

# 中考

参考  答案

# 汇编

# 数学

## 2025版



每/当/战/斗/开/始

我/们/如/期/而/至

微信公众号：玩转数学黄老师

| 序号 | 单选        |            |          | 页码   |
|----|-----------|------------|----------|------|
| ①  | 1—5.BDDCA | 6—10.BAADC | 11—12.BC | P217 |
| ②  | 1—5.BAACD | 6—10.BAABC | 11—12.CB | P219 |
| ③  | 1—5.BCCAD | 6—10.ADDCB | 11—12.CB | P222 |
| ④  | 1—5.ACADC | 6—10.BBACA | 11—12.DB | P225 |
| ⑤  | 1—5.CDCBA | 6—10.CCDBA | 11—12.BD | P228 |
| ⑥  | 1—5.DBBAB | 6—10.DCDCA | 11—12.DC | P230 |
| ⑦  | 1—5.CDDAB | 6—10.CABCA | 11—12.BD | P233 |
| ⑧  | 1—5.DABCC | 6—10.BABDD | 11—12.AC | P236 |
| ⑨  | 1—5.CABDA | 6—10.DACDB | 11—12.CB | P238 |
| ⑩  | 1—5.BABCB | 6—10.CDDBA | 11—12.DC | P241 |
| ⑪  | 1—5.ADCBA | 6—10.ADDCB | 11—12.CD | P244 |
| ⑫  | 1—5.ADACC | 6—10.BDBAD | 11—12.CC | P248 |
| ⑬  | 1—5.CCABD | 6—10.AABCD | 11—12.AC | P251 |
| ⑭  | 1—5.DACBB | 6—10.CDADC | 11—12.AB | P254 |
| ⑮  | 1—5.ACBAC | 6—10.BDCAB | 11—12.BD | P257 |
| ⑯  | 1—5.DCDAB | 6—10.CDAAB | 11—12.BC | P260 |
| ⑰  | 1—5.ABCDC | 6—10.BCDAB | 11—12.DA | P262 |
| ⑱  | 1—5.DABBC | 6—10.CBAAC | 11—12.DB | P265 |
| ⑲  | 1—5.BCCDB | 6—10.ADABC | 11—12.DD | P269 |
| ⑳  | 1—5.BACDD | 6—10.BADCD | 11—12.CC | P271 |
| ㉑  | 1—5.DAACB | 6—10.DDABA | 11—12.CB | P275 |

| 序号 | 单选        |            |          | 页码   |
|----|-----------|------------|----------|------|
| 22 | 1—5.BDCDB | 6—10.CBCAD | 11—12.AB | P278 |
| 23 | 1—5.CBBDA | 6—10.CCABC | 11—12.AD | P281 |
| 24 | 1—5.AABCA | 6—10.CBABD | 11—12.CD | P284 |
| 25 | 1—5.ABDAB | 6—10.CDADC | 11—12.BC | P287 |
| 26 | 1—5.DBABC | 6—10.BCDAA | 11—12.DC | P290 |
| 27 | 1—5.BADCD | 6—10.CCADB | 11—12.BB | P293 |
| 28 | 1—5.DABCB | 6—10.CCACD | 11—12.DC | P297 |
| 29 | 1—5.DABCB | 6—10.CABDC | 11—12.AB | P300 |
| 30 | 1—5.DAABB | 6—10.BBABC | 11—12.DB | P302 |
| 31 | 1—5.BAABB | 6—10.BAABD | 11—12.DC | P306 |
| 32 | 1—5.BCBCC | 6—10.CBCCA | 11—12.CC | P309 |
| 33 | 1—5.ADCBB | 6—10.DCABA | 11—12.CB | P311 |
| 34 | 1—5.CDABA | 6—10.DBCCB | 11—12.DA | P314 |
| 35 | 1—5.DDBCA | 6—10.DBACA | 11—12.BC | P317 |
| 36 | 1—5.ACBAB | 6—10.DACDB | 11—12.DC | P320 |
| 37 | 1—5.ABBCD | 6—10.BADAC | 11—12.DC | P323 |
| 38 | 1—5.CABAD | 6—10.CBCAB | 11—12.DD | P325 |
| 39 | 1—5.ABBDA | 6—10.CABDD | 11—12.CC | P328 |
| 40 | 1—5.DBCAB | 6—10.BCDAD | 11—12.AC | P331 |
| 41 | 1—5.DBCCC | 6—10.AABAB | 11—12.DC | P334 |

# 目录

## CONTENTS

| 内容                           | 页码  | 内容                            | 页码  |
|------------------------------|-----|-------------------------------|-----|
| <b>2024期末质量调查</b>            |     | ②2024河东区初中学业水平考试模拟(二) .....   | 278 |
| ①2024河西区第一学期九年级期末质量调查 .....  | 217 | ②32024红桥区初中学业水平考试模拟(二) .....  | 281 |
| ②2024南开区第一学期九年级期末质量调查 .....  | 219 | ②42024西青区初中学业水平考试模拟(二) .....  | 284 |
| ③2024河北区第一学期九年级期末质量调查 .....  | 222 | ②52024部分区初中学业水平考试模拟(二) .....  | 287 |
| ④2024河东区第一学期九年级期末质量调查 .....  | 225 | ②62024滨海新区初中学业水平考试模拟(二) ..... | 290 |
| ⑤2024红桥区第一学期九年级期末质量调查 .....  | 228 | <b>巧练三模 稳冲刺</b>               |     |
| <b>2024下学期结课调查</b>           |     | ②72024和平区初中学业水平考试模拟(三) .....  | 293 |
| ⑥2024河西区第二学期九年级结课质量调查 .....  | 230 | ②82024南开区初中学业水平考试模拟(三) .....  | 297 |
| ⑦2024红桥区第二学期九年级结课质量调查 .....  | 233 | ②92024红桥区初中学业水平考试模拟(三) .....  | 300 |
| ⑧2024滨海新区第二学期九年级结课质量调查 ..... | 236 | <b>名校优卷 直通名校</b>              |     |
| <b>精选一模 夯基础</b>              |     | ③02024实验中学第二学期九年级结课质量调查 ..... | 302 |
| ⑨2024和平区初中学业水平考试模拟(一) .....  | 238 | ③12024天津一中第二学期九年级模拟考试 .....   | 306 |
| ⑩2024河西区初中学业水平考试模拟(一) .....  | 241 | ③22024南开翔宇第二学期九年级模拟考试 .....   | 309 |
| ⑪2024南开区初中学业水平考试模拟(一) .....  | 244 | <b>2023优秀模拟</b>               |     |
| ⑫2024河北区初中学业水平考试模拟(一) .....  | 248 | ③32023和平区初中学业水平考试模拟(二) .....  | 311 |
| ⑬2024河东区初中学业水平考试模拟(一) .....  | 251 | ③42023河西区初中学业水平考试模拟(二) .....  | 314 |
| ⑭2024红桥区初中学业水平考试模拟(一) .....  | 254 | ③52023南开区初中学业水平考试模拟(二) .....  | 317 |
| ⑮2024西青区初中学业水平考试模拟(一) .....  | 257 | <b>六年真题 抢先练</b>               |     |
| ⑯2024部分区初中学业水平考试模拟(一) .....  | 260 | ③62019年天津市初中毕业生学业考试 .....     | 320 |
| ⑰2024滨海新区初中学业水平考试模拟(一) ..... | 262 | ③72020年天津市初中毕业生学业考试 .....     | 323 |
| <b>精选二模 提能力</b>              |     | ③82021年天津市初中毕业生学业考试 .....     | 325 |
| ⑱2024和平区初中学业水平考试模拟(二) .....  | 265 | ③92022年天津市初中学业水平考试 .....      | 328 |
| ⑲2024河西区初中学业水平考试模拟(二) .....  | 269 | ④02023年天津市初中学业水平考试 .....      | 331 |
| ⑳2024南开区初中学业水平考试模拟(二) .....  | 271 | ④12024年天津市初中学业水平考试 .....      | 334 |
| ㉑2024河北区初中学业水平考试模拟(二) .....  | 275 |                               |     |

# 中考汇编数学

## 参考答案

### ①2024 河西区第一学期九年级期末质量调查

1. B 2. D 3. D 4. C 5. A 6. B 7. A 8. A 9. D 10. C

11. B  $\because CA=CB, B'D \perp AB$ ,

$$\therefore AD=DB=\frac{1}{2}AB,$$

由旋转的性质,得  $AB=AB'$ ,

$$\therefore AD=\frac{1}{2}AB',$$

在  $Rt\triangle AB'D$  中,  $\cos \angle B'AD = \frac{AD}{AB'} = \frac{1}{2}$ ,

$$\therefore \angle B'AD = 60^\circ,$$

$$\because \angle BAC = \alpha, \angle B'AD = 2\alpha,$$

$$\therefore \angle BAC = \frac{1}{2} \angle B'AD = \frac{1}{2} \times 60^\circ = 30^\circ,$$

$$\because CA=CB=4,$$

$$\therefore AD=CA \cdot \cos 30^\circ = 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore AB=2AD=4\sqrt{3},$$

$$\therefore \widehat{BB'} \text{ 的长是 } \frac{60 \times 4\sqrt{3} \times \pi}{180} = \frac{4\sqrt{3}}{3}\pi.$$

12. C 如图,设  $AD=BC=x(x>0)$ ,

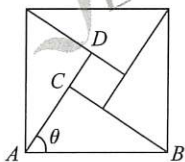
$\because$  大正方形面积为 100, 小正方形面积为 4,

$\therefore$  大正方形边长  $AB$  为 10, 小正方形边长  $CD$  为 2,

在  $Rt\triangle ABC$  中, 有  $AC^2 + BC^2 = AB^2$ ,

$$\therefore (x-2)^2 + x^2 = 10^2, \text{ 解得 } x=8 \text{ 或 } x=-6(\text{舍去}),$$

$$\therefore \tan \theta = \frac{BC}{AC} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}.$$

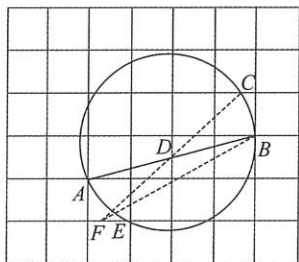


13.  $(-2, -6)$  14.  $\frac{7}{9}$  15.  $30^\circ$

16. 10(答案不唯一, 满足  $k>9$  即可) 17.  $2-\sqrt{3}$

18. (I)  $\sqrt{17}$ ;

(II) 如图, 取  $AB$  与网格线的交点  $D$ , 连接  $CD$  并延长, 与网格线交于点  $F$ , 连接  $BF$  交圆于点  $E$ , 则点  $E$  即为所求.



19. 解:  $x^2 - 6x + 9 = (5-2x)^2$ ,

$$(x-3)^2 = (5-2x)^2,$$

$$(x-3)^2 - (5-2x)^2 = 0,$$

$$[(x-3) + (5-2x)][(x-3) - (5-2x)] = 0,$$

$$(2-x)(3x-8) = 0,$$

$$2-x=0, \text{ 或 } 3x-8=0,$$

$$x_1=2, x_2=\frac{8}{3}.$$

20. 解: (I) 每人随机取手中的一张牌, 共有 9 种情况, 分别为

$(5,6), (5,8), (5,10), (7,6), (7,8), (7,10), (9,6), (9,8), (9,10)$ .

(II) 学生乙本局获胜的情况有  $(7,6), (9,6), (9,8)$ , 共 3 种,

则学生乙本局获胜的概率为  $P = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$ .

21. 解: (I) 如图所示,

$$\because \angle A = 30^\circ, AC=3,$$

$$\therefore \cos A = \cos 30^\circ = \frac{AC}{AB},$$

$$\therefore \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{AB}, \text{ 解得 } AB=2\sqrt{3}.$$

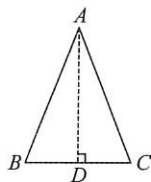
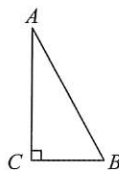
(II) 如图所示, 过点  $A$  作  $AD \perp BC$  于点  $D$ ,

$$\because AB=AC=9, AD \perp BC, BC=6,$$

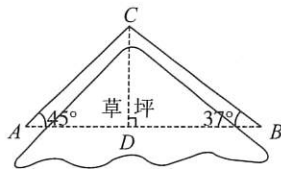
$$\therefore BD=CD=\frac{1}{2}BC=3,$$

$$\therefore AD = \sqrt{AC^2 - CD^2} = 6\sqrt{2},$$

$$\therefore \sin C = \frac{AD}{AC} = \frac{6\sqrt{2}}{9} = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$



22. 解: 过点  $C$  作  $CD \perp AB$ , 垂足为  $D$ , 如图,



在  $Rt\triangle ACD$  中,  $\tan A = \frac{CD}{AD}$ ,

$$\therefore AD = \frac{CD}{\tan A} = \frac{CD}{\tan 45^\circ} = CD,$$

在  $Rt\triangle BCD$  中,  $\tan B = \frac{CD}{BD}$ ,

$$\therefore BD = \frac{CD}{\tan B} = \frac{CD}{\tan 37^\circ},$$

$$\because AD+BD=AB=63,$$

$$\therefore CD + \frac{CD}{\tan 37^\circ} = 63,$$

$$\therefore CD = \frac{63 \times \tan 37^\circ}{\tan 37^\circ + 1} \approx \frac{63 \times 0.75}{0.75 + 1} = 27(\text{m}),$$

$$\therefore AC = \sqrt{2}CD \approx 1.414 \times 27 \approx 38.2(\text{m}),$$

$$CB = \frac{CD}{\sin 37^\circ} \approx \frac{27}{0.6} = 45.0(\text{m}).$$

答: AC 的长约为 38.2 m, CB 的长约为 45.0 m.

23. (I) 证明: 如图 1, 连接 OF,

$$\because AB = AC,$$

$$\therefore \angle B = \angle ACB,$$

$$\because OF = OC,$$

$$\therefore \angle OFC = \angle OCF,$$

$$\therefore \angle OFC = \angle B,$$

$$\therefore OF \parallel AB,$$

$$\because FG \perp AB,$$

$$\therefore OF \perp FG,$$

$$\because OF \text{ 为 } \odot O \text{ 的半径},$$

$$\therefore FG \text{ 是 } \odot O \text{ 的切线}.$$

(II) 解: 如图 2, 连接 OE, OF,

$$\because AB \text{ 是 } \odot O \text{ 的切线}, \therefore OE \perp AB,$$

$$\text{又 } OF \perp FG, FG \perp AB,$$

$$\therefore \angle OEG = \angle OFG = \angle FGE = 90^\circ,$$

$$\therefore \text{四边形 } GFOE \text{ 是矩形},$$

$$\because OE = OF,$$

$$\therefore \text{四边形 } GFOE \text{ 是正方形},$$

$$\therefore GE = GF = OF = 2\sqrt{2},$$

$$\text{由勾股定理得, } BG = \sqrt{BF^2 - GF^2} = 1,$$

$$\therefore BE = BG + GE = 1 + 2\sqrt{2}.$$

24. 解: (I)  $\because$  四边形 ABCD 是菱形,

$$\therefore BC = AB = 2,$$

$$\because \angle B = 60^\circ,$$

$$\therefore \triangle ABC \text{ 是等边三角形},$$

$$\therefore \angle BAC = 60^\circ,$$

当点 P 为 AB 的中点时, 点 Q 为 AC 的中点,

$$\text{此时 } x = BP = \frac{1}{2}AB = 1,$$

$$\therefore AP = AQ = 1, \text{ 得 } \triangle APQ \text{ 为等边三角形},$$

$$\therefore S_{\triangle APQ} = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 1^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

(II) (i) 当  $0 < x < 2$  时,

如图, 过点 Q 作  $QH \perp AB$  于点 H,

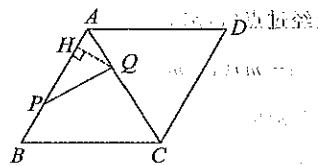


图 1

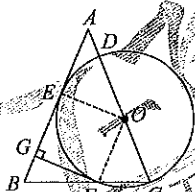


图 2

由题意得,  $BP = AQ = x$ ,

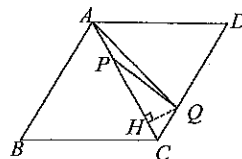
$$\therefore AP = AB - BP = 2 - x,$$

在  $\text{Rt}\triangle AQH$  中,  $QH = AQ \cdot \sin \angle HAQ = \frac{\sqrt{3}}{2}x$ ,

$$\therefore y = \frac{1}{2}AP \cdot QH = \frac{1}{2} \times (2 - x) \times \frac{\sqrt{3}}{2}x = -\frac{\sqrt{3}}{4}x^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}x.$$

(II) 当  $2 < x \leq 4$  时,

如图, 过点 Q 作  $QH \perp AC$  于点 H,



$$\because AB \parallel CD,$$

$$\therefore \angle ACD = \angle BAC = 60^\circ,$$

由题意得,  $AP = CQ = x - 2$ ,

在  $\text{Rt}\triangle QCH$  中,  $QH = CQ \cdot \sin \angle HCQ = \frac{\sqrt{3}}{2}(x - 2)$ ,

$$\therefore y = \frac{1}{2}AP \cdot QH = \frac{1}{2} \times (x - 2) \times \frac{\sqrt{3}}{2}(x - 2) = \frac{\sqrt{3}}{4}(x - 2)^2.$$

(III)  $\sqrt{3}$ .

