此时$\overrightarrow{BF}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}-\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}\Rightarrow\begin{cases}\lambda=-\frac{3}{4}\\ \mu=\frac{1}{4}\end{cases}\Rightarrow\lambda+\mu=-\frac{1}{2}$，

可设$\overrightarrow{BG}=k\,\overrightarrow{BC}=k(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})(k\in[0,1])$，

则$\overrightarrow{FG}=\overrightarrow{BG}-\overrightarrow{BF}=k(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})-(\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}-\frac{3}{4}\overrightarrow{AB})$

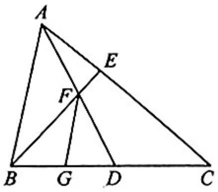
$=(k-\frac{1}{4})\overrightarrow{AC}-(k-\frac{3}{4})\overrightarrow{AB}$，

$\therefore\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{FG}=(\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}-\frac{3}{4}\overrightarrow{AB})\cdot[(k-\frac{1}{4})\overrightarrow{AC}-(k-\frac{3}{4})\overrightarrow{AB}]$

$=(\frac{k}{4}-\frac{1}{16})\overrightarrow{AC}^2-(k-\frac{3}{8})\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+(\frac{3k}{4}-\frac{9}{16})\overrightarrow{AB}^2$

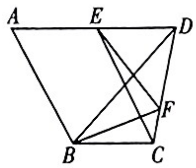
$=\frac{9k}{4}-\frac{27}{16}$.

当$k=1$时，$\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{FG}$取最大值，为$\frac{9}{16}$.




**50.** $\frac{1}{2}$　$\frac{59}{112}$　$\because AD=2BC=2,AB=\frac{3}{2},\angle DAB=60°$，

$\therefore\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}=2\times\frac{3}{2}\times\cos 60°=\frac{3}{2}$，




$\because\overrightarrow{AE}=\lambda\overrightarrow{AD}$，

$\therefore\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AE}$

$=(\lambda-\frac{1}{2})\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}$，

$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}$，

$\therefore\overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{BD}=(\lambda-\frac{1}{2})\overrightarrow{AD}^2+\overrightarrow{AB}^2-(\lambda+\frac{1}{2})\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=\frac{3}{4}$，

$\therefore\lambda=\frac{1}{2}$；

不妨设$\overrightarrow{CF}=\mu\overrightarrow{CD}$，$0\leqslant\mu\leqslant1$，

$\because AE=BC$且$AE/\!/BC$，$\therefore$四边形$AECB$为平行四边形，

$\therefore\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{AB}$，

又$\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}$，

$\therefore\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{CF}=\frac{1}{2}\mu\overrightarrow{AD}+(1-\mu)\overrightarrow{AB}$，

$\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BC}+\mu\overrightarrow{CD}=(\frac{1}{2}\mu+\frac{1}{2})\overrightarrow{AD}-\mu\overrightarrow{AB}$，

$\therefore\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{BF}=\frac{1}{2}\mu\cdot(\frac{1}{2}\mu+\frac{1}{2})\cdot2^2-\mu\cdot(1-\mu)\cdot(\frac{3}{2})^2+$

$(\frac{1}{2}-\mu^2)\cdot\frac{3}{2}=\frac{7}{4}\mu^2-\frac{5}{4}\mu+\frac{3}{4}=\frac{7}{4}(\mu-\frac{5}{14})^2+\frac{59}{112}$，

$\therefore$当$\mu=\frac{5}{14}$时，$\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{BF}$取最小值，为$\frac{59}{112}$.

## 专题十一　基本不等式

**1. C**　由$m>-2,n>1$，可得$m+2>0,n-1>0$，

且$m+n=3$，得$4=m+2+n-1\geqslant2\sqrt{(m+2)(n-1)}$，

当且仅当$m+2=n-1$，即$m=0,n=3$时取等号，

$\therefore\sqrt{m+2}+\sqrt{n-1}=\sqrt{(\sqrt{m+2}+\sqrt{n-1})^2}=\sqrt{4+2\sqrt{(m+2)(n-1)}}\leqslant\sqrt{4+4}=2\sqrt{2}$，

$\therefore\sqrt{m+2}+\sqrt{n-1}$的最大值为$2\sqrt{2}$.

**2. A**　$\because\boldsymbol{a}=(1,1),\boldsymbol{b}=(2x+y,2),\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，

$\therefore2x+y=2$.

