方程的个数是（ ）。
- A. 1                      B. 2                      C. 3                      D. 4

【答案】B

【解析】①当 $a = 0$ 时， $ax^2 + bx + c = 0$ 是一元一次方程；

② $3(x - 9)^2 - (x + 1)^2 = 1$ 是一元二次方程；

③ $x + 3 = \frac{2}{x}$ 是分式方程；

④ $(a^2 + a + 1)x^2 - a = 0$ 是一元二次方程；

⑤ $\sqrt{x + 1} = x - 1$ 是无理方程。

故选：B。

【标注】【知识点】一元二次方程的定义

3. 已知 $x = 1$ 是一元二次方程 $(m^2 - 1)x^2 - mx + m^2 = 0$ 的一个根，那么 $m$ 的值是（ ）。
- A.  $\frac{1}{2}$ 或 $-1$                       B.  $-\frac{1}{2}$   
C.  $-\frac{1}{2}$ 或 $1$                       D.  $\frac{1}{2}$

**【答案】** B

**【解析】** 将 $x = 1$ 代入方程中有： $m^2 - 1 - m + m^2 = 0$ ，

$$2m^2 - m - 1 = 0,$$

$$(2m + 1)(m - 1) = 0,$$

$$\therefore m = 1 \text{ 或 } -\frac{1}{2},$$

$$\text{又} \because m^2 - 1 \neq 0,$$

$$\therefore m \neq \pm 1,$$

$$\text{综上 } m = -\frac{1}{2}.$$

故选B.

**【标注】**【知识点】由一元二次方程的解求参数的值

4. 若关于 $x$ 的方程 $x^2 + mx - 3n = 0$ 的一个根是3，则 $m - n$ 的值是（ ）.

A. -1

B. -3

C. 1

D. 3

**【答案】** B

**【解析】** 将 $x = 3$ 代入 $x^2 + mx - 3n = 0$ 得，

$$9 + 3m - 3n = 0,$$

$$\therefore 3(m - n) = -9,$$

$$m - n = -3.$$

故选B.

**【标注】**【知识点】利用根求代数式的值

5. 若 $m$ 是方程 $2x^2 - 3x - 1 = 0$ 的一个根，则 $6m^2 - 9m + 2016$ 的值为 \_\_\_\_\_ .

**【答案】** 2019

**【解析】**  $\because m$ 是方程 $2x^2 - 3x - 1 = 0$ 的一个根，

$$\therefore \text{代入得：} 2m^2 - 3m - 1 = 0,$$

$$\therefore 2m^2 - 3m = 1,$$

$$\therefore 6m^2 - 9m + 2016 = 3(2m^2 - 3m) + 2016 = 3 \times 1 + 2016 = 2019.$$

**【标注】**【知识点】利用根求代数式的值

6. 已知实数 $a$ 为方程 $x^2 - 2x - 2017 = 0$ 的正根, 则代数式 $\frac{2017}{2 + \frac{2017}{a}} + 1$ 的值为 \_\_\_\_\_ .

【答案】  $\sqrt{2018}$

【解析】 原式 $= \frac{2017}{\frac{2a+2017}{a}} + 1 = \frac{2017}{\frac{a^2}{a}} + 1 = \frac{2017}{a} + 1$   
 $= \frac{a^2 - 2a}{a} + 1 = a - 2 + 1 = a - 1$  ,  
 $\because a$ 是 $x^2 - 2a - 2017$ 的根 ,  
 $\therefore a = \sqrt{2018} + 1$  ,  
 $\therefore$ 原式 $= \sqrt{2018}$  .

【标注】 【知识点】 利用根求代数式的值

7. 已知 $a, b$ 是方程 $x^2 - x - 3 = 0$ 的两个根, 则代数式 $2a^3 + b^2 + 3a^2 - 11a - b + 2000$ 的值为 \_\_\_\_\_ .

【答案】 2018

【解析】  $\because a, b$ 是方程 $x^2 - x - 3 = 0$ 的两个根 ,  
 $\therefore a^2 - a - 3 = 0, b^2 - b - 3 = 0$ 即 $a^2 = a + 3, b^2 = b + 3$  ,  
 $\therefore 2a^3 + b^2 + 3a^2 - 11a - b + 2000$   
 $= 2a(a + 3) + b + 3 + 3(a + 3) - 11a - b + 2000$   
 $= 2a^2 - 2a + 2012$   
 $= 2(a + 3) - 2a + 2012$   
 $= 2a + 6 - 2a + 2012$   
 $= 2018$  .  
故答案为 : 2018 .

【标注】 【知识点】 利用根求代数式的值

8. 若 $a$ 为方程 $x^2 + x - 5 = 0$ 的解, 则 $a^2 + a + 1$ 的值为 ( ) .

A. 12

B. 6

C. 9

D. 16

【答案】 B

【解析】  $\because a$ 为方程 $x^2 + x - 5 = 0$ 的解 ,

$$\therefore a^2 + a - 5 = 0,$$

$$\therefore a^2 + a = 5,$$

$$\text{则 } a^2 + a + 1 = 5 + 1 = 6.$$

故选：B.

【标注】【知识点】利用根求代数式的值

9.  $m$  是方程  $x^2 + x - 1 = 0$  的根，则式子  $m^3 + 2m^2 + 2017$  的值为 ( ) .

A. 2017

B. 2018

C. 2019

D. 2020

【答案】B

【标注】【知识点】利用根求代数式的值

10. 实数  $a, b$  满足： $a^2 - 7a + 2 = 0$ ， $b^2 - 7b + 2 = 0$ ，且  $a \neq b$ ，则  $\frac{b}{a} + \frac{a}{b} = \underline{\hspace{2cm}}$  .

【答案】  $\frac{45}{2}$

【解析】略

【标注】【知识点】一元二次方程根与系数的关系

## 练习

11. 用配方法解方程  $x^2 + 4x + 1 = 0$  时，原方程应变形为 ( ) .

A.  $(x + 2)^2 = 3$

B.  $(x - 2)^2 = 3$

C.  $(x + 2)^2 = 5$

D.  $(x - 2)^2 = 5$

【答案】A

【解析】  $x^2 + 4x + 1 = (x + 2)^2 - 4 + 1 = (x + 2)^2 - 3 = 0$ ，即  $(x + 2)^2 = 3$  .

【标注】【能力】运算能力

【知识点】配方法求一元二次方程的根

12. 按要求解下列一元二次方程：

( 1 ) 解方程： $2x^2 + 4x - 7 = 0$  ( 配方法 ) .

- ( 2 ) 解方程： $2x^2 - 3x + 2 = 0$  ( 公式法 ) .
- ( 3 ) 解方程： $x^2 - 7x + 10 = 0$  ( 用适当方法 ) .
- ( 4 ) 解方程： $5(x+1)^2 = 7(x+1)$  ( 用适当方法 ) .

**【答案】** ( 1 )  $x = -1 \pm \frac{3\sqrt{2}}{2}$  .

( 2 ) 此方程没有实数解 .

( 3 )  $x_1 = 2$  ,  $x_2 = 5$  .

( 4 )  $x_1 = -1$  ,  $x_2 = \frac{2}{5}$  .

**【解析】** ( 1 )  $2x^2 + 4x - 7 = 0$  ,

$$x^2 + 2x = \frac{7}{2} ,$$

$$x^2 + 2x + 1 = \frac{9}{2} ,$$

$$(x+1)^2 = \frac{9}{2} ,$$

$$x = -1 \pm \frac{3\sqrt{2}}{2} .$$

( 2 )  $2x^2 - 3x + 2 = 0$

$$\because a = 2 , b = -3 , c = 2 .$$

$$\therefore \Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 2 \times 2 = -7 < 0 ,$$

$\therefore$  此方程没有实数解 .

( 3 )  $x^2 - 7x + 10 = 0$  ,

$$\therefore (x-2)(x-5) = 0 ,$$

$$\therefore x_1 = 2 , x_2 = 5 .$$

( 4 )  $\because 5(x+1)^2 = 7(x+1)$  ,

$$\therefore 5(x+1)^2 - 7(x+1) = 0 ,$$

$$\therefore (x+1)[5(x+1) - 7] = 0 ,$$

$$\therefore (x+1)(5x-2) = 0 ,$$

$$\therefore x_1 = -1 , x_2 = \frac{2}{5} .$$

**【标注】**【知识点】因式分解法求一元二次方程的根

13. 解下列方程：

( 1 )  $2x^2 + 8x - 1 = 0$  ( 公式法 ) .

( 2 )  $x^2 + 4x - 5 = 0$  ( 配方法 ) .

**【答案】** (1)  $x = \frac{-4 \pm 3\sqrt{2}}{2}$ .

(2)  $x_1 = -5, x_2 = 1$ .