由 (II) 得, 当  $0 < x < 2$  时,

$$y = -\frac{\sqrt{3}}{4}x^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}x = -\frac{\sqrt{3}}{4}(x - 1)^2 + \frac{\sqrt{3}}{4},$$

$$\text{当 } x = 1 \text{ 时, } y_{\max} = \frac{\sqrt{3}}{4};$$

$$\text{当 } 2 < x \leq 4 \text{ 时, } y = \frac{\sqrt{3}}{4}(x - 2)^2,$$

$$\text{当 } x = 4 \text{ 时, } y_{\max} = \frac{\sqrt{3}}{4}(4 - 2)^2 = \sqrt{3}.$$

综上所述,  $\triangle APQ$  面积的最大值为  $\sqrt{3}$ .

25. 解: (I)  $\because n = -1, m = 3$ ,

$$\therefore y = (x + 1)(x - 3) = x^2 - 2x - 3 = (x - 1)^2 - 4,$$

$$\therefore \text{抛物线的顶点坐标为 } (1, -4).$$

$$(II) \because y = (x - n)(x - m),$$

$$\therefore \text{抛物线与 } x \text{ 轴的交点坐标为 } (n, 0), (m, 0),$$

$$\therefore \text{抛物线的对称轴为直线 } x = 2,$$

$$\therefore \frac{m + n}{2} = 2,$$

$$\therefore n = 4 - m,$$

$$\therefore y = (x - 4 + m)(x - m),$$

∵ 抛物线经过点  $(1, p)$ ,

$$\therefore p = (1 - 4 + m)(1 - m) = -m^2 + 4m - 3,$$

∵  $n \neq m$ ,  $\therefore m \neq 2$ ,

$$\therefore -m^2 + 4m - 3 = -(m - 2)^2 + 1 < 1,$$

$$\therefore p < 1, \text{ 即 } p = -m^2 + 4m - 3, p < 1.$$

(Ⅲ) ∵  $n = 1$ ,

$$\therefore \text{抛物线为 } y = (x - 1)(x - m),$$

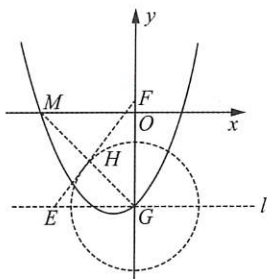
∵ 抛物线与  $y$  轴负半轴交于点  $G(0, m)$ ,

$$\therefore m < 0,$$

∵  $EF = 2\sqrt{2}$ , 点  $H$  是  $EF$  的中点,  $\angle EGF = 90^\circ$ ,

$$\therefore GH = \frac{1}{2}EF = \sqrt{2},$$

如图, 由题意得, 点  $H$  在以点  $G$  为圆心,  $\sqrt{2}$  为半径的圆上,



由  $M(m, 0), G(0, m)$ , 可得  $MO = -m, GO = -m$ ,

$$\therefore \text{在 Rt}\triangle MGO \text{ 中, } MG = \sqrt{MO^2 + GO^2} = -\sqrt{2}m,$$

① 当  $MG \geq \sqrt{2}$ , 即  $m \leq -1$  时, 满足条件的点  $H$  落在线段  $MG$  上,

$$MH \text{ 的最小值为 } MG - GH = -\sqrt{2}m - \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\text{解得 } m = -\frac{3}{2},$$

$$\therefore \text{抛物线为 } y = (x - 1)(x + \frac{3}{2}),$$

$$\text{抛物线的对称轴为直线 } x = \frac{1 - \frac{3}{2}}{2} = -\frac{1}{4},$$

当  $x > -\frac{1}{4}$  时,  $y$  随  $x$  的增大而增大,

$$\therefore -2m - 1 \leq x \leq -2m, \text{ 即 } 2 \leq x \leq 3,$$

∴ 图象最低点的横坐标为 2,

$$\text{当 } x = 2 \text{ 时, } y = (2 - 1) \times (2 + \frac{3}{2}) = \frac{7}{2},$$

∴ 图象的最低点的坐标为  $(2, \frac{7}{2})$ ;

② 当  $MG < \sqrt{2}$ , 即  $-1 < m < 0$  时, 满足条件的点  $H$  落在线段  $GM$  的延长线上,

$$MH \text{ 的最小值为 } GH - MG = \sqrt{2} - (-\sqrt{2}m) = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\text{解得 } m = -\frac{1}{2},$$

$$\therefore \text{抛物线为 } y = (x - 1)(x + \frac{1}{2}),$$

$$\text{抛物线的对称轴为直线 } x = \frac{1 - \frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4},$$

$$\therefore -2m - 1 \leq x \leq -2m, \text{ 即 } 0 \leq x \leq 1,$$

∴ 图象最低点的横坐标为  $\frac{1}{4}$ ,

$$\text{当 } x = \frac{1}{4} \text{ 时, } y = (\frac{1}{4} - 1) \times (\frac{1}{4} + \frac{1}{2}) = -\frac{9}{16},$$

∴ 图象的最低点的坐标为  $(\frac{1}{4}, -\frac{9}{16})$ .

综上, 图象的最低点的坐标为  $(2, \frac{7}{2})$  或  $(\frac{1}{4}, -\frac{9}{16})$ .

## ② 2024 南开区第一学期九年级期末质量调查

1. B 2. A 3. A 4. C 5. D 6. B 7. A 8. A 9. B 10. C

11. C

$$12. B \quad \because h = 30t - 5t^2 = -5(t - 3)^2 + 45,$$

∴ 当  $t = 3$  时, 小球运动到最大高度, 最大高度为 45 m, 故①③错误;

当小球的运动高度为 40 m 时, 有  $40 = 30t - 5t^2$ ,

解得  $t = 2$  或  $t = 4$ , 故②正确;

$$\because 0 \leq t \leq 6,$$

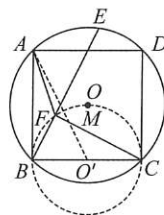
∴ 小球从抛出到落地需要 6 s, 故④正确.

13. 4 14. 4 15. 0 16.  $80^\circ$  或  $100^\circ$

$$17. 2\sqrt{5} - 2 \quad \because CF \perp BE,$$

$$\therefore \angle CFB = 90^\circ,$$

∴ 点  $F$  的运动轨迹是以  $BC$  为直径的  $\odot O'$ , 连接  $AO'$  交  $\odot O'$  于点  $M$ , 如图,



当  $A, F, O'$  三点共线时,  $AF$  有最小值, 最小值为  $AM$ ,

$$\text{在 Rt}\triangle ABO' \text{ 中, } AO' = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5},$$

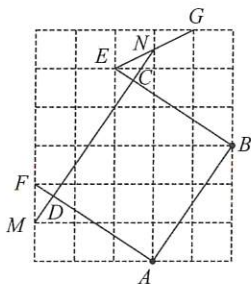
$$\therefore AM = 2\sqrt{5} - 2,$$

∴ 当点  $E$  从点  $A$  出发按顺时针方向运动到点  $D$  时,  $AF$  的最小值为  $2\sqrt{5} - 2$ .

18. (I)  $\sqrt{13}$ ;

(II) 如图, 取格点  $E, F$ , 连接  $AF, BE$ , 取格点  $G$ , 连接  $EG$  交网格线于点  $N$ , 取格点  $M$ , 连接  $MN$ , 分别交  $BE, AF$  于点  $C, D$ ,

则四边形  $ABCD$  即为所求矩形.



19. 解: (I)  $\frac{3}{4}$ .

(II) 列出表格如图所示:

|    | -2         | 0         | 1         | 2         |
|----|------------|-----------|-----------|-----------|
| -2 | $(-2, -2)$ | $(-2, 0)$ | $(-2, 1)$ | $(-2, 2)$ |
| 0  | $(0, -2)$  | $(0, 0)$  | $(0, 1)$  | $(0, 2)$  |
| 1  | $(1, -2)$  | $(1, 0)$  | $(1, 1)$  | $(1, 2)$  |
| 2  | $(2, -2)$  | $(2, 0)$  | $(2, 1)$  | $(2, 2)$  |

由表可知, 共有 16 种等可能的结果, 其中点  $A$  在双曲线  $y =$

$\frac{2}{x}$  上的结果有 2 种, 即  $(2, 1), (1, 2)$ ,

$\therefore$  点  $A$  在双曲线  $y = \frac{2}{x}$  上的概率为  $P = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$ .

20. 解: (I) 把  $A(-\frac{1}{2}, 2)$  代入  $y = \frac{m}{x} (m \neq 0)$ ,

得  $m = -\frac{1}{2} \times 2 = -1$ ,

$\therefore$  反比例函数的解析式为  $y = -\frac{1}{x}$ ;

把  $B(n, -1)$  代入  $y = -\frac{1}{x}$ , 得  $n = -\frac{1}{-1} = 1$ ,

$\therefore B(1, -1)$ ,

把  $A(-\frac{1}{2}, 2), B(1, -1)$  代入  $y = kx + b (k \neq 0)$ ,

$$\text{得} \begin{cases} -\frac{1}{2}k + b = 2 \\ k + b = -1 \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} k = -2 \\ b = 1 \end{cases},$$

$\therefore$  一次函数的解析式为  $y = -2x + 1$ .

(II) (i)  $x < -\frac{1}{2}$  或  $0 < x < 1$ ;

(ii)  $y_3 < y_1 < y_2$ .

21. (I) 证明:  $\because DE \parallel BC, EF \parallel AB$ ,

$\therefore \angle AED = \angle C, \angle A = \angle CEF$ ,

$\therefore \triangle ADE \sim \triangle EFC$ .

(II) 解:  $\because DE \parallel BC, EF \parallel AB$ ,

$\therefore$  四边形  $BFED$  为平行四边形,

$\therefore BD = EF = a, BF = DE = a$ ,

$\therefore AD = AB - BD = 3 - a, FC = BC - BF = 4 - a$ ,

$\because \triangle ADE \sim \triangle EFC$ ,

$$\therefore \frac{AD}{EF} = \frac{DE}{FC},$$

$$\therefore \frac{3-a}{a} = \frac{a}{4-a},$$

$$\therefore a = \frac{12}{7}.$$

22. 解: (I)  $\because AB = AC, \angle BAC = 45^\circ$ ,

$$\therefore \angle C = \angle ABC = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle BAC) = 67.5^\circ;$$

$\because OB = OD$ ,

$$\therefore \angle ODB = \angle ABC = 67.5^\circ,$$

$$\therefore \angle ODB = \angle C,$$

$$\therefore OD \parallel AC,$$

$\because DE$  是  $\odot O$  的切线,

$$\therefore \angle ODE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DEC = 90^\circ.$$

(II) 如图 2, 连接  $ON$ ,

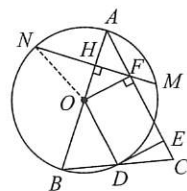


图 2

$\because \angle BAC = 45^\circ$ , 又  $OF \perp AC$ ,

$\therefore \triangle AOF$  是等腰直角三角形,

$\because MN \perp AB, MN = 2\sqrt{3}$ ,

$$\therefore AH = OH, NH = \frac{1}{2}MN = \sqrt{3},$$

设  $ON = r$ , 则  $AH = OH = \frac{1}{2}r$ ,

在  $\text{Rt}\triangle NOH$  中,  $r^2 - (\frac{1}{2}r)^2 = (\sqrt{3})^2$ , 解得  $r = 2$ ,

$$\therefore OA = 2, \text{ 则 } AB = AC = 4, AF = \frac{\sqrt{2}}{2}OA = \sqrt{2},$$

$\because \angle ODE = \angle DEF = \angle OFE = 90^\circ$ ,

$\therefore$  四边形  $ODEF$  是矩形,

$$\therefore EF = OD = 2,$$

$$\therefore EC = AC - AF - EF = 4 - \sqrt{2} - 2 = 2 - \sqrt{2}.$$

23. 解: (I) 根据题意, 得  $S = x(24 - 3x) = -3x^2 + 24x$ ,

$$\therefore 0 < 24 - 3x \leq 10, x \leq 24 - 3x,$$

$$\therefore \frac{14}{3} \leq x \leq 6,$$

$$\therefore S = -3x^2 + 24x (\frac{14}{3} \leq x \leq 6).$$

$$(II) S = -3x^2 + 24x = -3(x - 4)^2 + 48,$$

$$\therefore -3 < 0,$$

∴ 抛物线开口向下,

∴ 抛物线的对称轴是直线  $x=4$ ,

∴ 当  $x>4$  时,  $y$  随  $x$  的增大而减小,

$$\therefore \frac{14}{3} \leq x \leq 6,$$

∴ 当  $x=\frac{14}{3}$  时, 花圃  $ABCD$  能围成的最大面积为  $S=-3 \times (\frac{14}{3}-4)^2+48=\frac{140}{3}$ .

(Ⅲ) 能,  $AB=\frac{17}{3}$  m,  $BC=9$  m.

由题意得,  $x(24-3x+2)=51$ ,

$$\text{解得 } x_1=\frac{17}{3}, x_2=3.$$

∵  $0<24-3x+2 \leq 10, x \leq 24-3x+2$ ,

$$\therefore \frac{16}{3} \leq x \leq \frac{13}{2},$$

∴  $x=\frac{17}{3}$  符合题意,

$$\therefore BC=24-3 \times \frac{17}{3}+2=9(\text{m}).$$

∴ 当  $AB=\frac{17}{3}$  m,  $BC=9$  m 时, 能使围成的花圃面积为 51  $\text{m}^2$ .

24. 解: (Ⅰ) 由旋转的性质, 得  $\angle COE = \angle AOD = \alpha = 30^\circ$ ,

∵  $A(4,0)$ , ∴  $OA=4$ ,

∴ 四边形  $OABC$  是正方形,

∴  $OC=OA=4$ ,  $\angle C=90^\circ$ ,

在  $\text{Rt}\triangle OCE$  中,  $OC=4$ ,  $\angle COE=30^\circ$ ,

$$\therefore OE = \frac{OC}{\cos 30^\circ} = \frac{8\sqrt{3}}{3},$$

∴ 点  $E$  的坐标为  $(0, \frac{8\sqrt{3}}{3})$ .