又$xy>0$，$\therefore x>0,y>0$.

$\therefore\frac{x^2+y}{xy}=\frac{x}{y}+\frac{1}{x}=\frac{x}{y}+\frac{x+\frac{y}{2}}{x}=\frac{x}{y}+\frac{y}{2x}+1\geqslant2\sqrt{\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{2x}}+1=\sqrt{2}+1$，

当且仅当$y=\sqrt{2}x$，即$x=2-\sqrt{2},y=2\sqrt{2}-2$时等号成立.

即$\frac{x^2+y}{xy}$的最小值为$\sqrt{2}+1$.

**3. 18**　$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{8}{a^2+b^2}=\frac{a+b}{ab}+\frac{8}{a^2+b^2}$

$=\frac{(a+b)(a+b)}{ab}+\frac{8(a+b)^2}{a^2+b^2}$

$=10+\frac{a^2+b^2}{ab}+\frac{16ab}{a^2+b^2}\geqslant10+2\sqrt{\frac{a^2+b^2}{ab}\cdot\frac{16ab}{a^2+b^2}}=18$，

当且仅当$\frac{a^2+b^2}{ab}=\frac{16ab}{a^2+b^2}$，即$a=\frac{3-\sqrt{3}}{6},b=\frac{3+\sqrt{3}}{6}$或$a=\frac{3+\sqrt{3}}{6},b=\frac{3-\sqrt{3}}{6}$时，等号成立.

因此$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{8}{a^2+b^2}$的最小值为18.

**4.** $\frac{2}{3}$　$\because a>0,b>0$，且$a+b=1$，$\therefore(a+1)+(b+1)=3$，

则$\frac{a}{a+1}+\frac{b}{b+1}=\frac{a+1-1}{a+1}+\frac{b+1-1}{b+1}=2-\frac{1}{a+1}-\frac{1}{b+1}$，

$\because\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}=(\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1})[(a+1)+(b+1)]\times\frac{1}{3}=(\frac{b+1}{a+1}+\frac{a+1}{b+1}+2)\times\frac{1}{3}\geqslant(2+2)\times\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$，

当且仅当$\frac{b+1}{a+1}=\frac{a+1}{b+1}$，即$a=b=\frac{1}{2}$时，等号成立，

$\therefore\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}$的最小值为$\frac{4}{3}$，

则$\frac{a}{a+1}+\frac{b}{b+1}$的最大值为$2-\frac{4}{3}=\frac{2}{3}$.

**5. 18**　已知$x>0,y>0$，且$2x+8y-xy=0$，

$\therefore\frac{2}{y}+\frac{8}{x}=1$.

$\therefore x+y=(x+y)(\frac{2}{y}+\frac{8}{x})=\frac{2x}{y}+\frac{8y}{x}+10\geqslant 2\sqrt{\frac{2x}{y}\cdot\frac{8y}{x}}+10=18$，

当且仅当$\frac{2x}{y}=\frac{8y}{x}$，即 $x=12,y=6$ 时，等号成立.

故 $x+y$ 的最小值为 18.

**6. 9** 由题意可得$\frac{2}{b}+\frac{1}{a}=1$，$\therefore a+2b=(a+2b)(\frac{2}{b}+\frac{1}{a})=\frac{2a}{b}+\frac{2b}{a}+5\geqslant 2\sqrt{\frac{2a}{b}\cdot\frac{2b}{a}}+5=9$，

当且仅当$\frac{2a}{b}=\frac{2b}{a}$，即 $a=b=3$ 时，等号成立，

$\therefore a+2b$ 的最小值为 9.

**7. 4** $\because x,y\in\mathbf{R}^+$，$4x+5y=1$，

$\therefore \frac{1}{x+3y}+\frac{1}{3x+2y}=(\frac{1}{x+3y}+\frac{1}{3x+2y})[(x+3y)+(3x+2y)]=2+\frac{3x+2y}{x+3y}+\frac{x+3y}{3x+2y}\geqslant 2+2\sqrt{\frac{3x+2y}{x+3y}\cdot\frac{x+3y}{3x+2y}}=4$，

当且仅当$\frac{3x+2y}{x+3y}=\frac{x+3y}{3x+2y}$，即 $x=\frac{1}{14}$，$y=\frac{1}{7}$时，等号成立，

此时$\frac{1}{x+3y}+\frac{1}{3x+2y}$的最小值为 4.