**【解析】** (1)  $\because a = 2, b = 8, c = -1$ ,

$$\therefore \Delta = 64 - 4 \times 2 \times (-1) = 72 > 0,$$

$$\text{则 } x = \frac{-8 \pm 6\sqrt{2}}{4} = \frac{-4 \pm 3\sqrt{2}}{2}.$$

(2)  $\because x^2 + 4x + 5 = 0$ ,

$$\therefore x^2 + 4x + 4 = 9,$$

$$\therefore (x + 2)^2 = 9,$$

$$\therefore x + 2 = \pm 3,$$

$$\therefore x_1 = -5, x_2 = 1.$$

**【标注】**【知识点】公式法求一元二次方程的根

14. 解方程： $(2x^2 + x)^2 - 2(2x^2 + x) = 3$ .

**【答案】**  $x_1 = 1, x_2 = -\frac{3}{2}$ .

**【解析】** 设  $2x^2 + x = m$ , 则原方程化为  $m^2 - 2m - 3 = 0$ , 即  $(m - 3)(m + 1) = 0$ , 代回可得:

$$(2x^2 + x - 3)(2x^2 + x + 1) = 0, \text{ 即 } 2x^2 + x - 3 = 0 \text{ 或 } 2x^2 + x + 1 = 0.$$

$$2x^2 + x - 3 = 0, \text{ 可化为 } (2x + 3)(x - 1) = 0, \text{ 解得 } x_1 = 1, x_2 = -\frac{3}{2};$$

$2x^2 + x + 1 = 0$ , 用公式法解决,  $\Delta = 1^2 - 4 \times 2 \times 1 = -7 < 0$ , 故此方程无实数根.

$$\text{综上所述解为: } x_1 = 1, x_2 = -\frac{3}{2}.$$

$$\text{故答案为: } x_1 = 1, x_2 = -\frac{3}{2}.$$

**【标注】**【知识点】因式分解法求一元二次方程的根

15. 已知等腰三角形的腰和底的长分别是一元二次方程  $x^2 - 4x + 3 = 0$  的根, 则该三角形的周长可以是 ( ).

A. 5

B. 7

C. 5或7

D. 10

**【答案】** B

【解析】解方程  $x^2 - 4x + 3 = 0$ ,

$$(x-1)(x-3) = 0$$

解得  $x_1 = 3, x_2 = 1$ .

∴ 当底为3, 腰为1时, 由于  $3 > 1 + 1$ , 不符合三角形三边关系, 不能构成三角形.

∴ 等腰三角形的底为1, 腰为3.

∴ 三角形的周长为  $1 + 3 + 3 = 7$ .

【标注】【知识点】因式分解法求一元二次方程的根

16. 若关于  $x$  的一元二次方程  $kx^2 - 3x - 2 = 0$  有实数根, 则实数  $k$  的取值范围是 ( ).

A.  $k \geq -\frac{9}{8}$

B.  $k \leq -\frac{9}{8}$

C.  $k \geq -\frac{9}{8}$  且  $k \neq 0$

D.  $k \leq -\frac{9}{8}$  且  $k \neq 0$

【答案】C

【解析】∵ 关于  $x$  的一元二次方程  $kx^2 - 3x - 2 = 0$  有实数根,

$$\therefore \Delta = b^2 - 4ac \geq 0,$$

$$\text{即: } 9 + 8k \geq 0,$$

$$\text{解得: } k \geq -\frac{9}{8},$$

∵ 关于  $x$  的一元二次方程  $kx^2 - 3x - 2 = 0$  中  $k \neq 0$ ,

故答案为:  $k \geq -\frac{9}{8}$  且  $k \neq 0$ . 故选C.

【标注】【知识点】由一元二次方程根的情况确定参数

17. 已知关于  $x$  的一元二次方程  $kx^2 + (3k+1)x + 2k+1 = 0$ .

(1) 求证: 该方程必有两个实数根.

(2) 若该方程只有整数根, 求  $k$  的整数值.

【答案】(1) 证明见解析.

(2)  $k = \pm 1$ .

【解析】(1) 依题可知,  $kx^2 + (3k+1)x + 2k+1 = 0$  是关于  $x$  的一元二次方程,  $k \neq 0$ ,

$$\Delta = b^2 - 4ac = (3k+1)^2 - 4k(2k+1) = (k+1)^2 \geq 0,$$

∴ 该方程必有两个实数根.

(2)

$$x = \frac{-(3k+1) \pm \sqrt{(k+1)^2}}{2k} = \frac{-(3k+1) \pm (k+1)}{2k},$$

$$x_1 = \frac{-(3k+1) + (k+1)}{2k} = -1, \quad x_2 = \frac{-(3k+1) - (k+1)}{2k} = -2 - \frac{1}{k}.$$

∵ 方程只有整数根,

∴  $-2 - \frac{1}{k}$  应为整数, 即  $\frac{1}{k}$  应为整数.

∵  $k$  为整数,

∴  $k = \pm 1$ .

**【标注】**【知识点】一元二次方程根的判别式

18. 已知: 关于  $x$  的方程  $2x^2 + kx - 1 = 0$ .

(1) 求证: 方程有两个不相等的实数根.

(2) 若方程的一个根是  $x = -1$ , 求另一个根及  $k$  值.

**【答案】**(1) 证明见解析.

(2)  $\frac{1}{2}$ ,  $k = 1$ .

**【解析】**(1) ∵  $a = 2$ ,  $b = k$ ,  $c = -1$

$$\therefore \Delta = k^2 - 4 \times 2 \times (-1) = k^2 + 8,$$

∵ 无论  $k$  取何值,  $k^2 \geq 0$ ,

$$\therefore k^2 + 8 > 0, \text{ 即 } \Delta > 0,$$

∴ 方程  $2x^2 + kx - 1 = 0$  有两个不相等的实数根.

(2) 把  $x = -1$  代入原方程得,  $2 - k - 1 = 0$

$$\therefore k = 1,$$

∴ 原方程化为  $2x^2 + x - 1 = 0$ ,

$$\text{解得: } x_1 = -1, \quad x_2 = \frac{1}{2},$$

即另一个根为  $\frac{1}{2}$ .

**【标注】**【知识点】一元二次方程根与系数的关系

19. 关于  $x$  的一元二次方程  $x^2 - (m+3)x + m+2 = 0$ .

(1) 求证: 方程总有两个实数根.

(2) 若方程的两个实数根都是正整数, 求  $m$  的最小值.

**【答案】**(1) 证明见解析.

( 2 )  $m$  的最小值为  $-1$  .

【解析】( 1 ) 依题意, 得

$$\begin{aligned}\Delta &= [-(m+3)]^2 - 4(m+2) \\ &= m^2 + 6m + 9 - 4m - 8 \\ &= (m+1)^2.\end{aligned}$$

$$\therefore (m+1)^2 \geq 0,$$

$$\therefore \Delta \geq 0.$$

$\therefore$  方程总有两个实数根.

( 2 ) 解方程, 得  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = m + 2$ ,

$\therefore$  方程的两个实数根都是正整数,

$$\therefore m + 2 \geq 1.$$

$$\therefore m \geq -1.$$

$\therefore m$  的最小值为  $-1$  .

【标注】【知识点】由一元二次方程根的情况确定参数

20. 已知关于  $x$  的一元二次方程  $(m-1)x^2 - mx + 1 = 0$  有两个不相等的实数根, 则  $m$  的取值范围为 \_\_\_\_\_ .

【答案】  $m \neq 1$  且  $m \neq 2$

【解析】  $\therefore$  方程为一元二次方程,

$$\therefore m - 1 \neq 0, \text{ 即 } m \neq 1,$$

$\therefore$  方程有两个不相等的实数根,

$$\therefore \Delta = (-m)^2 - 4(m-1) = (m-2)^2 > 0,$$

$$\therefore m \neq 2,$$

综合得  $m \neq 1$  且  $m \neq 2$  .

故答案为:  $m \neq 1$  且  $m \neq 2$  .

【标注】【知识点】由一元二次方程根的情况确定参数

21. 若关于  $x$  的方程  $kx^2 - 6x + 9 = 0$  有实数根, 则  $k$  的取值范围是 ( ) .

A.  $k < 1$

B.  $k \leq 1$

C.  $k < 1$  且  $k \neq 0$

D.  $k \leq 1$  且  $k \neq 0$

【答案】B

【解析】(1) 当  $k = 0$  时,  $-6x + 9 = 0$ , 解得  $x = \frac{3}{2}$ ;

(2) 当  $k \neq 0$  时, 此方程是一元二次方程,

$\therefore$  关于  $x$  的方程  $kx^2 - 6x + 9 = 0$  有实数根,

$\therefore \Delta = (-6)^2 - 4k \times 9 \geq 0$ , 解得  $k \leq 1$ ,

由 (1)、(2) 得,  $k$  的取值范围是  $k \leq 1$ .