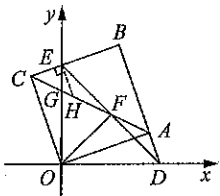
(Ⅱ) (Ⅰ) 由旋转的性质, 得  $\angle COE = \angle AOD = \alpha$ ,

$$\text{在 } \triangle OCE \text{ 和 } \triangle OAD \text{ 中, } \begin{cases} \angle ECO = \angle DAO \\ OC = OA \\ \angle COE = \angle AOD \end{cases},$$

∴  $\triangle OCE \cong \triangle OAD(\text{ASA})$ ,

∴  $OE=OD$ ,  $CE=AD=m$ ,

如图, 过点  $E$  作  $EH \perp BC$  交  $CA$  于点  $H$ ,



则  $\angle CEH=90^\circ$ ,

又  $\angle B=90^\circ$ , ∴  $EH \parallel BD$ ,

∴  $\angle FEH = \angle FDA$ ,  $\angle EHF = \angle DAF$ ,

∵ 四边形  $OABC$  是正方形,

∴  $\angle BCA=45^\circ$ ,

∴  $\triangle ECH$  是等腰直角三角形,

∴  $EH=CE=m$ ,

∴  $EH=AD$ ,

$$\text{在 } \triangle FEH \text{ 和 } \triangle FDA \text{ 中, } \begin{cases} \angle FEH = \angle FDA \\ EH = DA \\ \angle EHF = \angle DAF \end{cases},$$

∴  $\triangle FEH \cong \triangle FDA(\text{ASA})$ ,

∴  $EF=DF$ ,

又  $OE=OD$ , ∴  $OF$  为  $\angle DOE$  的平分线,

$$\therefore \angle EOF = \frac{1}{2} \angle DOE = 45^\circ.$$

(Ⅱ) ∵  $OE=OD$ ,

∴  $\triangle EOD$  是等腰直角三角形,

在  $\text{Rt}\triangle OAD$  中, 由勾股定理得,

$$OD^2 = OA^2 + AD^2 = 16 + m^2,$$

$$\therefore S_{\triangle EOD} = \frac{1}{2} OD \cdot OE = \frac{1}{2} OD^2 = \frac{16+m^2}{2},$$

∴  $EF=DF$ ,

$$\therefore S_1 = \frac{1}{2} S_{\triangle EOD} = \frac{1}{4} m^2 + 4 (0 < m < 4).$$

$$(Ⅲ) S = \frac{1}{2} n^2.$$

由 (Ⅱ) 得,  $AD=CE=EH=m$ ,  $AF=HF=n$ ,

在等腰直角  $\triangle ABC$  中, 由勾股定理得,  $AB^2 + BC^2 = AC^2$ ,

$$\text{即 } \sqrt{4^2+4^2} = CH + HF + AF,$$

$$\therefore 4\sqrt{2} = \sqrt{2}m + 2n,$$

$$\therefore m = 4 - \sqrt{2}n,$$

$$\therefore S_2 = \frac{1}{2} CE \cdot OC = 2m, S_1 = \frac{1}{4} m^2 + 4,$$

$$\therefore S = S_1 - S_2 = \frac{1}{4} m^2 - 2m + 4 = \frac{1}{4} (m-4)^2,$$

$$\text{把 } m = 4 - \sqrt{2}n \text{ 代入, 得 } S = \frac{1}{4} (4 - \sqrt{2}n - 4)^2 = \frac{1}{2} n^2.$$

25. 解: (Ⅰ) 将  $A(0,9)$ ,  $B(-6,0)$  代入  $y=ax^2+\frac{3}{4}x+c$ ,

$$\text{得 } \begin{cases} c=9 \\ 36a-\frac{9}{2}+c=0 \end{cases}, \text{解得 } \begin{cases} a=-\frac{1}{8} \\ c=9 \end{cases},$$

$$\therefore \text{抛物线的解析式为 } y = -\frac{1}{8}x^2 + \frac{3}{4}x + 9,$$

$$\therefore y = -\frac{1}{8}x^2 + \frac{3}{4}x + 9 = -\frac{1}{8}(x-3)^2 + \frac{81}{8},$$

∴ 顶点  $P$  的坐标为  $(3, \frac{81}{8})$ .

(II)(i)  $\because$  点  $D, E$  均在此抛物线上, 其横坐标分别为  $m, 2m$  ( $m > 0$ ),

$$\therefore D(m, -\frac{1}{8}m^2 + \frac{3}{4}m + 9), E(2m, -\frac{1}{2}m^2 + \frac{3}{2}m + 9),$$

$$\therefore -\frac{1}{2}m^2 + \frac{3}{2}m + 9 - (-\frac{1}{8}m^2 + \frac{3}{4}m + 9) = 3, \textcircled{1}$$

$$\text{或 } -\frac{1}{2}m^2 + \frac{3}{2}m + 9 - (-\frac{1}{8}m^2 + \frac{3}{4}m + 9) = -3, \textcircled{2}$$

方程①无解,

解方程②得  $m=4$  或  $m=-2$  (舍去),

$$\therefore m=4.$$

$$(ii) \frac{39}{8} \quad (\frac{63}{8}, \frac{81}{8}) \quad \frac{20}{3}.$$

$$\text{当 } y=0 \text{ 时, } -\frac{1}{8}x^2 + \frac{3}{4}x + 9 = 0,$$

解得  $x=-6$  或  $x=12$ ,

$$\therefore C(12, 0),$$

$\therefore$  将点  $C$  向上平移  $\frac{8m+3}{6} = \frac{35}{6}$  个单位得到点  $C'$ ,

$$\therefore C'(12, \frac{35}{6}),$$

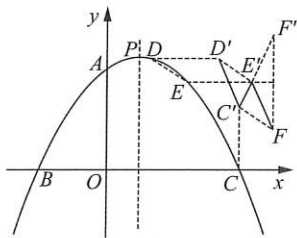
由 (i) 得,  $D(4, 10), E(8, 7)$ ,

$$\therefore D'(4+n, 10), E'(8+n, 7), P'(3+n, \frac{81}{8}),$$

如图, 将点  $C'(12, \frac{35}{6})$  向右平移 4 个单位长度, 向下平移 3 个

单位长度, 得点  $F(16, \frac{17}{6})$ ,

作点  $F$  关于直线  $y=7$  的对称点  $F'$ , 得  $F'(16, \frac{67}{6})$ ,



当满足条件的点  $E'$  落在线段  $C'F'$  上时,  $C'D' + C'E'$  的值最小,

此时,  $C'D' + C'E' = C'F'$ ,

设直线  $C'F'$  的解析式为  $y=kx+b$ ,

$$\text{有 } \begin{cases} 12k+b=\frac{35}{6} \\ 16k+b=\frac{67}{6} \end{cases}, \text{解得 } \begin{cases} k=\frac{4}{3} \\ b=-\frac{61}{6} \end{cases},$$

$$\therefore \text{直线 } C'F' \text{ 的解析式为 } y=\frac{4}{3}x-\frac{61}{6},$$

$$\text{将 } E'(8+n, 7) \text{ 代入, 得 } \frac{4}{3}(8+n)-\frac{61}{6}=7, \text{解得 } n=\frac{39}{8},$$

$$\therefore \text{顶点 } P' \text{ 的坐标为 } (\frac{63}{8}, \frac{81}{8}),$$

$$\therefore C'F' = \sqrt{(16-12)^2 + (\frac{67}{6}-\frac{35}{6})^2} = \frac{20}{3},$$

$$\therefore C'D' + C'E' \text{ 的最小值为 } \frac{20}{3}.$$

### ③2024 河北区第一学期九年级期末质量调查

1. B 2. C 3. C 4. A 5. D 6. A 7. D 8. D 9. C 10. B

11. C

12. B  $\because$  抛物线  $y=ax^2+bx+c$  ( $a, b, c$  是常数且  $a < 0$ ) 过  $(-1, 0)$  和  $(m, 0)$  两点,

$\therefore$  方程  $ax^2+bx+c=0$  有两个实数根为  $-1, m$ ,

$\therefore$  方程  $ax^2+bx+c=0$  有两个实数根为  $-1, m$ ,

$$\therefore -\frac{b}{a} = m-1, \frac{c}{a} = -m,$$

$$\therefore 3 < m < 4,$$

$$\therefore 2 < -\frac{b}{a} < 3, -4 < \frac{c}{a} < -3,$$

$$\therefore a < 0,$$

$$\therefore c > -3a,$$

$$\therefore 3a+c > 0, \text{故 } \textcircled{1} \text{ 正确};$$

$\because$  抛物线过  $(-1, 0)$  和  $(1, 4)$  两点,

$$\therefore \begin{cases} a-b+c=0 \\ a+b+c=4 \end{cases},$$

$$\therefore b=2,$$

$$\therefore 2 < -\frac{2}{a} < 3,$$

$$\therefore -1 < a < -\frac{2}{3}, \text{故 } \textcircled{2} \text{ 正确};$$

$\because$  方程  $a(x+1)(x-m)=3$  有实数根,

$\therefore$  抛物线  $y=ax^2+bx+c$  与直线  $y=3$  有交点,

$$\therefore \frac{4ac-b^2}{4a} \geq 3,$$

$$\therefore 4ac-b^2 \leq 12a, \text{故 } \textcircled{3} \text{ 错误}.$$

$$13. -6 \quad 14. \frac{1}{5} \quad 15. 2 \quad 16. y = -\frac{10}{x} \quad 17. 13$$

$$18. \frac{2\sqrt{21}}{7} \quad \because \text{在 } \triangle ABC \text{ 中, } 2^2 + (\sqrt{3})^2 =$$

$$(\sqrt{7})^2, \text{即 } AC^2 + BC^2 = AB^2,$$

$$\therefore \angle ACB = 90^\circ,$$

$\therefore PQ$  为直径,

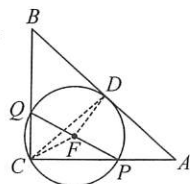
如图, 设圆心为点  $F$ , 圆  $F$  与  $AB$  的切点为  $D$ , 连接  $FD$ ,  $CF$ ,  $CD$ ,

$$\therefore PQ = PF + FQ = CF + FD \geq CD,$$

$\therefore$  当  $C, F, D$  三点共线时,  $PQ$  取最小值, 此时  $CD \perp AB$ ,

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC = \frac{1}{2} AB \cdot CD,$$

$$\therefore \frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{3} = \frac{1}{2} \times \sqrt{7} \times CD,$$





由旋转的性质可得,  $\angle O'AO = 120^\circ$ ,  $O'A = OA = 4$ ,  
 $\therefore \angle O'AD = 180^\circ - \angle O'AO = 60^\circ$ ,  
 $\therefore AD = O'A \cdot \cos 60^\circ = 2$ ,  $O'D = O'A \cdot \sin 60^\circ = 2\sqrt{3}$ ,  
 $\therefore OD = OA + AD = 4 + 2 = 6$ ,  
 $\therefore$  点  $O'$  的坐标为  $(6, 2\sqrt{3})$ .

$$(III) \frac{33}{8} \leq S \leq \frac{63}{8}.$$

$$\therefore O'B' = OB = 3,$$

$\therefore$  当点  $K$  到  $O'B'$  的距离最小时,  $\triangle KO'B'$  的面积最小, 当点  $K$  到  $O'B'$  的距离最大时,  $\triangle KO'B'$  的面积最大.

①如图③, 当点  $O'$  在  $AB$  上时,  $\triangle KO'B'$  的面积最小,

$$\therefore AK : BK = 1 : 3,$$

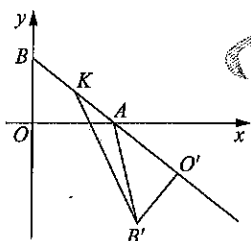
$$\therefore AK = \frac{1}{4}AB = \frac{5}{4},$$

$$\text{此时, } KO' = O'A - AK = 4 - \frac{5}{4} = \frac{11}{4},$$

$$\therefore S_{\min} = \frac{1}{2} \times KO' \times O'B' = \frac{1}{2} \times \frac{11}{4} \times 3 = \frac{33}{8};$$

$$3 = \frac{33}{8};$$

②如图④, 当点  $O'$  在  $BA$  的延长线上时,  $\triangle KO'B'$  的面积最大,



图④

$$\text{此时, } KO' = O'A + AK = 4 + \frac{5}{4} = \frac{21}{4},$$

$$\therefore S_{\max} = \frac{1}{2} \times KO' \times O'B' = \frac{1}{2} \times \frac{21}{4} \times 3 = \frac{63}{8}.$$

$$\text{综上所述, } \frac{33}{8} \leq S \leq \frac{63}{8}.$$

25. 解: (I)  $\because$  点  $A$  在线段  $OE$  上,  $OA = 2$ ,  $AD = 6$ ,

$$\therefore A(2, 0),$$

$\because$  四边形  $ABCD$  是矩形,

$$\therefore AD \perp AB,$$

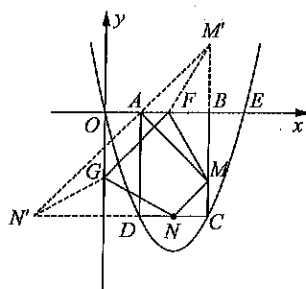
$$\therefore D(2, -6),$$

$\because$  抛物线  $y = ax^2 + bx (a > 0)$  经过点  $D(2, -6)$ ,  $E(8, 0)$ ,

$$\therefore \begin{cases} 4a + 2b = -6 \\ 64a + 8b = 0 \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -4 \end{cases},$$

$$\therefore \text{抛物线的解析式为 } y = \frac{1}{2}x^2 - 4x.$$

(II) 如图①, 作点  $M$  关于  $x$  轴的对称点  $M'$ , 作点  $N$  关于  $y$  轴的对称点  $N'$ , 连接  $FM'$ ,  $N'G$ ,  $M'N'$ ,



图①

$$\therefore y = \frac{1}{2}x^2 - 4x = \frac{1}{2}(x-4)^2 - 8,$$

$\therefore$  抛物线的对称轴为直线  $x = 4$ ,

$\because$  点  $C, D$  在抛物线上, 且  $CD \parallel x$  轴,  $D(2, -6)$ ,

$\therefore$  点  $C, D$  关于直线  $x = 4$  对称, 即  $y_C = y_D = -6$ ,

$$\therefore x_C = 4 + (4 - x_D) = 4 + 4 - 2 = 6, \text{即 } C(6, -6),$$

$$\therefore AB = CD = 4, B(6, 0),$$

$\because AM$  平分  $\angle BAD$ ,  $\angle BAD = \angle ABM = 90^\circ$ ,

$$\therefore \angle BAM = \angle DAM = \angle BMA = 45^\circ,$$

$$\therefore BM = AB = 4,$$

$$\therefore M(6, -4),$$

$\because$  点  $M, M'$  关于  $x$  轴对称, 点  $F$  在  $x$  轴上,

$$M'(6, 4), FM = FM',$$

$\because N$  是  $CD$  的中点,

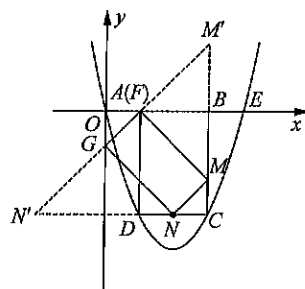
$$\therefore N(4, -6),$$

$\because$  点  $N, N'$  关于  $y$  轴对称, 点  $G$  在  $y$  轴上,

$$\therefore N'(-4, -6), NG = N'G,$$

$$\therefore \text{四边形 } MNGF \text{ 的周长 } C_{\text{四边形 } MNGF} = MN + NG + GF + FM = MN + N'G + GF + FM',$$

如图②, 当  $M', F, G, N'$  在同一条直线上时,  $N'G + GF + FM'$  有最小值为  $M'N'$ ,



图②

$$\therefore C_{\text{四边形 } MNGF} = MN + M'N' = \sqrt{(6-4)^2 + (-4+6)^2} + \sqrt{(6+4)^2 + (4+6)^2} = 2\sqrt{2} + 10\sqrt{2} = 12\sqrt{2},$$

$\therefore$  四边形  $MNGF$  周长的最小值为  $12\sqrt{2}$ .