**8. 3** $\because x,y$ 均为正实数，$x+y=1$，

$\therefore \frac{y}{x}+\frac{1}{y}=\frac{y}{x}+\frac{x+y}{y}=1+\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\geqslant 1+2\sqrt{\frac{y}{x}\cdot\frac{x}{y}}=3$，

当且仅当$\frac{y}{x}=\frac{x}{y}$，即 $x=y=\frac{1}{2}$时，等号成立，

$\therefore \frac{y}{x}+\frac{1}{y}$的最小值为 3.

**9. 2 $\frac{2\sqrt{6}+6}{3}$** 实数 $x,y$ 满足 $x>0,y>0$，且 $\log_2 3^x+\log_2 9^y=\log_4 81$，即 $x\log_2 3+2y\log_2 3=(x+2y)\log_2 3=2\log_2 3$，

可得 $x+2y=2$；

$\therefore \frac{2}{x}+\frac{x+3y}{3y}=\frac{x+2y}{x}+\frac{x+3y}{3y}=1+\frac{2y}{x}+\frac{x}{3y}+1\geqslant 2+2\sqrt{\frac{2y}{x}\cdot\frac{x}{3y}}=\frac{2\sqrt{6}+6}{3}$，当且仅当$\frac{2y}{x}=\frac{x}{3y}$，即 $x=6-2\sqrt{6}$，$y=\sqrt{6}-2$ 时，等号成立，

$\therefore \frac{2}{x}+\frac{x+3y}{3y}$的最小值为$\frac{2\sqrt{6}+6}{3}$.

**10. $\frac{5}{4}$** $\because 4x>y>0$，

$\therefore 4x-y>0,x>0,y>0$，

$\therefore \frac{y}{4x-y}+\frac{x}{y}=\frac{y}{4x-y}+\frac{1}{4}\cdot\frac{(4x-y)+y}{y}$

$=\frac{y}{4x-y}+\frac{4x-y}{4y}+\frac{1}{4}\geqslant 2\sqrt{\frac{y}{4x-y}\cdot\frac{4x-y}{4y}}+\frac{1}{4}$

$=1+\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$，

当且仅当$\frac{y}{4x-y}=\frac{4x-y}{4y}$，即 $4x=3y$ 时，等号成立.

$\therefore \frac{y}{4x-y}+\frac{x}{y}$的最小值为$\frac{5}{4}$.

**11. $2+\sqrt{3}$** $\because x+y=1$，$\therefore \frac{x^2+3}{x}+\frac{y^2}{y+1}=(x+\frac{3}{x})+(y-1+\frac{1}{y+1})=\frac{3}{x}+\frac{1}{y+1}$，

$\frac{3}{x}+\frac{1}{y+1}=(\frac{3}{x}+\frac{1}{y+1})\times\frac{x+(y+1)}{2}=\frac{1}{2}[4+\frac{3(y+1)}{x}+\frac{x}{y+1}]\geqslant\frac{1}{2}[4+2\sqrt{\frac{3(y+1)}{x}\times\frac{x}{y+1}}]=2+\sqrt{3}$，

当且仅当 $x=3-\sqrt{3}$，$y=-2+\sqrt{3}$时等号成立.

即$\frac{x^2+3}{x}+\frac{y^2}{y+1}$的最小值为 $2+\sqrt{3}$.

**12. $\frac{13}{2}+2\sqrt{3}$** $\because x>y>0$，$\therefore x-y>0,x+y>0$.

$\therefore 2x+y=\frac{1}{2}(x-y)+\frac{3}{2}(x+y)$

$=\frac{1}{2}[(x-y)+3(x+y)](\frac{1}{x-y}+\frac{4}{x+y})$

$=\frac{1}{2}[13+\frac{3(x+y)}{x-y}+\frac{4(x-y)}{x+y}]$

$\geqslant\frac{1}{2}[13+2\sqrt{\frac{3(x+y)}{x-y}\cdot\frac{4(x-y)}{x+y}}]=\frac{13}{2}+2\sqrt{3}$，

当且仅当$\frac{3(x+y)}{x-y}=\frac{4(x-y)}{x+y}$，即 $x=\frac{5}{2}+\frac{4\sqrt{3}}{3}$，$y=\frac{3}{2}-\frac{2\sqrt{3}}{3}$时等号成立，

即 $2x+y$ 的最小值为$\frac{13}{2}+2\sqrt{3}$.