【标注】【知识点】由一元二次方程根的情况确定参数

22. 若关于  $x$  的方程  $kx^2 - 2x - 1 = 0$  有实数根, 则  $k$  的取值范围是 ( ).

A.  $k \geq -1$

B.  $k \geq -1$  且  $k \neq 0$

C.  $k \leq 1$

D.  $k \leq 1$  且  $k \neq 0$

【答案】A

【解析】(1) 当  $k = 0$  时, 方程为一元一次方程, 必有实数根;

(2) 当  $k \neq 0$  时, 方程为一元二次方程,

当  $\Delta \geq 0$  时, 方程有实数根,

$\Delta = 4 - 4k(-1) \geq 0$ ,

解得  $k \geq -1$ ,

综上所述,  $k \geq -1$ ,

故选A.

【标注】【知识点】由一元二次方程根的情况确定参数

23. 若关于  $x$  的一元二次方程  $(k-1)x^2 + 4x + 1 = 0$  有实数根, 则  $k$  的取值范围是 ( ).

A.  $k < 5$

B.  $k \geq 5$ , 且  $k \neq 1$

C.  $k \leq 5$ , 且  $k \neq 1$

D.  $k > 5$

【答案】C

【解析】 $\therefore$  关于  $x$  的一元二次方程  $(k-1)x^2 + 4x + 1 = 0$  有实数根,

$\therefore \begin{cases} k-1 \neq 0 \\ \Delta = 4^2 - 4(k-1) \geq 0 \end{cases}$

解得:  $k \leq 5$  且  $k \neq 1$ .

故选C.

**【标注】** **【知识点】** 由一元二次方程根的情况确定参数

24. 若关于 $x$ 的一元二次方程 $(k+1)x^2 - 4x - 1 = 0$ 有两个不相等的根, 则 $k$ 的取值范围是( ).

- A.  $k > -5$                       B.  $k > -5$  且  $k \neq -1$   
C.  $k < -5$                       D.  $k \geq -5$  且  $k \neq -1$

【答案】 B

【解析】根据题意得 $k+1 \neq 0$ 且 $\Delta = (-4)^2 - 4(k+1) \times (-1) > 0$ ,

所以  $k > -5$  且  $k \neq -1$ .

故选B.

**【标注】**【知识点】由一元二次方程根的情况确定参数

25. 已知 $m$ 、 $n$ 是方程 $x^2 + 2x - 5 = 0$ 的两个实数根, 则 $m^2 - mn + 3m + n =$ \_\_\_\_\_.

【答案】 8

**【解析】** 解：由 $m$ 、 $n$ 是方程 $x^2 + 2x - 5 = 0$ 的两个实数根，

得  $m+n=-2$ ,  $mn=-5$ , 且  $m^2+2m-5=0$ ,

因此  $m^2 - mn + 3m + n$

$$= (m^2 + 2m - 5) + m + n - mn + 5$$

$$= 0 - 2 + 5 + 5$$

$$= 8.$$

**【标注】** **【知识点】** 利用根求代数式的值

26. 若一元二次方程 $x^2 + 5x + 2 = 0$ 有两个根 $x_1, x_2$ , 则 $(2x_1 + 1)(2x_2 + 1) = \underline{\hspace{2cm}}$ ,

$$x_1^2 + x_2^2 = \underline{\hspace{2cm}}, \quad x_1^2 + x_1x_2 + 5x_1 = \underline{\hspace{2cm}}.$$

**【答案】**  $-1; 21; 0$

【解析】由韦达定理知  $x_1 + x_2 = -\frac{5}{1} = -5$ ,  $x_1 \cdot x_2 = \frac{2}{1} = 2$ ,

$$\therefore (2x_1 + 1)(2x_2 + 1) = 4x_1x_2 + 2(x_1 + x_2) + 1 = 4 \times 2 + 2 \times (-5) + 1 = -1,$$

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = (-5)^2 - 2 \times 2 = 21.$$

$$x_1^2 + x_1x_2 + 5x_1 = (x_1^2 + 5x_1) + x_1x_2 = -2 + 2 = 0.$$

【标注】【知识点】一元二次方程根与系数的关系

练习

27. 某型号的手机连续两次降价，每个售价由原来的1185元降到了580元，设平均每次降价的百分率为 $x$ ，列出方程正确的是（ ）。

A.  $580(1+x)^2 = 1185$

B.  $1185(1+x)^2 = 580$

C.  $580(1-x)^2 = 1185$

D.  $1185(1-x)^2 = 580$

【答案】D

【解析】设平均每次降价的百分率为 $x$ ，

由题意得出方程为： $1185(1-x)^2 = 580$ 。

故选：D。

【标注】【知识点】一元二次方程的增长率问题

28. 某企业2018年初获利润300万元，到2020年初计划利润达到507万元。设这两年的年利润平均增长率为 $x$ ，应列方程是（ ）。

A.  $300(1+x) = 507$

B.  $300(1+x)^2 = 507$

C.  $300(1+x) + 300(1+x)^2 = 507$

D.  $300 + 300(1+x) + 300(1+x)^2 = 507$

【答案】B

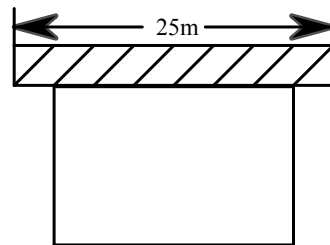
【解析】设这两年的年利润平均增长率为 $x$ ，

根据题意得： $300(1+x)^2 = 507$ 。

故选：B。

【标注】【知识点】一元二次方程的增长率问题

29. 如图，要建一个长方形养鸡场，养鸡场的一边靠墙（墙长25米），另三边用竹篱笆围成，竹篱笆的长为40米，若要围成的养鸡场的面积为180平方米，求养鸡场的长、宽各为多少米，设与墙平行的一边长为 $x$ 米。



(1) (用含 $x$ 的代数式表示)另一边长为 \_\_\_\_\_ 米.

(2) 列出方程, 并求出问题的解.

**【答案】** (1)  $\frac{40-x}{2}$

(2) 长  $(20 - 2\sqrt{10})$  米, 宽是  $(10 + \sqrt{10})$  米.

**【解析】** (1) 设与墙平行的一边长为 $x$ 米, 另一边长为 $\frac{40-x}{2}$ 米,

故答案是:  $\frac{40-x}{2}$ .

(2) 设平行于墙的一边为 $x$ 米, 则另一边长为 $\frac{40-x}{2}$ 米, 根据题意得:

$$x \cdot \frac{40-x}{2} = 180,$$

整理得出:

$$x^2 - 40x + 360 = 0,$$

$$\text{解得: } x_1 = 20 + 2\sqrt{10}, x_2 = 20 - 2\sqrt{10},$$

由于墙长25米, 而 $20 + 2\sqrt{10} > 25$ ,

$\therefore x_1 = 20 + 2\sqrt{10}$ , 不合题意舍去,

$\therefore 0 < 20 - 2\sqrt{10} < 25$ ,

$\therefore x_2 = 20 - 2\sqrt{10}$ , 符合题意,

此时 $\frac{40-x}{2} = 10 + \sqrt{10}$ ,

答: 此时鸡场靠墙的一边长  $(20 - 2\sqrt{10})$  米, 宽是  $(10 + \sqrt{10})$  米.

**【标注】**【知识点】一元二次方程的几何问题

30. 水上游艇是七里海湿地风景区特色旅游项目. 如果游客选择此项目, 风景区可盈利10元/人. 旅游旺季平均每天有500人选择此项目. 为增加盈利, 景区管理人员准备在旅游旺季提高票价, 经调查发现, 在其他条件不变的情况下, 票价每涨1元, 消费人员就减少20人.

(1) 现该项目保证每天盈利6000元, 同时又要旅游者尽量少花钱, 那么票价应涨价多少元?

(2) 若单纯从经济角度看, 票价涨价多少元, 能使该项目获利最多?

**【答案】** (1) 每位消费单价应涨价5元.

(2) 单纯从经济角度看, 每位消费金额涨价7.5元, 能使该项目获利最多.

**【解析】**(1) 设每位消费单价应涨价 $x$ 元, 根据题意得:

$$(10 + x)(500 - 20x) = 6000.$$

解方程得:  $x_1 = 10$ ,  $x_2 = 5$ ,

∵该项目要保证每天盈利6000元, 同时又要旅游者得到实惠,

$$\therefore x = 5,$$

答: 每位消费单价应涨价5元.