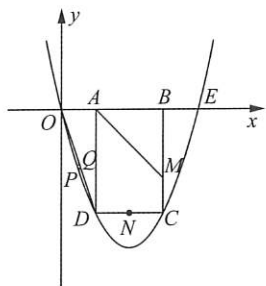
(Ⅲ)存在.

$$\because O(0,0), D(2,-6),$$

$$\therefore OD = \sqrt{(0-2)^2 + (0+6)^2} = 2\sqrt{10}, \text{ 直线 } OD \text{ 的解析式为 } y = -3x,$$

$$\text{设点 } P \text{ 的坐标为 } (t, \frac{1}{2}t^2 - 4t), 0 < t < 8.$$

①如图③,当  $0 < t < 2$  时,点  $P$  在点  $D$  左侧,过点  $P$  作  $PQ \parallel y$  轴交直线  $OD$  于点  $Q$ ,



图③

$$\text{则点 } Q(t, -3t),$$

$$\therefore PQ = y_Q - y_P = -3t - (\frac{1}{2}t^2 - 4t) = -\frac{1}{2}t^2 + t,$$

$$\therefore S_{\triangle ODP} = S_{\triangle OPQ} + S_{\triangle DPQ} = \frac{1}{2}PQ \cdot x_P + \frac{1}{2}PQ \cdot (x_D - x_P) =$$

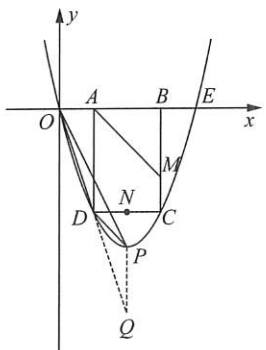
$$\frac{1}{2}PQ(x_P + x_D - x_P) = \frac{1}{2}PQ \cdot x_D = PQ = -\frac{1}{2}t^2 + t,$$

$$\because \triangle ODP \text{ 中 } OD \text{ 边上的高 } h = \frac{6\sqrt{10}}{5},$$

$$\therefore S_{\triangle ODP} = \frac{1}{2}OD \cdot h,$$

$$\therefore -\frac{1}{2}t^2 + t = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{10} \times \frac{6\sqrt{10}}{5}, \text{ 方程无解;}$$

②如图④,当  $2 < t < 8$  时,点  $P$  在点  $D$  右侧,过点  $P$  作  $PQ \parallel y$  轴交  $OD$  的延长线于点  $Q$ ,



图④

$$\therefore PQ = y_P - y_Q = \frac{1}{2}t^2 - 4t - (-3t) = \frac{1}{2}t^2 - t,$$

$$\therefore S_{\triangle ODP} = S_{\triangle OPQ} - S_{\triangle DPQ} = \frac{1}{2}PQ \cdot x_P - \frac{1}{2}PQ \cdot (x_P - x_D) =$$

$$\frac{1}{2}PQ(x_P - x_P + x_D) = \frac{1}{2}PQ \cdot x_D = PQ = \frac{1}{2}t^2 - t,$$

$$\therefore \frac{1}{2}t^2 - t = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{10} \times \frac{6\sqrt{10}}{5},$$

$$\text{解得 } t_1 = -4 (\text{舍去}), t_2 = 6,$$

$$\therefore P(6, -6).$$

综上所述,存在点  $P$ ,使  $\triangle ODP$  中  $OD$  边上的高为  $\frac{6\sqrt{10}}{5}$ ,点  $P$  的坐标为  $(6, -6)$ .

#### ④2024 河东区第一学期九年级期末质量调查

1. A 2. C 3. A 4. D 5. C 6. B 7. B 8. A 9. C 10. A

11. D

12. B  $\because$  点  $A(1, m), B(n, -4)$  是关于  $x$  的“黄金函数” $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$  上的一对“黄金点”,

$\therefore A, B$  关于原点对称,

$$\therefore m = 4, n = -1,$$

$$\therefore A(1, 4), B(-1, -4),$$

$$\text{代入 } y = ax^2 + bx + c (a \neq 0),$$

$$\text{得 } \begin{cases} a + b + c = 4 \\ a - b + c = -4 \end{cases}, \therefore \begin{cases} b = 4 \\ a + c = 0 \end{cases},$$

故①②正确;

$\because$  该函数的对称轴始终位于直线  $x = 2$  的右侧,

$$\therefore -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2a} > 2,$$

$$\therefore -1 < a < 0, \text{ 故④正确;}$$

$$\because a + c = 0,$$

$$\therefore c = -a,$$

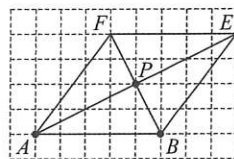
$$\because -1 < a < 0,$$

$$\therefore -\frac{3}{4}a > 0,$$

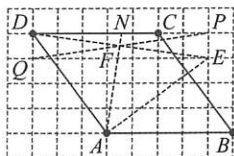
$$\therefore \frac{1}{4}a + \frac{1}{2}b + c = 2 - \frac{3}{4}a > 0, \text{ 故③错误.}$$

13.  $\frac{2}{11}$  14. -2 15. 2 16.  $\frac{1}{4}$

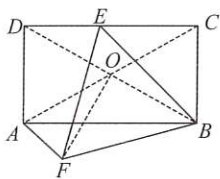
17. (I)



(II)



(I) 如图, 连接  $AC, BD$  交于  $O$ , 连接  $OF$ ,



$\because$  四边形  $ABCD$  是矩形,

$$\therefore BC=AD=2\sqrt{3}, OA=OB=OC=OD,$$

$$\therefore AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=4\sqrt{3},$$

$$\therefore OC=OB=OA=2\sqrt{3},$$

$$\therefore OB=OC=BC,$$

$\therefore \triangle BOC$  是等边三角形,

$$\therefore \angle OBC=\angle COB=60^\circ,$$

$$\therefore \angle AOB=120^\circ, \angle OAB=\angle OBA=30^\circ,$$

$\because \triangle BEF$  是等边三角形,

$$\therefore \angle EBF=60^\circ, EB=FB,$$

$$\therefore \angle OBC-\angle OBE=\angle EBF-\angle OBE, \text{ 即 } \angle EBC=\angle FBO,$$

$$\therefore \triangle EBC \cong \triangle FBO (\text{SAS}),$$

$$\therefore \angle BOF=\angle BCE=90^\circ,$$

$$\therefore \angle AOF=\angle AOB-\angle BOF=30^\circ.$$

$\because CE=BC,$

$$\therefore \angle CBE=\angle CEB=45^\circ,$$

$$\therefore \angle OBF=\angle OFB=45^\circ,$$

$$\therefore OB=OF, \text{ 得 } OA=OF,$$

$$\therefore \angle OAF=\frac{1}{2}(180^\circ-\angle AOF)=75^\circ.$$

$$\therefore \angle BAF=\angle OAF-\angle OAB=45^\circ;$$

(II)  $\because \angle AOF=30^\circ,$

$\therefore$  点  $F$  在与  $OA$  夹角为  $30^\circ$  的直线  $OF$  上运动,

$\therefore$  当  $AF \perp OF$  时,  $AF$  有最小值,

$$\text{此时 } AF=\frac{1}{2}OA=\sqrt{3}.$$

19. 解: (I)  $x^2-4x+3=0,$

$$\therefore (x-1)(x-3)=0,$$

$$\therefore x-1=0, \text{ 或 } x-3=0,$$

$$\therefore x_1=1, x_2=3.$$

(II)  $2x^2-2x-1=0,$

$$\therefore a=2, b=-2, c=-1,$$

$$\therefore \Delta=b^2-4ac=(-2)^2-4 \times 2 \times (-1)=12,$$

$$\therefore x=\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{2 \pm 2\sqrt{3}}{4},$$

$$\therefore x_1=\frac{1+\sqrt{3}}{2}, x_2=\frac{1-\sqrt{3}}{2}.$$

20. 解: (I)  $\frac{3}{4}.$

(II) 列表如下:

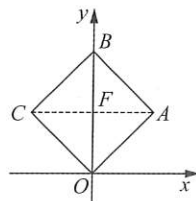
| 小明 \ 小华 | 2      | 5      | 6      | 8      |
|---------|--------|--------|--------|--------|
| 2       | (2, 2) | (5, 2) | (6, 2) | (8, 2) |
| 5       | (2, 5) | (5, 5) | (6, 5) | (8, 5) |
| 6       | (2, 6) | (5, 6) | (6, 6) | (8, 6) |
| 8       | (2, 8) | (5, 8) | (6, 8) | (8, 8) |

一共有 16 种等可能的结果, 其中小华抽出的牌上的牌面数字比小明抽出的牌上的牌面数字大的有 6 种结果, 分别为 (2, 5), (2, 6), (2, 8), (5, 6), (5, 8), (6, 8),

则小华抽出的牌上的牌面数字比小明抽出的牌上的牌面数字

$$\text{大的概率是 } P=\frac{6}{16}=\frac{3}{8}.$$

21. 解: (I) 如图①, 连接  $AC$  交  $BO$  于点  $F$ ,



图①

$\because$  四边形  $OABC$  是正方形, 且边长为 2,

$$\therefore OA=AB=BC=OC=2,$$

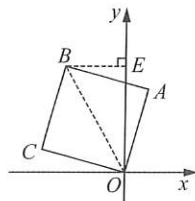
$$\therefore AC=BO=2\sqrt{2},$$

又  $AC$  与  $BO$  互相垂直平分,

$$\therefore AF=OF=\frac{1}{2} \times 2\sqrt{2}=\sqrt{2},$$

$$\therefore \text{点 } A \text{ 的坐标是 } (\sqrt{2}, \sqrt{2}).$$

(II) 如图②, 连接  $OB$ , 过点  $B$  作  $BE \perp y$  轴于点  $E$ ,



图②

则  $\angle BEO=90^\circ,$

$\because$  将图①中的正方形  $OABC$  绕点  $O$  逆时针旋转  $30^\circ,$

$$\therefore \angle BOE=30^\circ,$$

$$\therefore BE=\frac{1}{2}BO=\sqrt{2},$$

$$\therefore OE=\sqrt{BO^2-BE^2}=\sqrt{6},$$

$$\therefore \text{点 } B \text{ 的坐标为 } (-\sqrt{2}, \sqrt{6}).$$

22. 解: (I) 如图①, 连接  $OC$ ,

$\because OB=OC, \angle B=60^\circ$ ,  
 $\therefore \triangle OBC$  是等边三角形,  
 $\therefore BC=OB=\frac{1}{2}AB=2$ ,  
 $\because$  弦  $CD \perp AB$  于点  $E$ ,  
 $\therefore \angle BEC=90^\circ, CD=2CE$ ,  
 $\because \angle B=60^\circ$ ,  
 $\therefore CE=BC \cdot \sin B=2 \sin 60^\circ=2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$ ,

$\therefore CD=2CE=2\sqrt{3}$ .

(II) 如图②, 连接  $BG$ ,

$\because AB$  是  $\odot O$  的直径,  
 $\therefore \angle AGB=\angle BGF=90^\circ$ ,  
 $\therefore \angle DGF=115^\circ$ ,  
 $\therefore \angle BGD=\angle DGF-\angle BGF=25^\circ$ ,  
 $\therefore \angle BCD=\angle BGD=25^\circ$ .

23. 解: (I) ①30 ②35 ③40.

(II) 当  $200 \leq x \leq 600$  时, 设  $y=kx+b$ ,

将  $(200, 20), (600, 40)$  代入,

$$\text{得} \begin{cases} 200k+b=20 \\ 600k+b=40 \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} k=\frac{1}{20} \\ b=10 \end{cases}$$

$$\therefore y=\frac{1}{20}x+10,$$

$$W=50(1\,000-x)+x(\frac{1}{20}x+10)=\frac{1}{20}(x-400)^2+42\,000,$$

$$\because \frac{1}{20} > 0,$$

$\therefore$  当  $x=400$  时,  $W$  有最小值, 最小值为 42 000,

$$\therefore 1\,000-x=1\,000-400=600;$$

当  $600 < x \leq 700$  时,  $y=40$ ,

$$W=50(1\,000-x)+40x=-10x+50\,000,$$

$$\therefore -10 < 0,$$

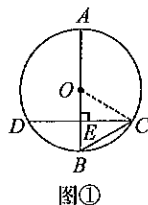
$\therefore$  当  $x=700$  时,  $W$  有最小值, 最小值为  $-10 \times 700 + 50\,000 = 43\,000$ ,

$$\therefore 42\,000 < 43\,000,$$

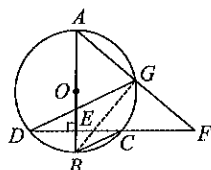
$\therefore$  当甲种蔬菜的种植面积为  $600 \text{ m}^2$ , 乙种蔬菜的种植面积为  $400 \text{ m}^2$  时,  $W$  最小.

24. (I) 解: 如图①, 连接  $AC$ ,

$\because$  四边形  $ABCD$  是菱形,  $\angle ABC=60^\circ$ ,  
 $\therefore AB=BC=CD=AD=4, \angle ABC=\angle D=60^\circ$ ,  
 $\therefore \triangle ABC, \triangle ADC$  是等边三角形,  
 $\because E$  是线段  $CB$  的中点,



图①



图②

$$\therefore AE \perp BC, BE=\frac{1}{2}BC=2, \angle BAE=\angle CAE=30^\circ,$$

$$\therefore AE=\sqrt{AB^2-BE^2}=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3},$$

$$\therefore \angle EAF=60^\circ,$$

$$\therefore \angle CAF=\angle EAF-\angle CAE=30^\circ,$$

同理, 可得  $AF=2\sqrt{3}$ ,

$$\therefore AE=AF,$$

$\therefore \triangle AEF$  是等边三角形,

$$\therefore EF=AE=2\sqrt{3}.$$

(II) (I) 证明: 如图②, 连接  $AC$ ,

由 (I) 可知  $\triangle ABC, \triangle ACD$  是等边三角形,

$$\therefore \angle ABC=\angle BAC=\angle ACD=60^\circ, AB=AC,$$

$$\therefore \angle BAC=\angle EAF=60^\circ,$$

$$\therefore \angle BAC-\angle EAC=\angle EAF-\angle EAC,$$

$$\text{即 } \angle BAE=\angle CAF,$$

$$\text{在 } \triangle BAE \text{ 和 } \triangle CAF \text{ 中, } \begin{cases} \angle BAE=\angle CAF \\ AB=AC \\ \angle ABE=\angle ACF \end{cases},$$

$$\therefore \triangle BAE \cong \triangle CAF (\text{ASA}),$$

$$\therefore AE=AF,$$

$$\therefore \angle EAF=60^\circ,$$

$\therefore \triangle AEF$  是等边三角形,

$$\therefore AE=EF=AF.$$

(II) 解:  $3-\sqrt{3}$ .

如图③, 连接  $AC$ , 过点  $A$  作  $AG \perp BC$  于点  $G$ , 则  $\angle AGE=90^\circ$ ,

$$\therefore \angle EAG=\alpha=45^\circ,$$

$\therefore \triangle AEG$  是等腰直角三角形,

$$\therefore AG=EG,$$

由 (I) 知,  $\triangle BAE \cong \triangle CAF$ ,

$$\therefore BE=CF,$$

$$\therefore AG=\sqrt{AB^2-BG^2}=2\sqrt{3},$$

$$\therefore EG=AG=2\sqrt{3},$$

$$\therefore BE=EG-BG=2\sqrt{3}-2,$$

$$\therefore CF=BE=2\sqrt{3}-2,$$

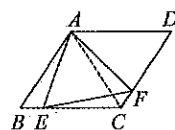
过点  $F$  作  $FH \perp BC$  于点  $H$ , 则  $\angle CHF=90^\circ$ ,

$$\therefore AB \parallel CD,$$

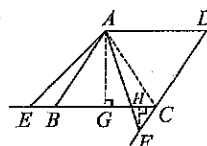
$$\therefore \angle HCF=\angle ABC=60^\circ,$$

$$\therefore HF=CF \cdot \sin \angle HCF=(2\sqrt{3}-2) \times \frac{\sqrt{3}}{2}=3-\sqrt{3},$$

即点  $F$  到  $BC$  的距离为  $3-\sqrt{3}$ .



图③



图③

25. 解: (I) 将点(2,1)代入  $y=x^2-2tx+3(t>0)$ ,

$$\text{得 } 1=4-4t+3, \text{ 解得 } t=\frac{3}{2}.$$

$$(II) \because y=x^2-2tx+3=(x-t)^2+3-t^2, t>0,$$

$\therefore$  抛物线的对称轴为直线  $x=t$ .

①若  $0<t\leq 3$ ,

当  $x=t$  时, 函数值最小,

$$\therefore 3-t^2=-2,$$

$$\text{解得 } t=\sqrt{5} \text{ 或 } t=-\sqrt{5}(\text{舍去});$$

②若  $t>3$ ,

当  $x=3$  时, 函数值最小,

$$\therefore -2=9-6t+3, \text{ 解得 } t=\frac{7}{3}(\text{舍去}).$$

综上所述,  $t=\sqrt{5}$ .

(III)  $\because A(m-2, a), C(m, a)$  关于对称轴对称, 且  $m-2<m$ ,

$\therefore A$  在对称轴左侧,  $C$  在对称轴右侧, 且  $m-2+m=2t$ ,

$$\text{即 } t=m-1,$$

$$\because t>0,$$

$$\therefore m-1>0, \text{ 即 } m>1.$$

$\because$  抛物线与  $y$  轴的交点为  $(0, 3)$ , 抛物线的对称轴为直线  $x=t$ ,

$\therefore (0, 3)$  关于抛物线对称轴对称的点为  $(2t, 3)$ , 即  $(2m-2, 3)$ ,

①当  $B$  在对称轴左侧时,

$$\because a<b<3,$$

$$\therefore m-2>4,$$

$$\therefore m>6;$$

②当  $B$  在对称轴右侧时,

$$\because a<b<3,$$

$$\therefore m<4<2m-2,$$

$$\therefore 3<m<4.$$

综上所述,  $3<m<4$  或  $m>6$ .