**13. 3** $\because 2$ 是 $4^x$ 与 $4^y$ 的等比中项，

$\therefore 4^x\cdot 4^y=2^2$，即 $4^{x+y}=4$，$\therefore x+y=1$.

$\because x>0,y>0$，

$\therefore \frac{1}{x}+\frac{x}{y}=\frac{x+y}{x}+\frac{x}{y}=1+\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\geqslant 1+2\sqrt{\frac{y}{x}\cdot\frac{x}{y}}=3$，

当且仅当$\frac{y}{x}=\frac{x}{y}$，即 $x=y=\frac{1}{2}$时等号成立，

即$\frac{1}{x}+\frac{x}{y}$的最小值为 3.

**14. $\frac{25}{4}$** $(a+\frac{1}{a})(b+\frac{1}{b})=ab+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{1}{ab}=ab+\frac{a^2+b^2}{ab}+\frac{1}{ab}=ab+\frac{(a+b)^2-2ab}{ab}+\frac{1}{ab}=ab+\frac{1-2ab}{ab}+\frac{1}{ab}=ab+\frac{2}{ab}-2$，

$\because a>0,b>0,a+b=1$，$\therefore 0<ab\leqslant(\frac{a+b}{2})^2=\frac{1}{4}$，

$\because f(t)=t+\frac{2}{t}-2$ 在$(0,\frac{1}{4}]$上单调递减，

$\therefore (a+\frac{1}{a})(b+\frac{1}{b})=ab+\frac{2}{ab}-2\geqslant\frac{1}{4}+\frac{2}{\frac{1}{4}}-2=\frac{25}{4}$,

当且仅当 $ab=\frac{1}{4}$，即 $a=b=\frac{1}{2}$时，等号成立.

$\therefore (a+\frac{1}{a})(b+\frac{1}{b})$的最小值为$\frac{25}{4}$.

**15.** $2\sqrt{6}$　由 $a>0,b>0$，且$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$，

可得$\frac{1}{b}=1-\frac{1}{a}=\frac{a-1}{a}>0$，

则 $a-1>0,b=\frac{a}{a-1}$，则 $b-1=\frac{a}{a-1}-1=\frac{1}{a-1}$，

$\therefore \frac{3}{a-1}+\frac{2}{b-1}=\frac{3}{a-1}+2(a-1)\geqslant2\sqrt{\frac{3}{a-1}\cdot 2(a-1)}=2\sqrt{6}$，

当且仅当$\frac{3}{a-1}=2(a-1)$，即 $a=1+\frac{\sqrt{6}}{2}$时，等号成立，

故$\frac{3}{a-1}+\frac{2}{b-1}$的最小值为 $2\sqrt{6}$.

**16.** $\frac{3}{8}$　$\because 4x^2+y^2-4xy=(2x-y)^2\geqslant0$，即 $4xy\leqslant4x^2+y^2$，

$\therefore 3=4x^2+7y^2+4xy\leqslant4x^2+7y^2+4x^2+y^2=8(x^2+y^2)$，

$\therefore x^2+y^2\geqslant\frac{3}{8}$，当且仅当$\begin{cases}x=\frac{\sqrt{30}}{20}\\ y=\frac{\sqrt{30}}{10}\end{cases}$或$\begin{cases}x=-\frac{\sqrt{30}}{20}\\ y=-\frac{\sqrt{30}}{10}\end{cases}$时，等号成立，故 $x^2+y^2$ 的最小值为$\frac{3}{8}$.

**17.** $4+4\sqrt{2}$　$\because \lg(x+2y)=\lg x+\lg y=\lg(xy)$，

$\therefore x+2y=xy,x>0,y>0$，

$\therefore x=xy-2y,\frac{2}{x}+\frac{1}{y}=1$，

则$\frac{xy+x+2y^2}{y}=\frac{xy+xy-2y+2y^2}{y}=2x+2y-2=2(x+y)(\frac{2}{x}+\frac{1}{y})-2=2(\frac{x}{y}+\frac{2y}{x})+4\geqslant2\times2\sqrt{\frac{x}{y}\cdot\frac{2y}{x}}+4=4+4\sqrt{2}$，

当且仅当$\frac{x}{y}=\frac{2y}{x}$且$\frac{2}{x}+\frac{1}{y}=1$，即 $x=2+\sqrt{2},y=\sqrt{2}+1$ 时，等号成立，$\therefore \frac{xy+x+2y^2}{y}$的最小值为 $4+4\sqrt{2}$.