(2) 设每位消费金额涨价 $m$ 元, 能获利 $w$ 元, 根据题意得:

$$W = (10 + m)(500 - 20m) = -20m^2 + 300m + 5000,$$

$$\therefore a = -20 < 0,$$

$$\therefore m = -\frac{300}{-2 \times 20} = 7.5 \text{元时, 获利最多.}$$

答: 单纯从经济角度看, 每位消费金额涨价7.5元, 能使该项目获利最多.

**【标注】**【知识点】二次函数的利润问题

31. 某商场销售一批名牌衬衫, 平均每天可售出20件, 每件盈利40元, 为了扩大销售, 增加利润, 尽量减少库存, 商场决定采取适当的降价措施. 经调查发现, 如果每件衬衫每降价1元, 商场平均每天可多售出2件.

(1) 若商场平均每天要盈利1200元, 每件衬衫应降价多少元.

(2) 每件衬衫降价多少元时, 商场平均每天盈利最多.

**【答案】**(1) 每件衬衫应降价20元.

(2) 每件衬衫降价15元时, 商场平均每天盈利最多, 最大利润为1250元.

**【解析】**(1) 设每件衬衫应降价 $x$ 元,

$$\text{根据题意得 } (40 - x)(20 + 2x) = 1200,$$

$$\text{整理得 } 2x^2 - 60x + 400 = 0.$$

$$\text{解得 } x_1 = 20, x_2 = 10.$$

因为要尽量减少库存, 在获利相同的条件下, 降价越多, 销售越快,  
故每件衬衫应降20元.

答: 每件衬衫应降价20元.

(2) 设商场平均每天盈利 $y$ 元, 则

$$y = (20 + 2x)(40 - x)$$

$$= -2x^2 + 60x + 800$$

$$= -2(x^2 - 30x - 400)$$

$$= -2[(x - 15)^2 - 625]$$

$$= -2(x - 15)^2 + 1250 .$$

∴当 $x = 15$ 时， $y$ 取最大值，最大值为1250 .

答：每件衬衫降价15元时，商场平均每天盈利最多，最大利润为1250元 .

【标注】【知识点】二次函数的利润问题

## 二、二次函数

### 练习

32. 下列函数解析式中，一定为二次函数的是（ ） .

A.  $y = 3x - 1$

B.  $y = ax^2 + bx + c$

C.  $s = 2t^2 - 2t + 1$

D.  $y = x^2 + \frac{1}{x}$

【答案】C

【解析】 $y = 3x - 1$ 是一次函数，A错误；

$y = ax^2 + bx + c$ ，当 $a = 0$ 时，不是二次函数，B错误；

$s = 2t^2 - 2t + 1$ 是二次函数，C正确；

$y = x^2 + \frac{1}{x}$ 不是二次函数，D错误 .

【标注】【知识点】二次函数的定义

33. 二次函数 $y = (x - 1)^2 + 2$ 图象的顶点坐标是（ ） .

A.  $(1, -2)$

B.  $(-1, -2)$

C.  $(-1, 2)$

D.  $(1, 2)$

【答案】D

【解析】∵二次函数的顶点式是 $y = a(x - h)^2 + k$ ，其中 $(h, k)$ 是这个二次函数的顶点坐标，

∴二次函数 $y = (x - 1)^2 + 2$ 图象的顶点坐标是 $(1, 2)$  .

【标注】【知识点】二次函数 $y = a(x - h)^2 + k$ 的图象和性质

34. 已知二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 中，其函数 $y$ 与自变量 $x$ 之间的部分对应值如下表所示：

点 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$ 在函数的图象上，则当 $1 < x_1 < 2$ ， $3 < x_2 < 4$ 时， $y_1$ 与 $y_2$ 的大小关系正确的是（ ）.

|     |     |   |   |   |   |   |     |
|-----|-----|---|---|---|---|---|-----|
| $x$ | ... | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | ... |
| $y$ | ... | 4 | 1 | 0 | 1 | 4 | ... |

A.  $y_1 > y_2$

B.  $y_1 < y_2$

C.  $y_1 \geq y_2$

D.  $y_1 \leq y_2$

【答案】 B

【解析】 根据图表可以看出，对称轴是 $x = 2$ ，

$\therefore$ 当 $1 < x_1 < 2$ 时， $0 < y_1 < 1$ ，当 $3 < x_2 < 4$ 时， $1 < y_2 < 4$ ，

$\therefore y_1 < y_2$  .

【标注】 【知识点】 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$  的增减性

35. 二次函数 $y = x^2 + 4x + 6$ 的最小值为 \_\_\_\_\_ .

【答案】 2

【解析】 配方得： $y = (x + 2)^2 + 2$ ，

当 $x = -2$ 时，有最小值2 .

【标注】 【题型】 二次函数其他最值问题

36. 若二次函数 $y = x^2 + bx + 5$ 配方后为 $y = (x - 2)^2 + k$ ，则 $b$ 、 $k$ 的值分别为（ ） .

A. 0、5

B. 0、1

C. -4、5

D. -4、1

【答案】 D

【解析】  $\therefore y = (x - 2)^2 + k = x^2 - 4x + 4 + k$ ，

又 $\therefore y = x^2 + bx + 5$ ，

$\therefore x^2 - 4x + 4 + k = x^2 + bx + 5$ ，

$\therefore b = -4$ ， $k = 1$  .

故选D .

【标注】 【知识点】 二次函数顶点式

37. 关于函数 $y = -3(x + 4)^2 + 2$ ，下列叙述正确的是（ ）。

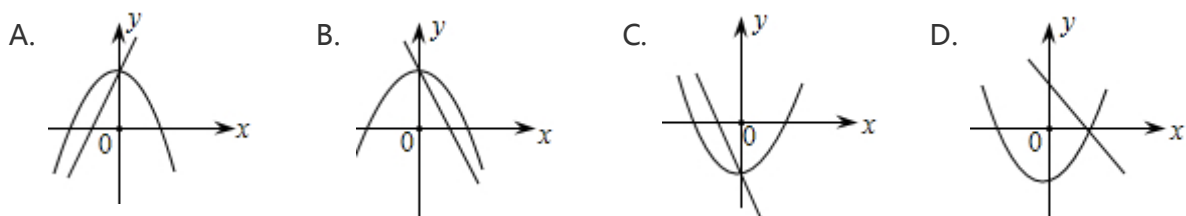
- A. 它的图象是一条关于直线 $x = 4$ 对称的抛物线
- B. 这个函数有最小值是2
- C. 当 $x < 0$ 时， $y$ 随着 $x$ 的增大而增大
- D. 当 $x < -4$ 时， $y$ 随着 $x$ 的增大而增大

【答案】 D

【解析】 函数 $y = -3(x + 4)^2 + 2$ 的图象是一条关于直线 $x = -4$ 对称的抛物线，所以当 $x < -4$ 时， $y$ 随着 $x$ 的增大而增大，有最大值是2，故答案为D。

【标注】 【题型】 二次函数其他最值问题

38. 在同一直角坐标系中，一次函数 $y = ax + c$ 和二次函数 $y = ax^2 + c$ 的图象可能为（ ）。



【答案】 B

【解析】 依次分析选项可得：

- A、分析一次函数 $y = ax + c$ 可得， $a > 0$ ， $c > 0$ ，二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 开口应向上；与图不符。
- B、分析一次函数 $y = ax + c$ 可得， $a < 0$ ， $c > 0$ ，二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 开口应向下，在 $y$ 轴上与一次函数交于同一点；符合。
- C、分析一次函数 $y = ax + c$ 可得， $a < 0$ ， $c < 0$ ，二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 开口应向下；与图不符。
- D、一次函数 $y = ax + c$ 和二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 常数项相同，在 $y$ 轴上应交于同一点；与图不符。

【标注】 【知识点】 一次函数与二次函数的交点

39. 写出一个开口向下，经过点 $(0, 3)$ 的抛物线的表达式 \_\_\_\_\_。

**【答案】** 答案不唯一

**【解析】** 由题意可得： $a < 0, c = 3$ ,

符合题意的解析式可以为： $y = -x^2 + x + 3$ （答案不唯一）.

故答案为： $y = -x^2 + x + 3$ （答案不唯一）.

**【标注】**【知识点】二次函数一般式

40. 已知二次函数 $y = -(x - 2)^2 + c$ ，当 $x = x_1$ 时，函数值为 $y_1$ ，当 $x = x_2$ 时，函数值为 $y_2$ ，若 $|x_1 - 2| > |x_2 - 2|$ ，则 $y_1$ 、 $y_2$ 的大小关系是（ ）.

A.  $y_1 < y_2$

B.  $y_1 > y_2$

C.  $y_1 = y_2$

D. 无法确定

**【答案】** A

**【解析】** 抛物线开口向下，越靠近对称轴直线 $x = 2$ 的函数值越大.

故选A.