### ⑤ 2024 红桥区第一学期九年级期末质量调查

1. C 2. D 3. C 4. B 5. A 6. C 7. C 8. D 9. B 10. A

11. B

12. D  $\because$  二次函数  $y=ax^2-2ax+3=a(x-1)^2+3-a$ ,

$\therefore$  对称轴为  $x=1$ ,

令  $x=0$ , 得  $y=3$ , 则抛物线与  $y$  轴的交点坐标为  $(0, 3)$ ,

①当  $a>0$  时, 抛物线的开口向上,

$\because$  当  $0<x<3$  时, 对应的函数值  $y>0$ ,

$\therefore$  当  $x=1$  时,  $y=3-a>0$ ,

$\therefore 0<a<3$ ;

②当  $a<0$  时, 抛物线的开口向下,

$\because$  当  $0<x<3$  时, 对应的函数值  $y>0$ ,

$\therefore$  当  $x=3$  时,  $y=9a-6a+3\geq 0$ ,

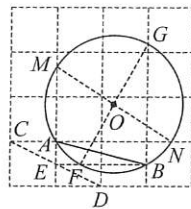
$\therefore -1\leq a<0$ .

综上所述,  $a$  的取值范围为  $-1\leq a<0$  或  $0<a<3$ .

13.  $\frac{2}{7}$  14. 1 15. -1 16. 4 17. 2

18. (I)  $\frac{\sqrt{17}}{2}$ ;

(II) 如图, 取格点  $C, D$ , 连接  $CD$  交网格线于点  $E$ , 连接  $BE$  与圆相交于点  $F$ ; 取圆与网格线的交点  $G, M, N$ , 连接  $FG, MN$  相交于点  $O$ , 则点  $O$  即为所求.



19. 解: 原方程化为  $2x^2-4x-3=0$ .

$$\because a=2, b=-4, c=-3,$$

$$\therefore \Delta=b^2-4ac=(-4)^2-4\times 2\times (-3)=40>0.$$

$$\therefore x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{4\pm\sqrt{40}}{4}=1\pm\frac{\sqrt{10}}{2}.$$

$$\therefore x_1=1-\frac{\sqrt{10}}{2}, x_2=1+\frac{\sqrt{10}}{2}.$$

20. 解: (I) 根据题意, 所得的结果列表如下:

| 第一次<br>第二次 | 1      | 2      | 3      | 4      |
|------------|--------|--------|--------|--------|
| 1          | (1, 1) | (2, 1) | (3, 1) | (4, 1) |
| 2          | (1, 2) | (2, 2) | (3, 2) | (4, 2) |
| 3          | (1, 3) | (2, 3) | (3, 3) | (4, 3) |
| 4          | (1, 4) | (2, 4) | (3, 4) | (4, 4) |

$\because$  共有 16 种等可能的结果,

两次取出的小球的标号相同的结果有 4 种,

$$\therefore \text{两次取出的小球的标号相同的概率 } P_1=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}.$$

(II) 两次取出的小球的标号的和小于 5 的结果有 6 种,

$$\therefore \text{两次取出的小球的标号的和小于 5 的概率 } P_2=\frac{6}{16}=\frac{3}{8}.$$

21. (I) 证明:  $\because \angle ACB=\frac{1}{2}\angle AOB, \angle BAC=\frac{1}{2}\angle BOC$ ,

$$\angle ACB=2\angle BAC,$$

$$\therefore \frac{1}{2}\angle AOB=\angle BOC,$$

$$\therefore \angle AOB=2\angle BOC.$$

(II)解:如图,过点O作半径OE⊥AB,垂足为D,连接BE.

$$\therefore \widehat{AE} = \widehat{BE}, AD = BD.$$

$$\therefore \angle AOE = \angle BOE = \frac{1}{2} \angle AOB.$$

$$\text{由(I)得, } \angle BOC = \frac{1}{2} \angle AOB = \angle BOE,$$

$$\therefore BC = BE.$$

$$\because AB = 4, OA = \frac{5}{2},$$

$$\therefore BD = \frac{1}{2} AB = 2, OB = OE = OA = \frac{5}{2}.$$

$$\text{在 Rt}\triangle ODB \text{ 中, 由勾股定理得, } OD = \sqrt{OB^2 - BD^2} = \frac{3}{2}.$$

$$\therefore DE = OE - OD = 1.$$

$$\text{在 Rt}\triangle EDB \text{ 中, 由勾股定理得, } BE = \sqrt{DE^2 + BD^2} = \sqrt{5}.$$

$$\therefore BC = BE = \sqrt{5}.$$

22. (I)证明:如图,连接OD.

$$\because OB = OD, AB = AC,$$

$$\therefore \angle B = \angle ODB, \angle B = \angle C.$$

$$\therefore \angle ODB = \angle C.$$

$$\therefore OD \parallel AC.$$

$$\because DE \perp AC,$$

$$\therefore \angle ODE = \angle DEC = 90^\circ.$$

$$\because OD \text{ 是 } \odot O \text{ 的半径,}$$

$$\therefore DE \text{ 是 } \odot O \text{ 的切线.}$$

(II)解:如图,连接AD.

$$\because AB \text{ 是 } \odot O \text{ 的直径,}$$

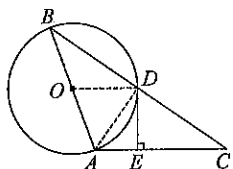
$$\therefore \angle ADB = 90^\circ.$$

$$\because AB = 2, AB = AC, \angle C = 30^\circ,$$

$$\therefore AC = 2, AD = \frac{1}{2} AC = 1.$$

$$\text{在 Rt}\triangle ADC \text{ 中, } CD = \sqrt{AC^2 - AD^2} = \sqrt{3}.$$

$$\therefore DE = \frac{1}{2} CD = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$



23. 解:(I)根据题意,抛物线  $C_1: y = a(x-3)^2 + 2$ ,

$$\therefore \text{抛物线 } C_1 \text{ 的顶点坐标为 } (3, 2),$$

由点  $A(6, 1)$  在抛物线上,

$$\text{得 } a(6-3)^2 + 2 = 1, \text{ 解得 } a = -\frac{1}{9},$$

$$\therefore \text{抛物线 } C_1: y = -\frac{1}{9}(x-3)^2 + 2,$$

$$\text{令 } x = 0, \text{ 则 } c = -\frac{1}{9}(0-3)^2 + 2 = 1.$$

(II)设小红在点  $D(6, y)$  处接到回传的沙包,

$$\text{根据题意, 得 } 1 - \frac{1}{2} < y < 1 + \frac{1}{2}, \text{ 即 } \frac{1}{2} < y < \frac{3}{2},$$

$$\text{当 } x = 6 \text{ 时, } y = -\frac{1}{9} \times 6^2 + \frac{2}{3} \times 6 + 2 = \frac{3}{4}n - \frac{5}{2},$$

$$\text{由 } \frac{1}{2} < \frac{3}{4}n - \frac{5}{2} < \frac{3}{2}, \text{ 解得 } 4 < n < \frac{16}{3},$$

$\therefore$  符合条件的  $n$  的整数值为 5.

(III) 4 或 5.

设小红在点  $E(x, 1)$  处接到回传的沙包,

$$\text{根据题意, 得 } 6 - 1 \leq x \leq 6 + 1, \text{ 即 } 5 \leq x \leq 7,$$

当抛物线  $C_2$  经过  $(5, 1)$  时,

$$1 = -\frac{1}{9} \times 25 + \frac{2}{3} \times 5 + 2, \text{ 解得 } n = \frac{17}{5},$$

当抛物线  $C_2$  经过  $(7, 1)$  时,

$$1 = -\frac{1}{9} \times 49 + \frac{2}{3} \times 7 + 2, \text{ 解得 } n = \frac{41}{7},$$

$$\therefore \frac{17}{5} \leq n \leq \frac{41}{7},$$

$\because n$  为整数,

$\therefore$  符合条件的  $n$  的整数值为 4 或 5.

24. 解:(I)  $\because$  点  $A(-\sqrt{3}, 0)$ , 点  $B(\sqrt{3}, 0)$ ,

$$\therefore OA = OB = \sqrt{3},$$

$\because$  点  $C$  在  $y$  轴的正半轴上,  $\angle OCB = 60^\circ$ ,

$$\therefore OC = \frac{OB}{\tan \angle OCB} = \frac{\sqrt{3}}{\tan 60^\circ} = 1,$$

$$\therefore BC = \sqrt{OC^2 + OB^2} = 2,$$

$$\therefore C(0, 1), AC = BC = 2,$$

由旋转的性质, 得  $B'C = BC = 2, O'C = OC = 1$ ,

$$\therefore \alpha = 60^\circ,$$

$\therefore$  点  $B'$  在  $y$  轴上, 点  $O'$  为  $AC$  的中点,

$$\therefore OB' = B'C - OC = 1,$$

$$\therefore \text{点 } B' \text{ 的坐标为 } (0, -1), \text{ 点 } O' \text{ 的坐标为 } (-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}).$$

(II) 由  $\alpha = 90^\circ$ , 得  $\angle O'CO = 90^\circ$ ,

$$\therefore \angle O' = \angle COE = 90^\circ,$$

$\therefore$  四边形  $COEO'$  为矩形, 又  $O'C = OC = 1$ ,

$\therefore$  四边形  $COEO'$  为正方形,

$$\therefore \angle OCA = \angle O'CB' = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle O'CD = \angle OCF = 30^\circ,$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle O'CD \cong \text{Rt}\triangle OCF (\text{ASA}),$$

$$\therefore S_{\triangle O'CD} = S_{\triangle OCF},$$

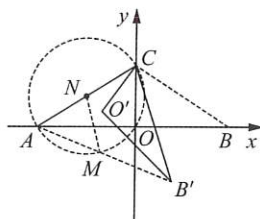
$$\text{在 Rt}\triangle OCF \text{ 中, } OF = OC \cdot \tan \angle OCF = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore S = S_{\text{正方形 } COEO'} - S_{\triangle OCF} - S_{\triangle O'CD} = 1 - 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{3} \times 1 =$$

$$1 - \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$(III) -\frac{1}{2} \leq m \leq \frac{3}{2}.$$

如图,取AC中点N,连接MN,

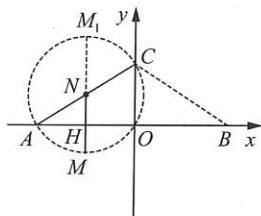


$\because M$ 为 $AB'$ 中点,

$$\therefore MN = \frac{1}{2} B'C = 1,$$

$\therefore$ 点 $M$ 在以点 $N$ 为圆心, $MN$ 的长度为半径的圆上运动,

如图,当 $MN \perp x$ 轴时,设垂足为点 $H$ ,延长 $MN$ 与圆交于点 $M_1$ ,



由(II)得, $\angle CAO = 90^\circ - \angle OCA = 30^\circ$ ,

$$\therefore NH = \frac{1}{2} AN = \frac{1}{4} AC = \frac{1}{2},$$

$$\therefore HM = MN - NH = \frac{1}{2}, HM_1 = M_1N + NH = \frac{3}{2},$$

$\therefore$ 点 $M$ 的纵坐标 $m$ 的取值范围是 $-\frac{1}{2} \leq m \leq \frac{3}{2}$ .

25. 解:(I)根据题意,得 
$$\begin{cases} 4a - 2b + 6 = 0, \\ 36a + 6b + 6 = 0, \end{cases} \text{解得} \begin{cases} a = -\frac{1}{2}, \\ b = 2. \end{cases}$$

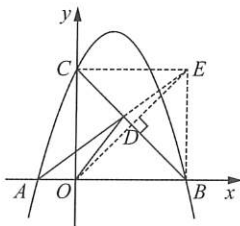
$\therefore$ 该抛物线的解析式为 $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 6$ .

(II)当 $x=0$ 时, $y=6$ ,得 $C(0,6)$ .

$\because B(6,0), \angle BOC = 90^\circ$ ,

$\therefore \triangle OBC$ 为等腰直角三角形,直线 $BC$ 的解析式为 $y = -x + 6$ .

如图,作点 $O$ 关于直线 $BC$ 的对称点 $E$ ,连接 $DE, CE, BE$ .



$\therefore DO = DE$ ,四边形 $OBEC$ 为正方形.

$\therefore E(6,6)$ .

$\therefore OA + AD + DO = 2 + AD + DE \geq 2 + AE$ .

当 $A, D, E$ 三点共线时, $\triangle AOD$ 的周长最小.

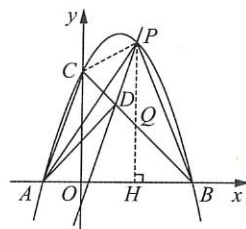
$\because A(-2,0), E(6,6)$ ,

$\therefore$ 直线 $AE$ 的解析式为 $y = \frac{3}{4}x + \frac{3}{2}$ .

$$\text{联立} \begin{cases} y = -x + 6, \\ y = \frac{3}{4}x + \frac{3}{2}, \end{cases} \text{解得} \begin{cases} x = \frac{18}{7}, \\ y = \frac{24}{7}. \end{cases}$$

$\therefore$ 点 $D$ 的坐标为 $(\frac{18}{7}, \frac{24}{7})$ .

(III)如图,连接 $PC$ ,过点 $P$ 作 $PH \perp x$ 轴,垂足为 $H$ ,与 $BC$ 相交于点 $Q$ .



由 $DP \parallel AC$ ,可得 $S_{\triangle PAD} = S_{\triangle PCD}$ .

$$\therefore S = S_{\triangle PAD} + S_{\triangle PBD} = S_{\triangle PCD} + S_{\triangle PBD} = S_{\triangle PBC}.$$

$$\therefore S = S_{\triangle PQC} + S_{\triangle PQB} = \frac{1}{2} OB \cdot PQ = 3PQ.$$

设 $P(m, -\frac{1}{2}m^2 + 2m + 6)$ ,则 $Q(m, -m + 6)$ .

$$\therefore S = 3[(-\frac{1}{2}m^2 + 2m + 6) - (-m + 6)] = -\frac{3}{2}m^2 + 9m = -\frac{3}{2}(m-3)^2 + \frac{27}{2}.$$

$\therefore$ 当 $m=3$ 时, $S$ 取得最大值 $\frac{27}{2}$ .

此时点 $P$ 的坐标为 $(3, \frac{15}{2})$ .

## ⑥2024 河西区第二学期九年级结课质量调查

1. D 2. B 3. B 4. A 5. B 6. D 7. C 8. D 9. C 10. A

11. D 如图,连接 $CE$ ,

$\therefore$ 将 $\triangle ABC$ 绕点 $B$ 逆时针旋转 $90^\circ$ 得到 $\triangle DBE$ ,

$\therefore BC = BE, \angle CBE = 90^\circ$ ,

$\angle EDB = \angle CAB = 45^\circ$ ,

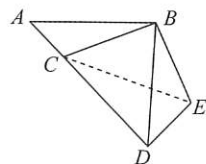
$\therefore \angle BCE = 45^\circ$ ,

$\therefore$ 点 $B, C, D, E$ 四点共圆.

$\therefore \angle BCD + \angle BED = 180^\circ$ ,

$\therefore \angle BCD + \angle BCA = 180^\circ$ .

$\therefore A, C, D$ 三点在一条直线上.



12. C 设这个扇形半径为 $r$ ,扇形面积为 $S$ ,由题意得:

$$S = \frac{1}{2}r(a-2r) = -r^2 + \frac{1}{2}ar = -(r - \frac{1}{4}a)^2 + \frac{1}{16}a^2,$$

故当 $r = \frac{1}{4}a$ 时,扇形面积 $S$ 有最大值.