**18.** $\frac{5}{2}$　$\because a>0,b>0,\therefore 1=a+2b\geqslant2\sqrt{2ab}$，

$\therefore ab\leqslant\frac{1}{8}$.

令 $ab=t$，则 $t\in(0,\frac{1}{8}]$，

$\therefore a^2+4b^2=(a+2b)^2-4ab=1-4t$，

$\therefore a^2+4b^2+\frac{1}{4ab}=1-4t+\frac{1}{4t}$.

令 $f(t)=1-4t+\frac{1}{4t},0<t\leqslant\frac{1}{8}$.

$\because$函数 $f(t)$在$(0,\frac{1}{8}]$上是减函数，

$\therefore f(t)\geqslant f(\frac{1}{8})=\frac{5}{2}$.

则 $a^2+4b^2+\frac{1}{4ab}$的最小值是$\frac{5}{2}$.

**19.** 8　$\because$正实数 $x,y$ 满足 $x+y=\frac{1}{x}+\frac{9}{y}+6$，

$\therefore (x+y)^2=(\frac{1}{x}+\frac{9}{y}+6)(x+y)=(\frac{1}{x}+\frac{9}{y})(x+y)+6(x+y)=10+\frac{y}{x}+\frac{9x}{y}+6(x+y)$，

$\therefore (x+y)^2-6(x+y)=10+\frac{y}{x}+\frac{9x}{y}$

$\geqslant10+2\sqrt{\frac{y}{x}\cdot\frac{9x}{y}}=16$，

当且仅当$\frac{y}{x}=\frac{9x}{y}$，即 $x=2,y=6$ 时，等号成立，

设 $x+y=t$，则 $t^2-6t\geqslant16$，

解得 $t\geqslant8$ 或 $t\leqslant-2$，

$\therefore x+y\geqslant8$ 或 $x+y\leqslant-2$（舍），

故 $x+y$ 的最小值为 8.

**20.** 4　$\because a>0,b>0,ab=2$，

$\therefore \frac{a+4b+2b^3}{b^2+1}=2b+\frac{a+2b}{b^2+1}=2b+\frac{a+2b}{b^2+\frac{ab}{2}}=2b+\frac{2}{b}\geqslant2\sqrt{2b\cdot\frac{2}{b}}=4$，

当且仅当 $2b=\frac{2}{b}$，即 $a=2,b=1$ 时，等号成立，

因此$\frac{a+4b+2b^3}{b^2+1}$的最小值为 4.

**21.** 4　根据题意，$\frac{2}{a}+\frac{2}{b+2c}+\frac{8}{a+b+2c}=\frac{2(b+2c)+2a}{a(b+2c)}+\frac{8}{a+b+2c}=\frac{a+b+2c}{2}+\frac{8}{a+b+2c}\geqslant2\sqrt{4}=4$，

当且仅当 $a+b+2c=4$ 时，等号成立，

则$\frac{2}{a}+\frac{2}{b+2c}+\frac{8}{a+b+2c}$的最小值是 4.

**22.** $2\sqrt{2}+4$　$\because x+3y+2z=1$，

$\therefore (x+2y)+(y+2z)=1$，

$\frac{x+2y}{2y+4z}+\frac{4}{x+2y}=\frac{x+2y}{2(y+2z)}+\frac{4(x+2y)+4(y+2z)}{x+2y}$

$=\frac{x+2y}{2(y+2z)}+4+\frac{4(y+2z)}{x+2y}\geqslant2\sqrt{\frac{4}{2}}+4=2\sqrt{2}+4$，

当且仅当 $x+2y=2\sqrt{2}(y+2z)$时，等号成立，

$\therefore \frac{x+2y}{2y+4z}+\frac{4}{x+2y}$的最小值为 $2\sqrt{2}+4$.

23. C　$\because \frac{2y}{x}+\frac{8x}{y}\geqslant 2\sqrt{16}=8$，当且仅当$\frac{2y}{x}=\frac{8x}{y}$，即 $y=2x$ 时，等号成立，

$\therefore m^2+2m<8$，解得 $-4<m<2$.

故实数 $m$ 的取值范围是$(-4,2)$.