**【标注】**【知识点】二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的增减性

41. 若二次函数 $y = 2x^2 - 3$ 的图象上有两个点 $A(-3, m)$ 、 $B(2, n)$ ，则 $m$  \_\_\_\_\_  $n$ （填“<”或“=”或“>”）.

**【答案】** >

**【解析】** 二次函数 $y = 2x^2 - 3$ 的开口向上，对称轴为 $y$ 轴，点 $A(-3, m)$ 关于对称轴的对称点为 $A'(3, m)$ ,

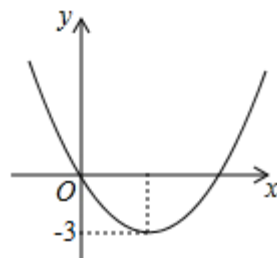
当 $x > 0$ 时，函数随 $x$ 的增大而增大，

$\therefore m > n$ . 也可求出 $m, n$ 的值进行比较.

**【标注】**【题型】二次函数增减性

## 练习

42. 二次函数 $y = ax^2 + bx$ 的图象如图，若一元二次方程 $ax^2 + bx - m = 0$ 有实数根，则 $m$ 的取值范围是 \_\_\_\_\_.



**【答案】**  $m \geq -3$

**【解析】**  $\because ax^2 + bx - m = 0$ ,

$$\therefore ax^2 + bx = m,$$

由二次函数  $y = ax^2 + bx$  的顶点纵坐标为  $-3$ ，且开口向上。

**【标注】**【题型】图象与系数的关系

43. 抛物线  $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$  上部分点的横坐标  $x$ ，纵坐标  $y$  的对应值如下表：

|     |          |      |      |     |     |     |     |          |
|-----|----------|------|------|-----|-----|-----|-----|----------|
| $x$ | $\cdots$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ | $3$ | $\cdots$ |
| $y$ | $\cdots$ | $0$  | $4$  | $6$ | $6$ | $4$ | $0$ | $\cdots$ |

(1) 求这个二次函数的表达式及顶点坐标。

(2) 直接写出当  $y < 0$  时  $x$  的取值范围。

**【答案】** (1) 二次函数的表达式为  $y = -x^2 + x + 6$ ，抛物线的顶点坐标为  $(\frac{1}{2}, \frac{25}{4})$ 。

(2)  $x < -2$  或  $x > 3$ 。

**【解析】** (1) 由表得，抛物线  $y = ax^2 + bx + c$  过点  $(0, 6)$ ，

$$\therefore c = 6.$$

$\because$  抛物线  $y = ax^2 + bx + 6$  过点  $(-1, 4)$  和  $(1, 6)$ ，

$$\therefore \begin{cases} a - b + 6 = 4 \\ a + b + 6 = 6 \end{cases}$$

$$\text{解得，} \begin{cases} a = -1 \\ b = 1 \end{cases}.$$

$\therefore$  二次函数的表达式为  $y = -x^2 + x + 6$ 。

$\because$  抛物线  $y = ax^2 + bx + c$  过点  $(0, 6)$  和  $(1, 6)$ ，

$\therefore$  抛物线的对称轴方程为  $x = \frac{1}{2}$ 。

$\because$  当  $x = \frac{1}{2}$  时， $y = \frac{25}{4}$ ，

$\therefore$  抛物线的顶点坐标为  $(\frac{1}{2}, \frac{25}{4})$ 。

(2) 当  $y < 0$  时  $x$  的取值范围是  $x < -2$  或  $x > 3$ 。

【标注】【知识点】二次函数一般式

44. 已知：二次函数 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 中的 $x$ 和 $y$ 满足下表：

|     |       |   |   |    |   |     |   |       |
|-----|-------|---|---|----|---|-----|---|-------|
| $x$ | ..... | 0 | 1 | 2  | 3 | 4   | 5 | ..... |
| $y$ | ..... | 3 | 0 | -1 | 0 | $m$ | 8 | ..... |

- (1) 可求得 $m$ 的值为 \_\_\_\_\_ .  
(2) 求出这个二次函数的解析式 .  
(3) 当 $0 < x < 3$ 时, 则 $y$ 的取值范围为 \_\_\_\_\_ .

【答案】(1) 3

(2)  $y = x^2 - 4x + 3$  .

(3)  $-1 \leq y < 3$

【解析】(1) 由表中数据知, 二次函数对称轴为直线 $x = 2$ ,

故当 $x = 0$ 和 $x = 4$ 时,  $y$ 的值相同,

$\therefore m = 3$  .

(2) 根据题意得: 
$$\begin{cases} c = 3 \\ a + b + c = 0 \\ 4a + 2b + c = -1 \end{cases}$$

解得: 
$$\begin{cases} a = 1 \\ b = -4 \\ c = 3 \end{cases}$$

则函数的解析式是:  $y = x^2 - 4x + 3$  .

(3) 函数的顶点坐标是:  $(2, -1)$  ,

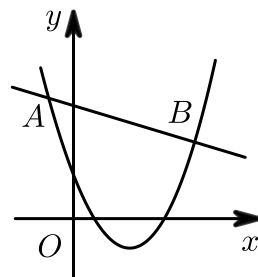
当 $0 < x < 3$ 时, 则 $y$ 的取值范围为:  $-1 \leq y < 3$  .

【标注】【知识点】二次函数一般式

【知识点】函数值

【知识点】探究函数性质

45. 已知二次函数 $y_1 = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 与一次函数 $y_2 = kx + m (k \neq 0)$ 的图象相交于点 $A(-2, 4)$ 、 $B(8, 2)$  (如图所示), 则能使 $y_1 > y_2$ 成立的 $x$ 的取值范围是 \_\_\_\_\_ .



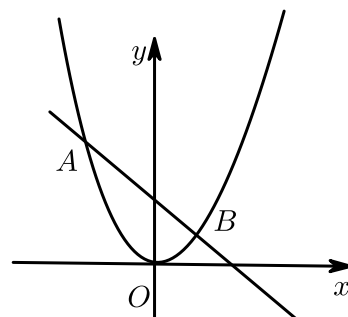
【答案】  $x < -2$  或  $x > 8$

【解析】 由题意知抛物线  $y_1 = ax^2 + bx + c$  和一次函数  $y_2 = kx + m (k \neq 0)$  的交点横坐标分别为  $-2, 8$ ,

当  $y_1 > y_2$  时, 由题图可知  $x$  的取值范围为  $x < -2$  或  $x > 8$ .

【标注】 【知识点】 一次函数与二次函数的交点

46. 如图, 抛物线  $y = ax^2$  与直线  $y = bx + c$  的两个交点坐标分别为  $A(-2, 4)$ ,  $B(1, 1)$ , 则关于  $x$  的方程  $ax^2 - bx - c = 0$  的解为 \_\_\_\_\_.



【答案】  $x_1 = -2, x_2 = 1$

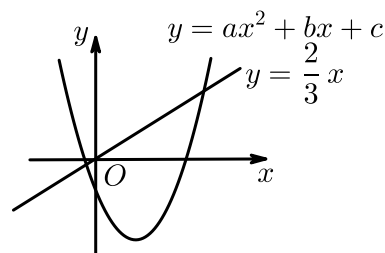
【解析】  $\because$  抛物线  $y = ax^2$  与直线  $y = bx + c$  的交点坐标为  $A(-2, 4)$ ,  $B(1, 1)$ ,

$\therefore$  方程  $ax^2 = bx + c$  的解为  $x_1 = -2, x_2 = 1$ ,

即方程  $ax^2 - bx - c = 0$  的解为  $x_1 = -2, x_2 = 1$ .

【标注】 【知识点】 一次函数与二次函数的交点

47. 二次函数  $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$  和正比例函数  $y = \frac{2}{3}x$  的图象如图所示, 则方程  $ax^2 + \left(b - \frac{2}{3}\right)x + c = 0 (a \neq 0)$  的两根之和 ( ).