13.  $\frac{5}{8}$  14.  $x^6$  15. 8 16. 6

17.6  $\because E$  是边  $BC$  的中点, 且  $\angle BFC = 90^\circ$ ,  $BC = 30$ ,

$$\therefore EF = \frac{1}{2} BC = 15.$$

$$\because EF \parallel AB, AB \parallel CG,$$

$\therefore EF$  是梯形  $ABCG$  的中位线.

$$\therefore EF = \frac{1}{2} (AB + CG).$$

$$\because AB = 18,$$

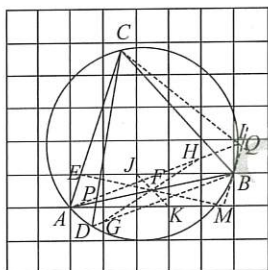
$$\therefore CG = 2EF - AB = 2 \times 15 - 18 = 12.$$

在  $\square ABCD$  中,  $CD = AB = 18$ ,

$$\therefore DG = CD - CG = 18 - 12 = 6.$$

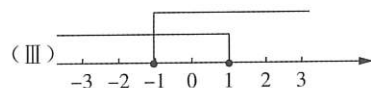
18. (I)  $\sqrt{26}$ ;

(II) 如图, 取格点  $J, K$ , 连接  $JK$  与  $AB$  交于点  $F$ ; 取  $AC$  与网格线的交点  $E$ , 连接  $EF$  并延长与网格线交于点  $M$ , 连接  $MB$ ; 连接  $DB$ , 与网格线相交于点  $G$ , 连接  $GF$  并延长与网格线相交于点  $H$ , 连接  $AH$  并延长与圆相交于点  $I$ , 连接  $CI$  并延长与  $MB$  的延长线相交于点  $Q$ , 则点  $Q$  即为所求.



19. 解: (I)  $x \geq -1$ ;

(II)  $x \leq 1$ ;



(IV)  $-1 \leq x \leq 1$ .

20. 解: (I) 50 28.

(II) 观察条形统计图,

$$\therefore \bar{x} = \frac{1.0 \times 5 + 1.2 \times 11 + 1.5 \times 14 + 1.8 \times 16 + 2.0 \times 4}{50} = 1.52,$$

$\therefore$  这组数据的平均数是 1.52.

$\because$  在这组数据中, 1.8 出现了 16 次, 出现的次数最多,

$\therefore$  这组数据的众数为 1.8.

$\because$  将这组数据按从小到大的顺序排列, 其中处于中间的两个数都是 1.5, 有  $\frac{1.5 + 1.5}{2} = 1.5$ ,

$\therefore$  这组数据的中位数为 1.5.

21. 解: (I)  $42^\circ$   $48^\circ$ .

$\because AD$  为直径,

$$\therefore \angle ACD = 90^\circ,$$

$$\because \angle CAD = 48^\circ,$$

$$\therefore \angle CDA = 90^\circ - \angle CAD = 42^\circ.$$

$\because$  四边形  $ABCD$  内接于  $\odot O$ ,

$$\therefore \angle CBE = \angle CDA = 42^\circ.$$

$$\because CE \perp AB,$$

$$\therefore \angle ECB = 90^\circ - \angle CBE = 48^\circ.$$

(II) 如图, 连接  $OB$ ,

$\because AD$  为直径,

$$\therefore \angle ACD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle D = 90^\circ - \angle CAD = 60^\circ,$$

$\because$  四边形  $ABCD$  内接于  $\odot O$ ,

$$\therefore \angle ABC = 180^\circ - \angle D = 120^\circ,$$

$$\therefore \angle EBC = 180^\circ - \angle ABC = 60^\circ,$$

$$\because CE \perp AB,$$

$$\therefore \angle ECB = 90^\circ - \angle EBC = 30^\circ,$$

$$\therefore BC = 2EB = 6.$$

$\because CE$  是  $\odot O$  的切线,

$$\therefore OC \perp EC, \angle ECO = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BCO = 90^\circ - \angle ECB = 60^\circ,$$

$$\because OB = OC,$$

$\therefore \triangle BCO$  为等边三角形,

$$\therefore OB = BC = 6, \text{ 即 } \odot O \text{ 的半径为 } 6.$$

22. 解: (I) 在  $\text{Rt} \triangle DEC$  中,  $CD = 5$ ,  $\angle DCE = 30^\circ$ ,

$$\therefore DE = \frac{1}{2} CD = \frac{5}{2}, \text{ 即 } DE \text{ 的长为 } \frac{5}{2} \text{ m.}$$

$$(II) (i) \text{ 在 } \text{Rt} \triangle DEC \text{ 中, } \cos \angle DCE = \frac{EC}{CD},$$

$$\therefore EC = CD \cdot \cos \angle DCE = 5 \times \cos 30^\circ = \frac{5\sqrt{3}}{2},$$

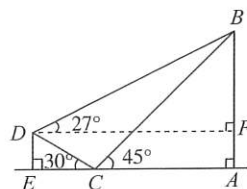
在  $\text{Rt} \triangle ABC$  中, 由  $\tan \angle BCA = \frac{AB}{CA}$ ,  $AB = h$ ,  $\angle BCA = 45^\circ$ ,

$$\text{得 } CA = \frac{h}{\tan 45^\circ} = h,$$

$$\therefore EA = CA + EC = h + \frac{5\sqrt{3}}{2},$$

即线段  $EA$  的长为  $(h + \frac{5\sqrt{3}}{2})$  m.

(ii) 如图, 过点  $D$  作  $DF \perp AB$ , 垂足为  $F$ .



根据题意,  $\angle AED = \angle FAE = \angle DFA = 90^\circ$ ,

$\therefore$  四边形 DEAF 是矩形,

$$\therefore DF = EA = h + \frac{5\sqrt{3}}{2}, FA = DE = \frac{5}{2},$$

$$\therefore BF = AB - FA = h - \frac{5}{2},$$

在  $\text{Rt}\triangle BDF$  中,  $\tan \angle BDF = \frac{BF}{DF}$ ,  $\angle BDF = 27^\circ$ ,

$$\therefore BF = DF \cdot \tan \angle BDF, \text{ 即 } h - \frac{5}{2} = (h + \frac{5\sqrt{3}}{2}) \times \tan 27^\circ,$$

$$h = \frac{5}{2} \times \frac{1 + \sqrt{3} \times \tan 27^\circ}{1 - \tan 27^\circ} \approx \frac{5}{2} \times \frac{1 + 1.7 \times 0.5}{1 - 0.5} \approx 9(\text{m}).$$

答: 塔 AB 的高度约为 9 m.

23. 解: (I) (1) 100 800 900;

(II) 1 900;

(III) 当  $0 \leq x \leq 8$  时,  $y = 100x$ ;

当  $8 < x \leq 17$  时,  $y = 800$ ;

当  $17 < x \leq 28$  时,  $y = 100x - 900$ .

(II) 6 能追上, 且追上时兄妹俩离家 300 米远.

由 (III) 知 BC 所在直线解析式为  $y = 100x - 900$ ,

$\therefore$  妹妹的速度是哥哥的 1.6 倍,

$\therefore$  可设妹妹从书吧到家的路程与时间的关系满足 FG 所在直

线解析式为  $y = 160x + b$ ,

将  $F(20, 800)$  代入, 得  $800 = 160 \times 20 + b$ , 解得  $b = -2400$ .

$$\therefore y = 160x - 2400,$$

$$\text{联立} \begin{cases} y = 100x - 900, \\ y = 160x - 2400, \end{cases} \text{ 解得} \begin{cases} x = 25, \\ y = 1600. \end{cases}$$

故  $1900 - 1600 = 300 > 0$ , 即妹妹能在哥哥到家前追上哥哥,

且追上时兄妹俩离家还有 300 米远.

24. 解: (I)  $(6, 6\sqrt{3})$   $(-7, 3\sqrt{3})$ .

(II) (1) 由 (I) 知  $OE = 7$ , 又  $OO' = t$ ,  $\therefore OE' = t - 7$ .

$\therefore \triangle OAB$  是等边三角形且  $OE' \perp E'D'$ ,

$$\therefore OG = 2OE' = 2t - 14,$$

$$\therefore GF = 6 - OG = 6 - (2t - 14) = 20 - 2t,$$

$$\text{同理 } D'F = \frac{1}{2}GF = 10 - t, D'G = \sqrt{3}D'F = \sqrt{3}(10 - t).$$

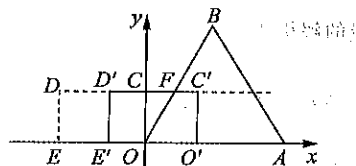
$$\therefore S = S_{\text{矩形}O'C'D'E'} - S_{\triangle D'FG} = 7 \times 3\sqrt{3} - \frac{1}{2}(10 - t) \times \sqrt{3}(10 - t)$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{2}t^2 + 10\sqrt{3}t - 29\sqrt{3},$$

其中  $t$  的取值范围是  $7 < t \leq 9$ .

$$(II) 12\sqrt{3} \leq S \leq \frac{83\sqrt{3}}{4}.$$

① 当  $\frac{11}{2} \leq t \leq 7$  时, 如图③,



图③

$$\therefore OO' = t, FC' = t - 3,$$

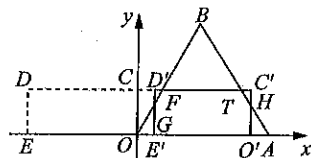
$$\therefore S = \frac{1}{2}(t + t - 3) \times 3\sqrt{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2}(2t - 3),$$

$\therefore$  当  $t = \frac{11}{2}$  时,  $S$  取最小值为  $12\sqrt{3}$ , 且当  $t = 7$  时,  $S = \frac{33\sqrt{3}}{2}$ .

② 当  $7 < t \leq 9$  时, 由 (1) 知  $S = -\frac{\sqrt{3}}{2}(t - 10)^2 + 21\sqrt{3}$ ,

$\therefore$  当  $t = 9$  时,  $S$  取最大值为  $\frac{41\sqrt{3}}{2}$ .

③ 当  $9 < t < 10$  时, 如图④,



图④

设  $C'D'$  交  $AB$  于点  $T$ ,  $O'C'$  交  $AB$  于点  $H$ ,

$$\therefore CT = CF + FT = 3 + 6 = 9,$$

$$\therefore CT = CC' - O'C' = t - 9,$$

$$CH = \sqrt{3}CT = \sqrt{3}(t - 9),$$

$$\therefore S_{\triangle CHT} = \frac{\sqrt{3}}{2}(t - 9)^2,$$

由 (1) 知  $D'F = 10 - t$ ,

$$\therefore D'G = \sqrt{3}(10 - t),$$

$$\therefore S_{\triangle D'GD'} = \frac{\sqrt{3}}{2}(10 - t)^2,$$

$$\therefore S = 21\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}(10 - t)^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}(t - 9)^2$$

$$= -\sqrt{3}(t - \frac{19}{2})^2 + \frac{83\sqrt{3}}{4},$$

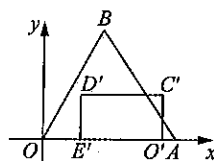
$\therefore$  当  $t = \frac{19}{2}$  时,  $S$  取最大值为  $\frac{83\sqrt{3}}{4}$ .

④ 当  $10 \leq t \leq \frac{21}{2}$  时, 如图⑤,

$\therefore S$  随着  $t$  的增大而减小,

$\therefore$  当  $t = 10$  时,  $S$  取最大值为  $\frac{41\sqrt{3}}{2}$ .

综上所述,  $12\sqrt{3} \leq S \leq \frac{83\sqrt{3}}{4}$ .



图⑤

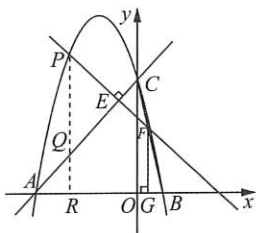
25. 解: (I) 由题意得  $\begin{cases} c = 4, \\ -16 - 4b + c = 0, \end{cases}$  解得  $\begin{cases} b = -3, \\ c = 4, \end{cases}$

则抛物线的解析式为  $y = -x^2 - 3x + 4 = -(x + \frac{3}{2})^2 + \frac{25}{4}$ ,

故抛物线的对称轴为直线  $x = -\frac{3}{2}$ .

(II)(i)  $-3 \leq m \leq -2$ ;

如图,作  $PR \perp x$  轴于  $R$  且交直线  $AC$  于点  $Q$ ,



由  $A(-4, 0), C(0, 4)$ , 得  $AC$  所在直线的解析式为  $y = x + 4$ ,

$\because OA = OC = 4, \therefore \angle CAO = 45^\circ$ .

$\therefore \angle PQE = \angle AQR = 90^\circ - \angle CAO = 45^\circ$ .

$\therefore PQ = \frac{PE}{\sin 45^\circ} = 4$ .

$\therefore P$  点的横坐标为  $m$ ,

$\therefore P(m, -m^2 - 3m + 4)$ , 则  $Q(m, m + 4)$ ,

$\therefore PQ = -m^2 - 3m + 4 - (m + 4) = 4$ , 解得  $m = -2$ .

故  $P$  点的坐标为  $(-2, 6)$ .

(ii) 令  $-x^2 - 3x + 4 = 0$ , 解得  $x_1 = -4, x_2 = 1$ ,

$\therefore B(1, 0)$ .

设  $BC$  所在直线的解析式为  $y = k_1x + b_1$ ,

将  $B(1, 0), C(0, 4)$  代入, 得  $\begin{cases} k_1 + b_1 = 0, \\ b_1 = 4, \end{cases}$  解得  $\begin{cases} k_1 = -4, \\ b_1 = 4, \end{cases}$

$\therefore BC$  所在直线的解析式为  $y = -4x + 4$ .

$\because \angle CAO = 45^\circ, \angle AEB = 90^\circ$ ,

$\therefore$  直线  $PE$  与  $x$  轴所成夹角为  $45^\circ$ ,

$\therefore$  设  $PE$  所在直线的解析式为  $y = -x + b_2$ ,

将  $P$  点坐标代入, 得  $b_2 = -m^2 - 2m + 4$ ,

$\therefore y = -x - m^2 - 2m + 4$ .

联立  $\begin{cases} y = -4x + 4, \\ y = -x - m^2 - 2m + 4, \end{cases}$

解得  $x = \frac{1}{3}(m^2 + 2m)$ ,

$\therefore FG = y_F = -4 \times \frac{m^2 + 2m}{3} + 4$ ,

$\sqrt{2}FP = \sqrt{2} \times \frac{x_F - x_P}{\cos 45^\circ} = \frac{2}{3}(m^2 - m)$ .

$\therefore FG + \sqrt{2}FP = \frac{-4(m^2 + 2m)}{3} + 4 + \frac{2}{3}(m^2 - m)$

$= -\frac{2}{3}(m + \frac{5}{2})^2 + \frac{49}{6}$ ,

$\therefore -3 < m < -2$ ,

$\therefore$  当  $m = -\frac{5}{2}$  时,  $FG + \sqrt{2}FP$  取得最大值, 最大值为  $\frac{49}{6}$ .

## ⑦2024 红桥区第二学期九年级结课质量调查

1. C 2. D 3. D 4. A 5. B 6. C 7. A 8. B 9. C 10. A

11. B

12. D  $\because$  抛物线开口向下,

$\therefore a < 0$ .

$\because$  抛物线对称轴为直线  $x = 2$ , 且与  $x$  轴的一个交点的坐标为

$(6, 0)$ ,

$\therefore$  抛物线与  $x$  轴的另一个交点坐标为  $(-2, 0)$ ,

$\therefore \begin{cases} -\frac{b}{a} = -2 + 6 = 4, \\ \frac{c}{a} = -2 \times 6 = -12, \end{cases}$  解得  $\begin{cases} b = -4a, \\ c = -12a, \end{cases}$

$\therefore a - b + c = -7a > 0$ , 故①正确;

由  $cx^2 + bx + a = 0$ , 可得方程的两根关系为  $x_1 + x_2 = -\frac{b}{c} =$

$-\frac{1}{3}, x_1x_2 = \frac{a}{c} = -\frac{1}{12}$ ,

解得  $x_1 = -\frac{1}{2}, x_2 = \frac{1}{6}$ , 故②正确;

若  $x_1 < 2 < x_2$ , 且  $x_1 + x_2 > 4$ ,

则点  $P(x_1, y_1)$  到对称轴的距离小于点  $Q(x_2, y_2)$  到对称轴的距离,

$\therefore y_1 > y_2$ , 故③正确.

13.  $\frac{5}{8}$  14. 2 15.  $y = -\frac{2}{x}$  16.  $k > -\frac{1}{4}$

17.  $2\sqrt{5}$  如图, 设  $BP$  交  $CD$  于点  $K$ , 过点  $K$  作  $KH \perp BD$  于点  $H$ ,

$\because$  四边形  $ABCD$  是矩形,

$\therefore \angle BCK = \angle CDN = 90^\circ, CD = AB = 4$ ,

$\because BC = 3$ ,

$\therefore BD = \sqrt{BC^2 + CD^2} = 5$ .

由题意知  $BP$  平分  $\angle CBD$ ,

$\therefore KH \perp BD, KC \perp BC$ ,

$\therefore CK = KH$ .