24. C　由题意知，$\frac{4}{x+1}+\frac{16}{y}=\frac{1}{4}(x+1+y)(\frac{4}{x+1}+\frac{16}{y})$

$=\frac{1}{4}[4+\frac{4y}{x+1}+\frac{16(x+1)}{y}+16]$

$\geqslant\frac{1}{4}[20+2\sqrt{\frac{4y}{x+1}\cdot\frac{16(x+1)}{y}}]=9$，

当且仅当$\frac{4y}{x+1}=\frac{16(x+1)}{y}$，即 $x=\frac{1}{3}$，$y=\frac{8}{3}$时，等号成立，

又不等式$\frac{4}{x+1}+\frac{16}{y}>m^2-3m+5$ 恒成立，

则 $m^2-3m+5<9$，

即$(m-4)(m+1)<0$，解得$-1<m<4$.

故实数 $m$ 的取值范围为$\{m|-1<m<4\}$.

25. 4　由 $a>b>c$，得 $a-b>0$，$b-c>0$，$a-c>0$，

要使$\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}\geqslant\frac{n}{a-c}$恒成立，只需$\frac{a-c}{a-b}+\frac{a-c}{b-c}\geqslant n$ 恒成立，

$\because\frac{a-c}{a-b}+\frac{a-c}{b-c}=\frac{a-b+b-c}{a-b}+\frac{a-b+b-c}{b-c}$

$=2+\frac{b-c}{a-b}+\frac{a-b}{b-c}\geqslant 2+2\sqrt{\frac{b-c}{a-b}\cdot\frac{a-b}{b-c}}=4$，

当且仅当 $a-b=b-c$ 时，等号成立.

$\therefore n\leqslant 4$，即 $n$ 的最大值为 4.

26. $\frac{\sqrt{2}}{9}$　$\because x>0$，$y>0$，$2=2x+y\geqslant 2\sqrt{2xy}$，

当且仅当 $2x=y$，即 $x=\frac{1}{2}$，$y=1$ 时，等号成立，

$\therefore\sqrt{xy}\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$\frac{\sqrt{xy}}{(x+1)(y+2)}=\frac{\sqrt{xy}}{xy+2x+y+2}=\frac{\sqrt{xy}}{xy+4}=\frac{1}{\sqrt{xy}+\frac{4}{\sqrt{xy}}}$，

令 $t=\sqrt{xy}$，$f(t)=t+\frac{4}{t}$，$t\in(0,\frac{\sqrt{2}}{2}]$，

由对勾函数的性质可得 $f(t)$在$(0,\frac{\sqrt{2}}{2}]$上单调递减，

$\therefore f(t)\geqslant f(\frac{\sqrt{2}}{2})=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{4}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{9\sqrt{2}}{2}$，

即 $\sqrt{xy}+\frac{4}{\sqrt{xy}}\geqslant\frac{9\sqrt{2}}{2}$，当 $\sqrt{xy}=\frac{\sqrt{2}}{2}$时，等号成立，

$\therefore\frac{1}{\sqrt{xy}+\frac{4}{\sqrt{xy}}}\leqslant\frac{\sqrt{2}}{9}$，即$\frac{\sqrt{xy}}{(x+1)(y+2)}$的最大值为$\frac{\sqrt{2}}{9}$.

27. 9　$\because x>-1$，$\therefore x+1>0$.

$y=\frac{(x+5)(x+2)}{x+1}=\frac{x^2+7x+10}{x+1}=\frac{(x+1)^2+5(x+1)+4}{x+1}$

$=x+1+5+\frac{4}{x+1}\geqslant 5+2\sqrt{(x+1)\cdot\frac{4}{x+1}}=9$，

当且仅当 $x+1=\frac{4}{x+1}$，即 $x=1$ 时，等号成立，$y$ 取得最小值 9.

28. $2\sqrt{2}$　$\because a>0$，$b>0$，$\therefore\frac{1}{a}+\frac{a}{b^2}+b\geqslant 2\sqrt{\frac{1}{a}\cdot\frac{a}{b^2}}+b=\frac{2}{b}+b\geqslant 2\sqrt{\frac{2}{b}\cdot b}=2\sqrt{2}$，当且仅当 $a=b=\sqrt{2}$时，等号成立.

故$\frac{1}{a}+\frac{a}{b^2}+b$ 的最小值为 $2\sqrt{2}$.