- A. 大于0                      B. 等于0                      C. 小于0                      D. 不能确定

**【答案】** A

**【解析】** 解法一：

由函数图象可知，方程  $ax^2 + \left(b - \frac{2}{3}\right)x + c = 0 (a \neq 0)$  的两根为函数  $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$  和函数  $y = \frac{2}{3}x$  的交点横坐标，  
易得，两根之和大于0。

解法二：

设  $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$  的两根为  $x_1, x_2$ 。

$\because$  由二次函数的图象可知  $x_1 + x_2 > 0, a > 0$ ,

$$\therefore -\frac{b}{a} > 0.$$

设方程  $ax^2 + \left(b - \frac{2}{3}\right)x + c = 0 (a \neq 0)$  的两根为  $x_3, x_4$ ,

$$\text{则 } x_3 + x_4 = \frac{-b - \frac{2}{3}}{a} = -\frac{b}{a} + \frac{2}{3a},$$

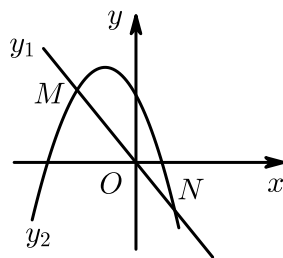
$$\because a > 0,$$

$$\therefore \frac{2}{3a} > 0,$$

$$\therefore x_3 + x_4 > 0.$$

**【标注】** 【知识点】二次函数与一元二次方程的关系

48. 如图，一次函数  $y = -x$  与二次函数为  $y = ax^2 + bx + c$  的图象相交于点  $M, N$ ，则关于  $x$  的一元二次方程  $ax^2 + (b+1)x + c = 0$  的根的情况是 ( )。



- A. 有两个不相等的实数根                      B. 有两个相等的实数

C. 没有实数根

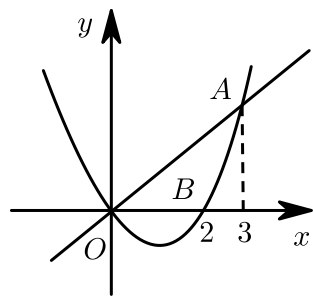
D. 以上结论都正确

**【答案】** A

**【解析】** 方程的根即为两函数交点的横坐标，图象显示两函数有两个交点，所以方程有两个不相等的实数根，故答案为A.

**【标注】**【知识点】一次函数与二次函数的交点

49. 如图，已知二次函数 $y_1 = \frac{2}{3}x^2 - \frac{4}{3}x$ 的图象与正比例函数 $y_2 = \frac{2}{3}x$ 的图象交于点 $A(3, 2)$ ，与 $x$ 轴交于点 $B(2, 0)$ ，若 $0 < y_1 < y_2$ ，则 $x$ 的取值范围是( ) .



A.  $0 < x < 2$

B.  $0 < x < 3$

C.  $2 < x < 3$

D.  $x < 0$ 或 $x > 3$

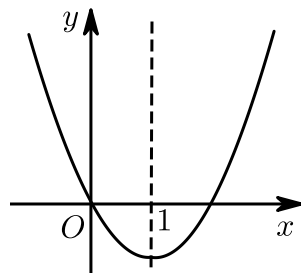
**【答案】** C

**【解析】**  $\because$ 二次函数 $y_1 = \frac{2}{3}x^2 - \frac{4}{3}x$ 的图象与正比例函数 $y_2 = \frac{2}{3}x$ 的图象交于点 $A(3, 2)$ ，与 $x$ 轴交于点 $B(2, 0)$ ，

$\therefore$ 由图象得：若 $0 < y_1 < y_2$ ，则 $x$ 的取值范围是： $2 < x < 3$  .

**【标注】**【知识点】一次函数与二次函数的交点

50. 二次函数 $y = x^2 + bx$ 的图象如图，对称轴为直线 $x = 1$ ，若关于 $x$ 的一元二次方程 $x^2 + bx - t = 0$  ( $t$ 为实数) 在 $-1 < x < 4$ 的范围内有解，则 $t$ 的取值范围是( ) .



A.  $t \geq -1$

B.  $-1 \leq t < 3$

C.  $-1 \leq t < 8$

D.  $3 < t < 8$

【答案】C

【解析】对称轴为直线  $x = -\frac{b}{2 \times 1} = 1$ ，解得  $b = -2$ ，

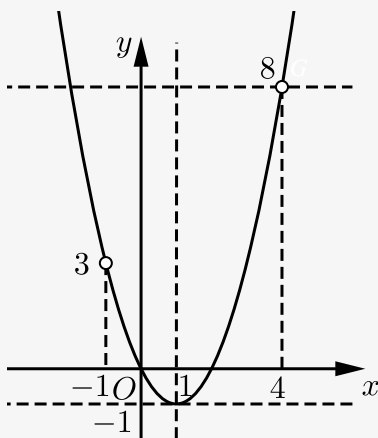
所以，二次函数解析式为  $y = x^2 - 2x$ ， $y = (x - 1)^2 - 1$ ，

当  $x = -1$  时， $y = 1 + 2 = 3$ ；当  $x = 4$  时， $y = 16 - 2 \times 4 = 8$ ，

$\therefore x^2 + bx - t = 0$  相当于  $y = x^2 + bx$  与直线  $y = t$  的交点的横坐标，

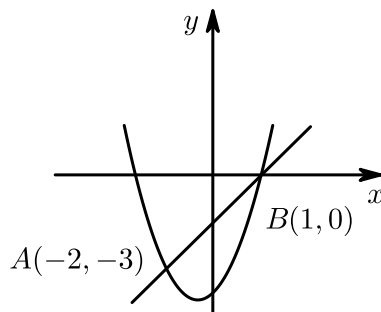
$\therefore$  当  $-1 \leq t < 8$  时，在  $-1 < x < 4$  的范围内有解。

故选C。



【标注】【知识点】二次函数与一元二次方程的关系

51. 如图，二次函数  $y = ax^2 + bx + c$  ( $a \neq 0$ ) 和一次函数  $y = x - 1$  的图象交于  $A(-2, -3)$ 、 $B(1, 0)$  两点，则方程  $ax^2 + (b - 1)x + c + 1 = 0$  的根为 ( )。



A.  $x_1 = -2$ ， $x_2 = -3$

B.  $x_1 = 1$ ， $x_2 = 0$

C.  $x_1 = -2$ ， $x_2 = 1$

D.  $x_1 = -3$ ， $x_2 = 0$

【答案】C

【解析】 $\because ax^2 + (b - 1)x + c + 1 = 0$ ，

$\therefore ax^2 + bx + c = x - 1$ ，

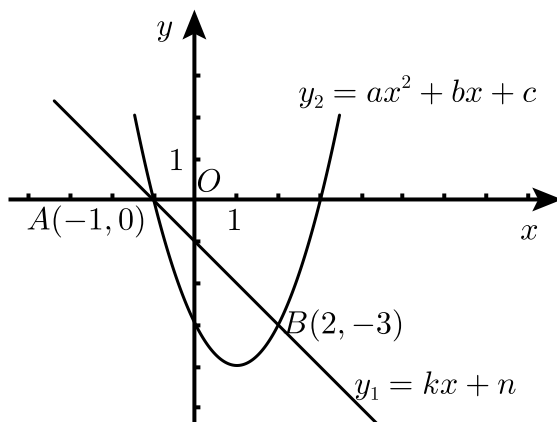
$\therefore$  方程  $ax^2 + (b-1)x + c + 1 = 0$  的根即为二次函数  $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$  和一次函数  $y = x - 1$  的图象交点的横坐标,

$\therefore$  二次函数  $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$  和一次函数  $y = x - 1$  的图象交于  $A(-2, -3)$ 、 $B(1, 0)$  两点,

$\therefore$  方程  $ax^2 + (b-1)x + c + 1 = 0$  的根为  $x_1 = -2, x_2 = 1$ ,  
故选 C.

**【标注】**【知识点】二次函数与一元二次方程的关系

52. 如图, 直线  $y_1 = kx + n (k \neq 0)$  与抛物线  $y_2 = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$  分别交于  $A(-1, 0)$ ,  $B(2, -3)$  两点, 那么当  $y_1 > y_2$  时,  $x$  的取值范围是 \_\_\_\_\_.



**【答案】**  $-1 < x < 2$

**【解析】** 因为直线  $y_1 = kx + n (k \neq 0)$  与抛物线  $y_2 = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$  分别交于  $A(-1, 0)$ ,  $B(2, -3)$  两点,  
所以当  $y_1 > y_2$  时,  $-1 < x < 2$ .  
故答案为:  $-1 < x < 2$ .

**【标注】**【知识点】一次函数与二次函数的交点

## 练习

53. 已知函数  $y_1 = a - x^2 (1 \leq x \leq 2)$  图象上某点  $P$ , 其关于  $x$  轴的对称点在函数  $y_2 = x + 1$  的图象上, 则实数  $a$  的取值范围是 ( ).