$\therefore S_{\triangle BCD} = S_{\triangle BCK} + S_{\triangle BDK}$ ,

$\therefore \frac{1}{2}BC \cdot CD = \frac{1}{2}BC \cdot CK + \frac{1}{2}BD \cdot KH$ ,

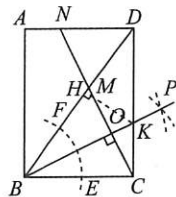
$\therefore 3 \times 4 = 3CK + 5CK$ ,

$\therefore CK = \frac{3}{2}$ .

$\therefore BK = \sqrt{BC^2 + CK^2} = \frac{3\sqrt{5}}{2}$ .

$\because CO \perp BO$ ,

$\therefore \angle CBK + \angle BCO = \angle DCN + \angle BCO$ ,





$$\because AH+BH=AB,$$

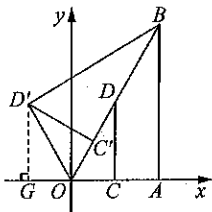
$$\therefore \frac{PH}{\tan 61^\circ} + PH = 70, \text{ 可得 } PH = \frac{70 \times \tan 61^\circ}{1 + \tan 61^\circ}.$$

$$\therefore BP = \sqrt{2}PH = \frac{\sqrt{2} \times 70 \times \tan 61^\circ}{1 + \tan 61^\circ} \approx \frac{1.4 \times 70 \times 1.8}{1 + 1.8} = 63 \text{ (海里)}.$$

答:此时海轮距灯塔的距离  $BP$  约为 63 海里.

24. 解:(I)  $(0, 2)$   $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$ .

(II) 如图,过  $D'$  作  $D'G \perp x$  轴于点  $G$ ,



$$\because \angle AOB = 60^\circ, \angle C'OD' = 60^\circ, OD' = 2,$$

$$\therefore \angle D'OG = 180^\circ - \angle AOB - \angle C'OD' = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle GD'O = 30^\circ,$$

$$\therefore OG = \frac{1}{2}OD' = 1, D'G = \sqrt{3}OG = \sqrt{3},$$

$$\therefore D'(-1, \sqrt{3}).$$

$$\because B(2, 2\sqrt{3}), \therefore BD' = \sqrt{(2+1)^2 + (2\sqrt{3}-\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{3}.$$

$$\therefore \text{点 } D' \text{ 的坐标为 } (-1, \sqrt{3}), BD' \text{ 的长为 } 2\sqrt{3}.$$

(III)  $BM$  最大值为  $4 + \frac{\sqrt{7}}{2}$ , 最小值为  $4 - \frac{\sqrt{7}}{2}$ .

$$\text{由题意得 } C'D' = CD = \sqrt{3}, OC' = OC = 1,$$

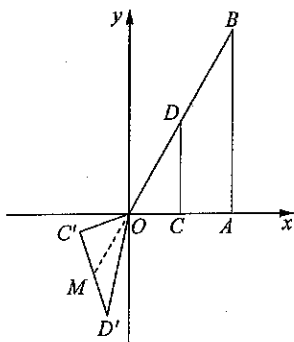
$$\angle DCO = \angle BAO = 90^\circ,$$

$$\text{又 } M \text{ 是线段 } C'D' \text{ 的中点, } \therefore C'M = \frac{1}{2}C'D' = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\therefore OM = \sqrt{C'M^2 + OC'^2} = \sqrt{(\frac{\sqrt{3}}{2})^2 + 1^2} = \frac{\sqrt{7}}{2}.$$

$$\therefore M \text{ 在以 } O \text{ 为圆心, } \frac{\sqrt{7}}{2} \text{ 为半径的圆上运动.}$$

当  $BM$  最大时,如图,

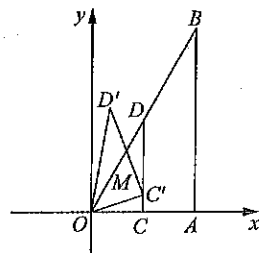


点  $M$  在  $BO$  的延长线上,

$$\text{又 } OB = 4, \therefore BM = OB + OM = 4 + \frac{\sqrt{7}}{2},$$

$$\text{即 } BM \text{ 最大值为 } 4 + \frac{\sqrt{7}}{2},$$

当  $BM$  最小时,如图,



$$\text{点 } M \text{ 在线段 } OB \text{ 上, } BM = OB - OM = 4 - \frac{\sqrt{7}}{2},$$

$$\therefore BM \text{ 最小值为 } 4 - \frac{\sqrt{7}}{2}.$$

$$\text{综上所述, } BM \text{ 最大值为 } 4 + \frac{\sqrt{7}}{2}, \text{ 最小值为 } 4 - \frac{\sqrt{7}}{2}.$$

25. 解:(I)  $\because$  点  $A(-1, 0), B(4, 0)$  在抛物线上,

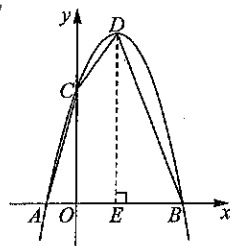
$$\therefore \begin{cases} a-b+4=0 \\ 16a+4b+4=0 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} a=-1 \\ b=3 \end{cases},$$

$$\therefore \text{该抛物线的解析式为 } y = -x^2 + 3x + 4.$$

$$(II) \text{ 由 } y = -x^2 + 3x + 4 = -(x - \frac{3}{2})^2 + \frac{25}{4},$$

$$\text{得顶点 } D(\frac{3}{2}, \frac{25}{4}),$$

如图,过点  $D$  作  $DE \perp x$  轴,垂足为  $E$ .



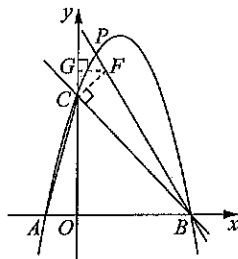
当  $x=0$  时,  $y=4$ , 可得点  $C$  的坐标为  $(0, 4)$ .

$$\therefore S_{\triangle AOC} = \frac{1}{2}AO \cdot CO = 2, S_{\triangle DEB} = \frac{1}{2}EB \cdot DE = \frac{125}{16},$$

$$S_{\text{梯形}OCDE} = \frac{1}{2}(CO + DE) \cdot OE = \frac{123}{16}.$$

$$\therefore S_{\text{四边形}ACDB} = S_{\triangle AOC} + S_{\text{梯形}OCDE} + S_{\triangle DEB} = \frac{35}{2}.$$

(III) 如图,过点  $C$  作  $CF \perp BC$ , 交  $PB$  于点  $F$ , 过点  $F$  作  $FG \perp y$  轴, 垂足为  $G$ .



$$\text{设 } P(m, -m^2 + 3m + 4),$$

$$\because B(4, 0), C(0, 4),$$

$$\therefore OB = OC = 4, \angle OBC = \angle OCB = 45^\circ.$$

$$\therefore BC=4\sqrt{2},$$

$$\text{由 } \tan \angle ACO = \frac{AO}{CO} = \frac{1}{4}, \angle ACO = \angle PBC,$$

$$\text{得 } \tan \angle PBC = \frac{CF}{BC} = \frac{1}{4}, \therefore CF = \sqrt{2},$$

$$\text{又 } \angle GCF = 180^\circ - 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ,$$

$$\therefore CG = FG = 1. \therefore F(1, 5).$$

设直线  $BF$  的解析式为  $y = sx + t$ , 代入点  $B, F$  的坐标,

$$\text{有 } \begin{cases} s+t=5 \\ 4s+t=0 \end{cases}, \text{解得 } \begin{cases} s=-\frac{5}{3} \\ t=\frac{20}{3} \end{cases}.$$

$$\therefore \text{直线 } BF \text{ 的解析式为 } y = -\frac{5}{3}x + \frac{20}{3},$$

$\because$  点  $P$  在直线  $BF$  上,

$$\therefore -m^2 + 3m + 4 = -\frac{5}{3}m + \frac{20}{3}, \text{即 } 3m^2 - 14m + 8 = 0,$$

$$\text{解得 } m=4 (\text{舍去}), \text{或 } m=\frac{2}{3}, \therefore y = -\frac{5}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{20}{3} = \frac{50}{9}.$$

$$\therefore \text{点 } P \text{ 的坐标为 } (\frac{2}{3}, \frac{50}{9}).$$

### ⑧2024 滨海新区第二学期九年级结课质量调查

1. D 2. A 3. B 4. C 5. C 6. B 7. A 8. B 9. D 10. D

11. A

12. C  $\because$  对称轴是直线  $x = -1$ ,

$$\therefore -\frac{b}{2a} = -1, \text{即 } b = 2a.$$

$\because$  抛物线开口向下,

$$\therefore a < 0, \therefore b < 0.$$

$\because$  抛物线与  $y$  轴交于正半轴,

$$\therefore c > 0, \therefore abc > 0, \text{故①正确};$$

$\because$  抛物线与  $x$  轴有两个交点,

$$\therefore ax^2 + bx + c = 0 \text{ 有两个不相等的实数根},$$

$$\therefore b^2 - 4ac > 0, \text{即 } 4ac - b^2 < 0, \text{故②正确};$$

由抛物线的对称性知当  $x=1$  时  $y$  的值与  $x=-3$  时  $y$  的值相等, 且当  $x=1$  时,  $y = a + b + c = 3a + c, \therefore 3a + c < 0$ , 故③错误;

$\because$  抛物线的顶点坐标为  $(-1, n)$ ,

$\therefore$  抛物线的最大值为  $n$ ,

$\therefore$  关于  $x$  的方程  $ax^2 + bx + c = n + 2$  无实根, 故④正确.

13. 二、四 14. 36 15.  $30(1+x)^2 = 36.3$  16.  $y = -(x+2)^2$

17.  $4\sqrt{2} - 4$   $\because$  正方形  $ABCD$  的边长为 4,

$$\therefore AB = BC, \angle BAD = \angle BCD = 90^\circ,$$

$\because$  将  $\triangle ABD$  绕着点  $B$  顺时针旋转  $45^\circ$  得到  $\triangle EBF$ ,

$$\therefore BE = AB = 4, \angle BEF = \angle BAD = 90^\circ,$$

$$\therefore BE = BC,$$

$$\text{又 } BG = BG,$$

$$\therefore \text{Rt} \triangle BEG \cong \text{Rt} \triangle BCG (\text{HL}),$$

$$\therefore \angle EBG = \angle CBG,$$

$$\text{在 } \triangle BEH \text{ 和 } \triangle BCH \text{ 中}, \begin{cases} BE = BC \\ \angle EBH = \angle CBH \\ BH = BH \end{cases}$$

$$\therefore \triangle BEH \cong \triangle BCH (\text{SAS}),$$

$$\therefore \angle BEH = \angle BCH,$$

$\because$  正方形  $ABCD$  的对角线  $AC, BD$  相交于点  $O$ ,

$$\therefore \angle DOC = 90^\circ, \angle BCH = 45^\circ, OB = 2\sqrt{2},$$

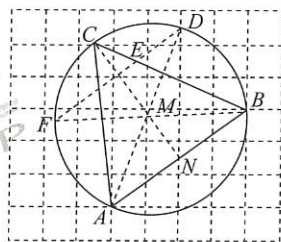
$$\therefore \angle BEH = 45^\circ, \text{得 } OE = OH,$$

$$\text{又 } OE = BE - OB = 4 - 2\sqrt{2},$$

$$\therefore EH = \sqrt{2}OE = 4\sqrt{2} - 4.$$

18. (I) 5;

(II) 如图, 取  $AB$  与网格线的交点  $N$ , 连接  $CN, AD$ , 交于点  $M$ ; 连接  $BM$  并延长, 交圆于点  $F$ ; 连接  $DF$ , 交  $BC$  于  $E$ , 则点  $E$  即为所求.



$$19. \text{解: } \because x^2 + 2x - 8 = 0,$$

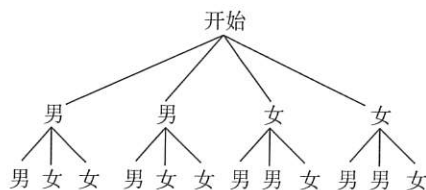
$$\therefore (x+4)(x-2) = 0,$$

$$\therefore x+4=0, \text{或 } x-2=0,$$

$$\text{解得 } x_1 = -4, x_2 = 2.$$

$$20. \text{解: (I) } \frac{1}{2}.$$

(II) 画树状图如下:



$\because$  共有 12 种等可能结果, 其中一男一女有 8 种,

$$\therefore P(\text{恰好选中一男一女}) = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}.$$

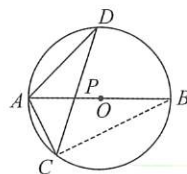
21. 解: (I) 如图①, 连接  $BC$ ,

$$\therefore \widehat{AC} = \widehat{AC},$$

$$\therefore \angle ABC = \angle ADC = 24^\circ.$$

$\because AB$  为  $\odot O$  的直径,

$$\therefore \angle ACB = 90^\circ,$$



图①

$$\therefore \angle CAB = 90^\circ - \angle ABC = 90^\circ - 24^\circ = 66^\circ.$$

(II) 如图②, 连接 OC.

$$\because \angle ADC = 24^\circ,$$

$$\therefore \angle AOC = 2\angle ADC = 48^\circ,$$

$\because EC$  是  $\odot O$  的切线,

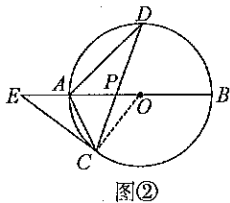
$$\therefore \angle OCE = 90^\circ.$$

$$\therefore \angle OEC = 90^\circ - \angle AOC = 90^\circ - 48^\circ = 42^\circ.$$

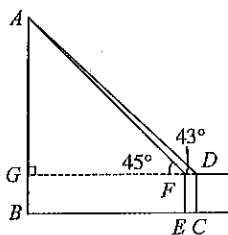
$$\because EP = EC,$$

$$\therefore \angle EPC = \angle ECP = \frac{180^\circ - 42^\circ}{2} = 69^\circ.$$

$$\therefore \angle DAP = \angle EPC - \angle ADC = 45^\circ.$$



22. 解: 如图, 过点 F 作  $FG \perp AB$  于点 G,



根据题意, 得点 D, F, G 三点共线,  $BG = EF = CD = 1$ ,

$$FG = EB, \angle AFG = 45^\circ, \angle ADG = 43^\circ.$$

$$\because FG \perp AB, \angle AFG = 45^\circ,$$

$$\therefore \text{在 Rt}\triangle AGF \text{ 中}, \angle FAG = \angle AFG = 45^\circ,$$

$$\therefore AG = FG.$$

$$\text{在 Rt}\triangle ADG \text{ 中}, \tan \angle ADG = \frac{AG}{DG} = \frac{FG}{FG + 1},$$

$$\therefore FG = \frac{\tan 43^\circ}{1 - \tan 43^\circ} \approx \frac{0.93}{1 - 0.93} \approx 13.3.$$

$$\therefore AB = AG + BG \approx 14.3 (\text{米}).$$

答: 鼓楼 AB 的高度约为 14.3 米.

23. 解: (I) (1) 40 40;

$$(II) 45 - x \quad 20 + 4x.$$

(II) 设每盆花应降价  $x$  元,

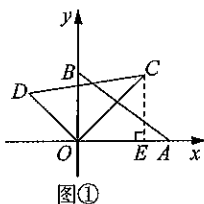
$$\text{根据题意得 } (45 - x)(20 + 4x) = 2400,$$

$$\text{即 } x^2 - 40x + 375 = 0, \text{ 解得 } x_1 = 15, x_2 = 25.$$

由于要尽快减少库存, 需要增加销售量,  $\therefore x = 25$ .

答: 每盆花应降价 25 元.