29. $\frac{1}{15}$　$4=\frac{x}{2}+y+xy\geqslant 2\sqrt{\frac{xy}{2}}+xy=\sqrt{2xy}+xy$，

当且仅当$\frac{x}{2}=y$，即 $x=2$，$y=1$ 时，等号成立，

设 $\sqrt{xy}=m$，$m>0$，则 $m^2+\sqrt{2}m-4\leqslant 0$，

解得 $0<m\leqslant\sqrt{2}$，故 $0<xy\leqslant 2$，

$\frac{xy+1}{x^2y^2+2xy+37}=\frac{xy+1}{(xy+1)^2+36}=\frac{1}{xy+1+\frac{36}{xy+1}}$，

设 $xy+1=t$，$t\in(1,3]$，

函数 $y=t+\frac{36}{t}$在$(1,3]$上单调递减，

故当 $t=3$ 时，$y$ 有最小值，为 15，

故$\frac{xy+1}{x^2y^2+2xy+37}$的最大值是$\frac{1}{15}$.

30. $\frac{8}{5}$　$\because a+2b=1$，$\therefore(a+2)+(2b+2)=5$.

$\therefore\frac{2}{a+2}+\frac{1}{b+1}=\frac{2}{a+2}+\frac{2}{2b+2}$

$=\frac{1}{5}(\frac{2}{a+2}+\frac{2}{2b+2})[(a+2)+(2b+2)]$

$=\frac{1}{5}[4+\frac{2(a+2)}{2b+2}+\frac{2(2b+2)}{a+2}]$

$\geqslant\frac{1}{5}[4+2\sqrt{\frac{2(a+2)}{2b+2}\cdot\frac{2(2b+2)}{a+2}}]=\frac{8}{5}$，

当且仅当$\frac{2(a+2)}{2b+2}=\frac{2(2b+2)}{a+2}$，即 $a=\frac{1}{2}$，$b=\frac{1}{4}$时等号成立.

故$\frac{2}{a+2}+\frac{1}{b+1}$的最小值为$\frac{8}{5}$.

31. $2\sqrt{2}$　由$\frac{2x^2}{y}+x+\frac{2y}{x}=\frac{x}{y}(2x+y)+\frac{2y}{x}=\frac{x}{y}+\frac{2y}{x}\geqslant 2\sqrt{\frac{x}{y}\cdot\frac{2y}{x}}=2\sqrt{2}$，

当且仅当$\frac{x}{y}=\frac{2y}{x}$，即 $x=\frac{4-\sqrt{2}}{7}$，$y=\frac{2\sqrt{2}-1}{7}$时等号成立，

$\therefore \frac{2x^2}{y}+x+\frac{2y}{x}$的最小值为 $2\sqrt{2}$.

32. $\frac{\sqrt{2}}{4}$ $\because a>0,b>0$,

$\therefore \frac{\sqrt{a(a+b)}}{3a+b}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2a(a+b)}}{2a+a+b}\leqslant\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\frac{2a+(a+b)}{2}}{2a+a+b}=$ $\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$,

当且仅当 $2a=a+b$,即 $a=b$ 时,等号成立.

$\therefore \frac{\sqrt{a(a+b)}}{3a+b}$的最大值为$\frac{\sqrt{2}}{4}$.

33. $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ 令 $y=mx(m>0)$,

则 $a\geqslant\frac{x^2+2xy}{x^2+y^2}=\frac{1+2m}{1+m^2}$,

令 $t=1+2m>1,m=\frac{t-1}{2}$,

则$\frac{1+2m}{1+m^2}=\frac{4t}{t^2-2t+5}=\frac{4}{t+\frac{5}{t}-2}\leqslant\frac{4}{2\sqrt{5}-2}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$,

当且仅当 $t=\frac{5}{t}$,即 $t=\sqrt{5}$ 时等号成立,

故$\frac{x^2+2xy}{x^2+y^2}$的最大值为$\frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

$\therefore$实数 $a$ 的最小值为$\frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

34. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ $x^2+y^2+xy=1\Rightarrow(x+y)^2-1=xy\leqslant(\frac{x+y}{2})^2$,

解得$-\frac{2\sqrt{3}}{3}\leqslant x+y\leqslant\frac{2\sqrt{3}}{3}$,当 $x=y=\frac{\sqrt{3}}{3}$时,$x+y$ 取得最大值.