A.  $a \geq -\frac{5}{4}$   
C.  $-\frac{5}{4} \leq a \leq 1$

B.  $1 \leq a \leq 2$   
D.  $-1 \leq a \leq 1$

【答案】D

【解析】若函数 $y_1 = a - x^2$  ( $1 \leq x \leq 2$ ) 图象上某点关于 $x$ 轴的对称点在函数 $y_2 = x + 1$ 的图象上，

则方程 $a - x^2 = -(x + 1) \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = a$ 在 $1 \leq x \leq 2$ 范围内有解．

令 $y = x^2 - x - 1$  ( $1 \leq x \leq 2$ )，

由 $y = x^2 - x - 1$ 的图象是开口朝上，且以直线 $x = \frac{1}{2}$ 为对称轴的抛物线，故当 $x = 1$ 时， $y$ 有最小值 $-1$ ，当 $x = 2$ 时， $y$ 有最大值 $1$ ，故 $-1 \leq a \leq 1$ ．

【标注】【知识点】定直线（线段）与动抛物线交点问题

54. 已知抛物线 $y = x^2 - 6x + 5$ ，则其关于 $y$ 轴对称的抛物线的表达式为 \_\_\_\_\_；关于 $x$ 轴对称的抛物线的表达式为 \_\_\_\_\_；关于原点对称的抛物线的表达式为 \_\_\_\_\_．

【答案】 $y = x^2 + 6x + 5$ ； $y = -x^2 + 6x - 5$ ； $y = -x^2 - 6x - 5$

【解析】二次函数解析式转化为顶点式为 $y = (x - 3)^2 - 4$ ，顶点坐标为 $(3, -4)$ ，

关于 $y$ 轴对称后顶点坐标为 $(-3, -4)$ ，开口大小和方向不变，

则对称后的解析式是 $y = (x + 3)^2 - 4$ ，即 $y = x^2 + 6x + 5$ ；

关于 $x$ 轴对称后顶点坐标为 $(3, 4)$ ，开口大小不变，方向改变，

则对称后的解析式是 $y = -(x - 3)^2 + 4$ ，即 $y = -x^2 + 6x - 5$ ；

关于原点对称后顶点坐标为 $(-3, 4)$ ，开口大小不变，方向改变，

则对称后的解析式是 $y = -(x + 3)^2 + 4$ ，即 $y = -x^2 - 6x - 5$ ．

【标注】【知识点】二次函数图象关于坐标轴对称

55. 若将抛物线 $y = x^2 + 2$ 先向右平移2个单位长度，再向下平移2个单位长度，则所得到的抛物线的顶点坐标是（ ）．

A.  $(2, 0)$

B.  $(-2, 0)$

C.  $(0, 2)$

D.  $(0, 4)$

【答案】A

【解析】将抛物线 $y = x^2 + 2$ 先向右平移2个单位长度，再向下平移2个单位长度，得到

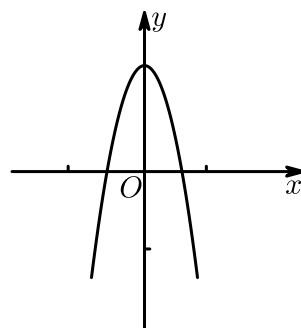
$y = (x - 2)^2 + 2 - 2$ ，整理得 $y = (x - 2)^2$ ，该抛物线的顶点坐标是 $(2, 0)$ ．

故选A．

【标注】【知识点】二次函数平移变换

【能力】运算能力

56. 二次函数 $y = -3x^2 + 1$ 的图象如图所示，将其沿 $x$ 轴翻折后得到的抛物线的解析式为 \_\_\_\_\_ .



【答案】 $y = 3x^2 - 1$

【解析】 $y = -3x^2 + 1$ 顶点为 $(0, 1)$ 关于 $x$ 轴对称，对应点 $(0, -1)$ ，  
对称前后 $a$ 互为相反数，则 $y = 3x^2 - 1$  .

【标注】【知识点】二次函数图象关于坐标轴对称

57. 将抛物线 $y = 2x^2$ 经过怎样的平移可得到抛物线 $y = 2(x + 3)^2 + 4$ ？答：( ) .

- A. 先向左平移3个单位，再向上平移4个单位
- B. 先向左平移3个单位，再向下平移4个单位
- C. 先向右平移3个单位，再向上平移4个单位
- D. 先向右平移3个单位，再向下平移4个单位

【答案】A

【解析】 $\because$  抛物线 $y = 2x^2$ 的顶点坐标为 $(0, 0)$ ，抛物线 $y = 2(x + 3)^2 + 4$ 的顶点坐标为 $(-3, 4)$ ，  
 $\therefore$  先向左平移3个单位，再向上平移4个单位 .

【标注】【知识点】二次函数平移变换

58. 若二次函数 $y = x^2 + bx$ 的图象的对称轴是直线 $x = -2$ ，则关于 $x$ 的方程 $x^2 + bx = 0$ 的解为 ( ) .

- A.  $x_1 = 0, x_2 = -4$
- B.  $x_1 = 0, x_2 = 4$
- C.  $x_1 = 1, x_2 = -5$
- D.  $x_1 = -1, x_2 = 5$

【答案】A

【解析】 $\because$ 对称轴是直线 $x = -2$ ,

$$\therefore -\frac{b}{2a} = -2, a = 1.$$

解得 $b = 4$ .

解方程 $x^2 - 4x = 0$ ,

解得 $x_1 = 0, x_2 = -4$ .

【标注】【题型】图象与系数的关系

59. 在平面直角坐标系中, 将抛物线 $y = x^2 - 4$ 先向右平移2个单位, 再向上平移2个单位, 得到的抛物线解析式为( ).

A.  $y = (x + 2)^2 + 2$

B.  $y = (x - 2)^2 - 2$

C.  $y = (x - 2)^2 + 2$

D.  $y = (x + 2)^2 - 2$

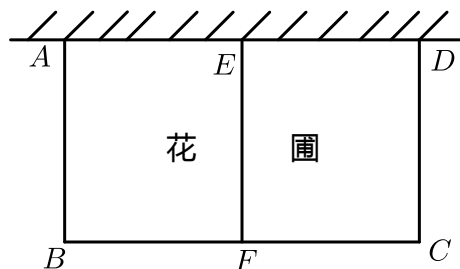
【答案】B

【解析】依据“左加右减, 上加下减”,  $y = x^2 - 4$ 再向右平移2个单位, 再向上平移2个单位后为 $y = (x - 2)^2 - 4 + 2$ , 所以 $y = (x - 2)^2 - 2$ , 故答案为B.

【标注】【知识点】二次函数平移变换

## 练习

60. 学校要围一个矩形花圃, 其一边利用足够长的墙, 另三边用篱笆围成, 由于园艺需要, 还要用一段篱笆将花圃分隔为两个小矩形部分(如图所示), 总共36米的篱笆恰好用完(不考虑损耗). 设矩形垂直于墙面的一边 $AB$ 的长为 $x$ 米(要求 $AB < AD$ ), 矩形花圃 $ABCD$ 的面积为 $S$ 平方米.



(1) 求 $S$ 与 $x$ 之间的函数关系式, 并直接写出自变量 $x$ 的取值范围.

(2) 要想使矩形花圃 $ABCD$ 的面积最大,  $AB$ 边的长应为多少米?

【答案】(1)  $S = -3x^2 + 36x (0 < x < 9)$ .

(2) 要想使矩形花圃 $ABCD$ 的面积最大,  $AB$ 边的长应为6米.

【解析】(1) 由题意得:  $AB = x$ ,  $BC = 36 - 3x$ ,

$$S = AB \cdot BC = x(36 - 3x) = -3x^2 + 36x (0 < x < 9),$$

即 $S$ 与 $x$ 之间的函数关系式为:  $S = -3x^2 + 36x (0 < x < 9)$

$$(2) S = -3x^2 + 36x = -3(x - 6)^2 + 108,$$

$$\because 0 < 6 < 9,$$

$\therefore x = 6$ 时,  $S$ 取得最大值108.

答: 要想使矩形花圃 $ABCD$ 的面积最大,  $AB$ 边的长应为6米.

【标注】【知识点】二次函数的几何问题

61. 某汽车租赁公司拥有20辆汽车. 据统计, 当每辆车的日租金为400元时, 可全部租出; 当每辆车的日租金每增加50元, 未租出的车将增加1辆; 公司平均每日的各项支出共4800元. 设公司每日租出 $x$ 辆车时, 日收益为 $y$ 元 (日收益=日租金收入-平均每日各项支出).

(1) 公司每日租16辆车时, 每辆车的日租金为 \_\_\_\_\_ 元; 公司每日租 $x$ 辆车时, 每辆车的日租金为 \_\_\_\_\_ 元 (用含 $x$ 的代数式表示).

(2) 当每日租出多少辆时, 租赁公司日收益最大? 最大是多少元?

【答案】(1) 600;  $1400 - 50x$

(2) 当每日租出14辆时, 租赁公司日收益最大, 最大值为5000元.

【解析】(1)  $\because$  某汽车租赁公司拥有20辆汽车.