即 $x+y$ 的最大值为$\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

35. $\frac{5}{2}$ 由题意,$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{a+b}=\frac{a+b}{ab}+\frac{1}{a+b}=a+b+\frac{1}{a+b}$,

$\because a+b\geqslant2\sqrt{ab}=2$,令 $t=a+b(t\geqslant2)$,$y=t+\frac{1}{t}$,

由对勾函数性质可知,当 $t=2$ 时,$y$ 有最小值$\frac{5}{2}$,当且仅当 $a=b=1$ 时,等号成立,

故$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{a+b}$的最小值为$\frac{5}{2}$.

36. $\frac{\sqrt{2}}{8}$ $a$ 是 $1+2b$ 与 $1-2b$ 的等比中项,

则 $a^2=1-4b^2\Rightarrow a^2+4b^2=1\geqslant4|ab|$.

$\therefore |ab|\leqslant\frac{1}{4}$.

$\therefore \frac{ab}{|a|+2|b|}\leqslant\frac{|ab|}{2\sqrt{2|ab|}}=\frac{\sqrt{|ab|}}{2\sqrt{2}}\leqslant\frac{\sqrt{\frac{1}{4}}}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{8}$.

当且仅当 $a=\frac{\sqrt{2}}{2},b=\frac{\sqrt{2}}{4}$或 $a=-\frac{\sqrt{2}}{2},b=-\frac{\sqrt{2}}{4}$时,等号成立,

$\therefore \frac{ab}{|a|+2|b|}$的最大值为$\frac{\sqrt{2}}{8}$.

37. 3 $\because a^x=b^y=3$,$\therefore x=\log_a3,y=\log_b3$.

$\therefore \frac{1}{x}=\log_3a,\frac{1}{y}=\log_3b$.

$\because a>1,b>1$,根据基本不等式有 $3ab\leqslant(\frac{3a+b}{2})^2=81$,

当且仅当 $3a=b$,即 $a=3,b=9$ 时,等号成立,

$\therefore ab\leqslant27$.

则$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\log_3a+\log_3b=\log_3ab\leqslant\log_327=3$,

$\therefore \frac{1}{x}+\frac{1}{y}$的最大值为 3.

38. 4 $\because 2xy=x\cdot(2y)\leqslant(\frac{x+2y}{2})^2$,

$\therefore 8=x+2y+2xy\leqslant x+2y+(\frac{x+2y}{2})^2$,

即$(x+2y)^2+4(x+2y)-32\geqslant0$,

即$(x+2y-4)(x+2y+8)\geqslant0$,

$\because x>0,y>0$,$\therefore x+2y\geqslant4$,当且仅当 $x=2,y=1$ 时,等号成立,

即 $x+2y$ 的最小值是 4.

## 专题十二 数列

1. D 令数列公差为 $d$,则有$\begin{cases}3a_1+3d=6\\6a_1+15d=3\end{cases}$,解得$\begin{cases}a_1=3\\d=-1\end{cases}$,

故 $a_n=3-(n-1)=4-n$,

$\therefore S_n=\frac{n(7-n)}{2}=-\frac{1}{2}(n-\frac{7}{2})^2+\frac{49}{8}$,当 $n=3$ 或 4 时,$S_n$ 有最大值.

$\because$当 $1\leqslant n<4$ 时 $a_n>0$,当 $n=4$ 时 $a_n=0$,当 $n>4$ 时 $a_n<0$,

$\therefore$当 $1\leqslant n<4$ 时,$T_n>0$,$n\geqslant4$ 时,$T_n=0$,$\therefore T_n$ 有最小值.

2. B $\because a_1+a_2+a_3+a_4=22$,

$S_n-S_{n-4}=a_n+a_{n-1}+a_{n-2}+a_{n-3}=154$,

$\therefore 4(a_1+a_n)=176,a_1+a_n=44$,

$\therefore$由 $S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}$,得$\frac{n\times44}{2}=330$,$\therefore n=15$.

3. D 根据题意,被 5 除余 3 被 7 除余 2 的数构成首项为 23,公差为 35 的等差数列,记为$\{a_n\}$,

则 $a_n=23+35(n-1)=35n-12$,

令 $35n-12\leqslant2025$,得 $n\leqslant58.2$,

$\therefore\{a_n\}$中含有 58 项,设前 $n$ 项和为 $S_n$,

则 $S_{58}=\frac{58\times(23+35\times58-12)}{2}=59189$.