据统计, 当每辆车的日租金为400元时, 可全部租出;

当每辆车的日租金每增加50元, 未租出的车将增加1辆;

$$\therefore \text{当全部未租出时, 每辆租金为: } 400 + 20 \times 50 = 1400 \text{ 元,}$$

$\therefore$  公司每日租出 $x$ 辆车时, 每辆车的日租金为:  $1400 - 50x$ , 公司每日租16辆车时, 每辆车的日租金为600元.

(2) 根据题意得出:

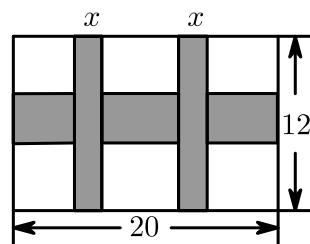
$$y = x(-50x + 1400) - 4800 = -50x^2 + 1400x - 4800 = -50(x - 14)^2 + 5000,$$

当 $x = 14$ 时, 在范围内,  $y$ 有最大值5000.

$\therefore$  当每日租出14辆时, 租赁公司日收益最大, 最大值为5000元.

【标注】【知识点】二次函数的利润问题

62. 一幅长20cm、宽12cm的图案，如图，其中有一横两竖的彩条，横、竖彩条的宽度比为3:2. 设竖彩条的宽度为 $x$ cm，图案中三条彩条所占面积为 $y\text{cm}^2$ .



- (1) 求 $y$ 与 $x$ 之间的函数关系式.  
 (2) 若图案中三条彩条所占面积是图案面积的 $\frac{2}{5}$ ，求横、竖彩条的宽度.

**【答案】** (1)  $y = -3x^2 + 54x$ .

(2) 横彩条的宽度为3cm，竖彩条的宽度为2cm.

**【解析】** (1) 根据题意可知，横彩条的宽度为 $\frac{3}{2}x$ cm，

$$\therefore y = 20 \times \frac{3}{2}x + 2 \times 12 \cdot x - 2 \times \frac{3}{2}x \cdot x = -3x^2 + 54x,$$

即 $y$ 与 $x$ 之间的函数关系式为 $y = -3x^2 + 54x$ .

(2) 根据题意，得： $-3x^2 + 54x = \frac{2}{5} \times 20 \times 12$ ,

$$\text{整理，得：} x^2 - 18x + 32 = 0,$$

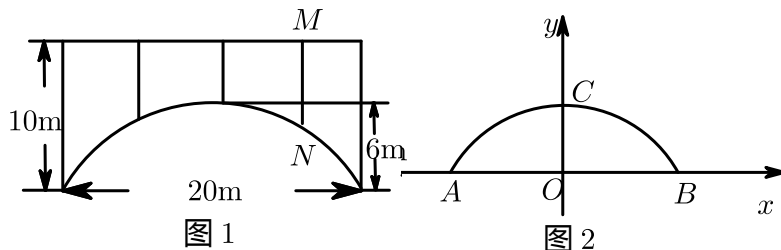
$$\text{解得：} x_1 = 2, x_2 = 16 \text{ (舍)},$$

$$\therefore \frac{3}{2}x = 3,$$

答：横彩条的宽度为3cm，竖彩条的宽度为2cm.

**【标注】**【知识点】二次函数的几何问题

63. 一座拱桥的轮廓是抛物线型(如图1所示)，拱高6m，跨度20m，相邻两支柱间的距离均为5m.



- (1) 将抛物线放在所给的直角坐标系中(如图2所示)，其表达式是 $y = ax^2 + c$ 的形式. 请根据所给的数据求出 $a$ ， $c$ 的值.  
 (2) 求支柱 $MN$ 的长度.  
 (3) 拱桥下地平面是双向行车道(正中间是一条宽2m的隔离带)，其中的一条行车道能否并排行驶宽2m、高3m的三辆汽车(汽车间的间隔忽略不计)? 请说说你的理由.

【答案】(1)  $a = -\frac{3}{50}$ ,  $c = 6$ .

(2) 支柱  $MN$  的长度是 5.5 米.

(3) 一条行车道能并排行驶这样的三辆汽车.

【解析】(1) 根据题目条件,  $A$ 、 $B$ 、 $C$  的坐标分别是  $(-10, 0)$ 、 $(10, 0)$ 、 $(0, 6)$ .

将  $B$ 、 $C$  的坐标代入  $y = ax^2 + c$ , 得  $\begin{cases} 6 = c \\ 0 = 100a + c \end{cases}$

解得  $a = -\frac{3}{50}$ ,  $c = 6$ .

所以抛物线的表达式是  $y = -\frac{3}{50}x^2 + 6$ .

(2) 可设  $N(5, y_N)$ , 于是  $y_N = -\frac{3}{50} \times 5^2 + 6 = 4.5$ .

从而支柱  $MN$  的长度是  $10 - 4.5 = 5.5$  米.

(3) 设  $DE$  是隔离带的宽,  $EG$  是三辆车的宽度和, 则  $G$  点坐标是  $(7, 0)$ ,

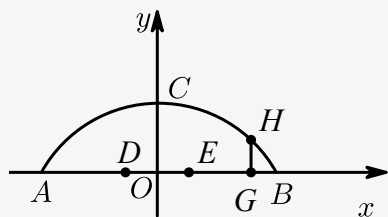


图 2

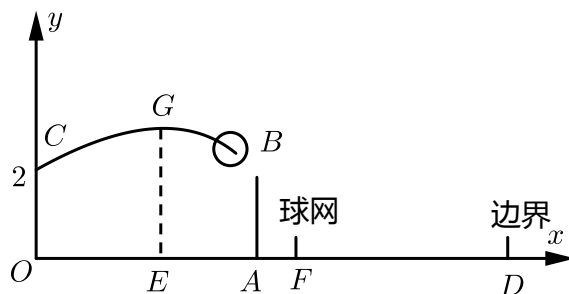
$(7 = 2 \div 2 + 2 \times 3)$ .

过  $G$  点作  $GH$  垂直  $AB$  交抛物线于  $H$ , 则  $y_H = -\frac{3}{50} \times 7^2 + 6 = 3 + \frac{3}{50} > 3$ .

根据抛物线的特点, 可知一条行车道能并排行驶这样的三辆汽车.

【标注】【知识点】二次函数的通行问题

64. 如图, 女子排球场的长度  $OD$  为 18m, 位于排球场上中线处网的高度  $AB$  为 2.24m, 一队员站在点  $O$  处发球, 排球从点  $O$  的正上方 2m 的  $C$  点向正前方飞出, 当排球运行至离点  $O$  的水平距离  $OE$  为 6m 时到达最高点  $G$ . 将排球看成一个点, 它运动的轨迹是抛物线, 建立如图所示的平面直角坐标系.



(1) 当球上升的最大高度为 3 米时, 求排球飞行的高度  $y$  (单位: m) 与水平距离  $x$  (单位: m) 的函数关系式 (不要求写自变量  $x$  的取值范围).

- (2) 在(1)的条件下, 对方距球网1m的点F处有一队员, 他起跳后的最大高度为2.7m, 问这次他是否可以拦网成功? 请通过计算说明.
- (3) 若队员发球既要过网, 又不出界, 问排球飞行的最大高度 $h(m)$ 的取值范围是 \_\_\_\_\_ (排球压线属于没出界).

**【答案】** (1)  $y = -\frac{1}{36}(x-6)^2 + 3$ .

(2) 这次可以拦网成功.

(3)  $h \geq \frac{8}{3}$

**【解析】** (1) 顶点 $G(6, 3)$ ,

$$\text{设 } y = a(x-6)^2 + 3,$$

$$\text{把 } C(0, 2) \text{ 代入得 } 2 = a(0-6)^2 + 3$$

$$a = -\frac{1}{36},$$

$$\therefore y = -\frac{1}{36}(x-6)^2 + 3.$$

(2) 由题意可知:  $OD = 18$ ,

$$\therefore OB = 9, OF = 9 + 1 = 10,$$

$$\begin{aligned} \text{当 } x = 10 \text{ 时, } y &= -\frac{1}{36}(10-6)^2 + 3 \\ &= 2.56 < 2.7, \end{aligned}$$

$\therefore$  这次可以拦网成功.

(3) 设  $y = a(x-6)^2 + h$ ,

将 $C(0, 2)$ 代入得:

$$a(0+6)^2 + h = 2$$

$$a = \frac{2-h}{36},$$

$$\therefore y = \frac{2-h}{36}(x-6)^2 + h,$$

$$\text{由 } \begin{cases} \frac{2-h}{36}(9-6)^2 + h > 2.24 \\ \frac{2-h}{36}(18-6)^2 + h \leq 0 \end{cases},$$

$$\text{解得: } h \geq \frac{8}{3}.$$

**【标注】**【知识点】二次函数的轨迹问题