24. 解: (I) 如图①, 过点 C 作  $CE \perp x$  轴, 垂足为 E.



$$\because A(4,0), \therefore OA = 4. \text{ 由旋转得 } OC = 4.$$

$$\because \alpha = 45^\circ, \therefore \angle EOC = \angle ECO = 45^\circ.$$

$$\text{在 Rt}\triangle OCE \text{ 中}, OE = CE = OC \cdot \sin \angle EOC = 4 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2},$$

$$\therefore \text{点 } C \text{ 的坐标为 } (2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}).$$

$$(II) \because B(0,3), \therefore OB = 3.$$

$$\therefore AB = \sqrt{OA^2 + OB^2} = 5.$$

$$\because OD \parallel AB, OD \perp OC, \therefore OC \perp AB.$$

$$\therefore \angle OPA = 90^\circ.$$

$$\because \sin \angle OAP = \frac{OP}{OA} = \frac{OB}{AB}, \therefore \frac{OP}{4} = \frac{3}{5},$$

$$\therefore OP = \frac{12}{5}.$$

$$\therefore PC = OC - OP = 4 - \frac{12}{5} = \frac{8}{5}.$$

在 Rt $\triangle PQC$  中,

$$PQ = PC \cdot \tan \angle C = PC \cdot \tan \angle OAB = \frac{8}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{6}{5}.$$

$$(III) C(-\frac{28}{25}, \frac{96}{25}).$$

如图②, 过点 O 作  $OP \perp AB$  于点 P, 过

点 C 作  $CH \perp x$  轴于点 H,

$$\text{由 (II) 得 } OP = \frac{12}{5},$$

由旋转性质得  $OC = OA = 4$ ,

$$\therefore PA = \sqrt{OA^2 - OP^2} = \sqrt{4^2 - (\frac{12}{5})^2} = \frac{16}{5},$$

$$\therefore AC = 2PA = \frac{32}{5}.$$

$$\because \sin \angle OAP = \frac{OP}{OA} = \frac{CH}{AC}, \therefore \frac{\frac{12}{5}}{4} = \frac{CH}{\frac{32}{5}}, \therefore CH = \frac{96}{25}.$$

$$\therefore OH = \sqrt{OC^2 - CH^2} = \sqrt{4^2 - (\frac{96}{25})^2} = \frac{28}{25},$$

$$\therefore C(-\frac{28}{25}, \frac{96}{25}).$$

25. 解: (I)  $\because$  抛物线过点  $A(-3,0), B(1,0)$ ,

$$\therefore \begin{cases} 9a - 3b - 3 = 0 \\ a + b - 3 = 0 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases}.$$

$$\therefore \text{抛物线的解析式为 } y = x^2 + 2x - 3.$$

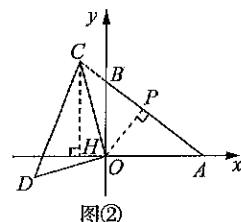
$$(II) (1) \because \text{抛物线的解析式为 } y = x^2 + 2x - 3,$$

$$\therefore \text{点 } C \text{ 的坐标为 } (0, -3).$$

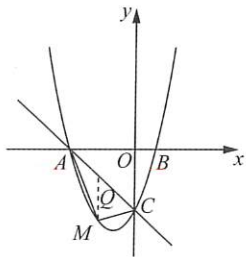
设直线 AC 的解析式为  $y = mx + n$ ,

$$\text{将 } A(-3,0), C(0,-3) \text{ 代入, 得 } \begin{cases} -3m + n = 0 \\ n = -3 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} m = -1 \\ n = -3 \end{cases}.$$

$$\therefore \text{直线 AC 的解析式为 } y = -x - 3.$$



如图,过点  $M$  作  $MQ \parallel y$  轴,交  $AC$  于点  $Q$ .



设点  $M(a, a^2+2a-3)$ , 则有  $Q(a, -a-3)$ ,

$$\therefore MQ = -a-3 - (a^2+2a-3) = -a^2-3a.$$

$$\because S_{\triangle ACM} = S_{\triangle AQM} + S_{\triangle CQM},$$

$$\therefore S_{\triangle ACM} = \frac{1}{2} \times 3 \times (-a^2-3a) = -\frac{3}{2}(a+\frac{3}{2})^2 + \frac{27}{8}.$$

$$\because -\frac{3}{2} < 0,$$

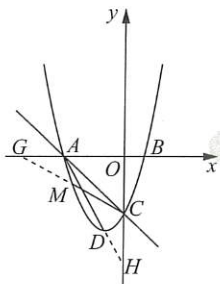
$\therefore$  当  $a = -\frac{3}{2}$  时,  $\triangle ACM$  的面积最大, 最大值为  $\frac{27}{8}$ .

此时点  $M$  的坐标为  $(-\frac{3}{2}, -\frac{15}{4})$ .

(ii)  $\because$  抛物线的解析式为  $y = x^2 + 2x - 3 = (x+1)^2 - 4$ ,

$\therefore$  点  $D$  的坐标为  $(-1, -4)$ .

如图, 延长  $CM$  交  $x$  轴于点  $G$ , 延长  $AD$  交  $y$  轴于点  $H$ ,



易得直线  $AD$  的解析式为  $y = -2x - 6$ ,

$\therefore$  当  $x = 0$  时,  $y = -6$ .

$\therefore OH = 6$ .

$\because \angle MCA = \angle CAD, \angle OCA = \angle OAC = 45^\circ$ ,

$\therefore \angle MCA + \angle OCA = \angle CAD + \angle OAC$ .

即  $\angle MCO = \angle DAO$ .

$$\text{在 } \triangle GOC \text{ 与 } \triangle HOA \text{ 中, } \begin{cases} \angle GCO = \angle HAO \\ OC = OA \\ \angle COG = \angle AOH \end{cases},$$

$\therefore \triangle GOC \cong \triangle HOA (ASA)$ .

$\therefore OG = OH = 6$ .

$\therefore$  点  $G$  的坐标为  $(-6, 0)$ .

由  $C(0, -3), G(-6, 0)$ , 得直线  $CG$  的解析式为  $y = -\frac{1}{2}x - 3$ .

将  $y = -\frac{1}{2}x - 3$  与  $y = x^2 + 2x - 3$  联立,

$$\text{得 } x^2 + 2x - 3 = -\frac{1}{2}x - 3, \text{ 即 } x^2 + \frac{5}{2}x = 0,$$

解得  $x_1 = -\frac{5}{2}, x_2 = 0$  (不符合题意, 舍去).

$$\text{当 } x = -\frac{5}{2} \text{ 时, } y = -\frac{1}{2}x - 3 = -\frac{7}{4}.$$

$\therefore$  点  $M$  的坐标为  $(-\frac{5}{2}, -\frac{7}{4})$ .

### ⑨ 2024 和平区初中学业水平考试模拟(一)

1. C 2. A 3. B 4. D 5. A 6. D 7. A 8. C 9. D 10. B

11. C  $\because$  将  $\triangle ABC$  绕点  $A$  逆时针旋转得到  $\triangle ADE$ ,

$\therefore AD = AB, \angle EAC = \angle DAB, \angle ADE = \angle ABC$ , 故 A 正确;

$\because \angle ADF + \angle ADE = 180^\circ$ ,

$\therefore \angle ADF + \angle ABC = 180^\circ$ ,

$\therefore \angle DAB + \angle DFB = 180^\circ$ ,

$\therefore \angle EAC + \angle DFB = 180^\circ$ , 故 B 正确;

由已知无法确定  $AD \parallel BC$ , 故 C 错误;

如图, 过点  $A$  分别作  $AH \perp EF$  于点  $H$ , 作  $AG \perp CB$  交  $CB$  的延长线于点  $G$ ,

$\because \angle ADE + \angle ADH = 180^\circ, \angle ABC + \angle ABG = 180^\circ$ ,

又  $\angle ADE = \angle ABC$ ,

$\therefore \angle ADH = \angle ABG$ ,

又  $\angle AHD = \angle G = 90^\circ, AD = AB$ ,

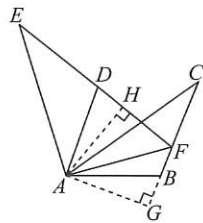
$\therefore \triangle AHD \cong \triangle AGB (AAS)$ ,

$\therefore AH = AG$ ,

$\because AH \perp EF, AG \perp FG$ ,

$\therefore AF$  平分  $\angle EFG$ ,

$\therefore \angle EFA = \angle AFB$ , 故 D 正确.



12. B  $\because$  抛物线  $y = ax^2 + bx + c$  经过点  $(-\frac{1}{2}, 0)$ , 其对称轴是直

线  $x = 1$ ,

$$\therefore \frac{1}{4}a - \frac{1}{2}b + c = 0, -\frac{b}{2a} = 1, \text{ 得 } b = -2a, c = -\frac{5}{4}a,$$

$\because$  当  $x = -1$  时,  $y = a - b + c > 1$ ,

$$\text{即 } a - (-2a) + (-\frac{5}{4}a) = \frac{7}{4}a > 1, \text{ 解得 } a > \frac{4}{7},$$

$\therefore b < 0, c < 0$ ,

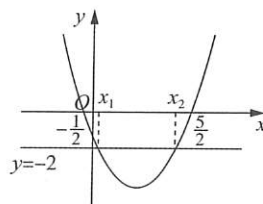
$\therefore abc > 0$ , 故①错误, ④正确;

$\because a > 0$ ,  $\therefore$  抛物线开口向上,

$\because |-3-1| > |3-1| > |0-1|$ ,

$\therefore y_1 > y_2 > y_3$ , 故②错误;

方程  $a(2x+1)(2x-5)+2=0$  的解可看作直线  $y = -2$  与抛物线  $y = a(2x+1)(2x-5)$  的交点的横坐标, 大致图象如图所示,



由图象可知  $-\frac{1}{2} < x_1 < x_2 < \frac{5}{2}$ , 故③正确.

13.  $\frac{1}{3}$  14.  $>$  15.  $\frac{1}{4}$  16.  $-4 < k < 2$

17. (I) 135 (II)  $\sqrt{5}-1$

(I)  $\because A$  为  $\widehat{BC}$  中点,

$\therefore \widehat{AB} = \widehat{AC}$ , 则  $\angle ACB = \angle ABC$ ,

$\because BC$  为半圆  $O$  的直径,

$\therefore \angle BAC = 90^\circ$ , 即  $\triangle ABC$  是等腰直角三角形,

$\therefore \angle ABC = 45^\circ$ ,

$\because$  四边形  $ABCP$  是圆的内接四边形,

$\therefore \angle APC + \angle ABC = 180^\circ$ ,

$\therefore \angle APC = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$ ;

(II)  $\because BC$  为半圆  $O$  的直径,

$\therefore \angle BPC = 90^\circ$ ,

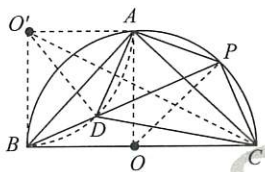
由 (I) 知  $\angle APC = 135^\circ$ ,

$\therefore \angle APD = \angle APC - \angle BPC = 45^\circ$ ,

$\because AD \perp AP$ ,

$\therefore \triangle ADP$  是等腰直角三角形, 即  $AD = AP$ ,  $\angle PAD = 90^\circ$ ,

如图, 连接  $OA$ , 将  $OA$  绕点  $A$  顺时针旋转  $90^\circ$  得到  $O'A$ , 连接  $OP, O'D, O'C$ ,



$\therefore O'A = OA$ ,

$\because \angle O'AD + \angle OAD = 90^\circ$ ,  $\angle OAP + \angle OAD = 90^\circ$ ,

$\therefore \angle O'AD = \angle OAP$ ,

在  $\triangle O'AD$  和  $\triangle OAP$  中,  $\begin{cases} O'A = OA \\ \angle O'AD = \angle OAP \\ AD = AP \end{cases}$

$\therefore \triangle O'AD \cong \triangle OAP$  (SAS),

$\therefore O'D = OP = \frac{1}{2}BC = 1$ ,

又  $P$  为  $\widehat{AC}$  上任意一点,

$\therefore$  点  $D$  在以  $O'$  为圆心, 1 为半径的  $\frac{1}{4}$  圆上运动,

$\therefore$  四边形  $O'BOA$  是正方形,

$\therefore \angle O'BC = 90^\circ$ ,  $O'B = 1$ ,

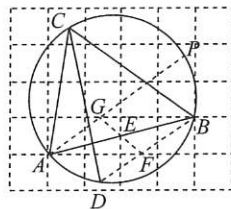
当  $O', D, C$  三点共线时,  $CD$  有最小值, 此时  $CD = O'C - O'D$ ,

$\because O'C = \sqrt{BC^2 + O'B^2} = \sqrt{5}$ ,  $O'D = 1$ ,

$\therefore CD$  的最小值为  $\sqrt{5} - 1$ .

18. (I)  $\sqrt{17}$ ;

(II) 如图, 连接  $BD$  与网格线相交于点  $F$ ; 取  $AB$  与网格线的交点  $E$ , 连接  $FE$  并延长与网格线相交于点  $G$ ; 连接  $AG$  并延长与圆相交于点  $P$ , 则点  $P$  即为所求.



19. 解: (I)  $\because x^2 + 2x + c = 0$  有两个不相等的实数根,

$$\therefore \Delta = 2^2 - 4c > 0,$$

$$\therefore c < 1.$$

$$(II) \because c = -8,$$

$$\therefore x^2 + 2x - 8 = 0,$$

因式分解, 得  $(x-2)(x+4) = 0$ ,

于是得  $x-2=0$ , 或  $x+4=0$ ,

解得  $x_1 = 2, x_2 = -4$ .

$$(III) -3.$$

20. 解: (I) 由抛物线  $y = ax^2 + bx - 1$  经过  $(2, 3), (1, 0)$  两个点,

$$\text{得} \begin{cases} 4a + 2b - 1 = 3 \\ a + b - 1 = 0 \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \end{cases},$$

$\therefore$  抛物线的解析式为  $y = x^2 - 1$ .

$$(II) (0, -1).$$

$$(III) y = (x-1)^2 - 3.$$

21. 解: (I) 如图, 连接  $OD$  与  $AB$  相交于点  $H$ .

$\because$  四边形  $ADBC$  是圆内接四边形,

$$\angle ADB = 114^\circ,$$

$$\therefore \angle ACB = 180^\circ - \angle ADB = 66^\circ.$$

$\because DM$  为  $\odot O$  的切线,

$$\therefore OD \perp DM.$$

$$\therefore \angle ODM = 90^\circ.$$

$$\because DM \parallel AB,$$

$$\therefore \angle OHA = \angle ODM = 90^\circ.$$

$$\therefore OD \perp AB.$$

$$\therefore \widehat{AD} = \widehat{BD}.$$

$$\therefore \angle ACD = \angle BCD = \frac{1}{2} \angle ACB = 33^\circ.$$

(II) 如图, 连接  $OD$ , 过点  $B$  作  $BN \perp CD$ , 垂足为点  $N$ .

$$\therefore \angle CNB = \angle BND = 90^\circ.$$

$$\because DM \parallel AB,$$

$$\therefore \angle DOB = \angle ODM = 90^\circ.$$

$$\therefore \angle DCB = \frac{1}{2} \angle DOB = 45^\circ.$$

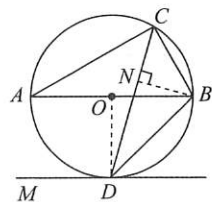
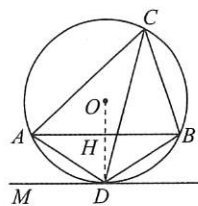
$$\because \angle CAB = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle CDB = 30^\circ.$$

$$\because AB = 4,$$

$$\therefore OD = OB = 2.$$

$$\text{在 Rt} \triangle ODB \text{ 中, } DB = \sqrt{OD^2 + OB^2} = 2\sqrt{2}.$$



在  $\text{Rt}\triangle DBN$  中,  $\angle CDB=30^\circ$ ,

$$\therefore \cos \angle BDN = \frac{DN}{DB} = \frac{\sqrt{3}}{2}, BN = \frac{1}{2}DB = \sqrt{2}.$$

$$\therefore DN = \frac{\sqrt{3}}{2}DB = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2\sqrt{2} = \sqrt{6}.$$

在  $\text{Rt}\triangle CBN$  中,  $\angle DCB=45^\circ$ ,

$$\therefore \tan \angle BCN = \frac{BN}{CN} = 1.$$

$$\therefore CN = BN = \sqrt{2}.$$

$$\therefore CD = CN + DN = \sqrt{2} + \sqrt{6}.$$

22. 解: (I) 由题意得  $\angle AEB=90^\circ$ ,

在  $\text{Rt}\triangle ABE$  中,  $\angle BAE=30^\circ$ ,  $AB=20$ ,

$$\therefore BE = \frac{1}{2}AB = 10, \text{即 } BE \text{ 的长为 } 10 \text{ m}.$$

(II) (I) 在  $\text{Rt}\triangle ABE$  中,  $\cos \angle BAE = \frac{AE}{AB}$ ,

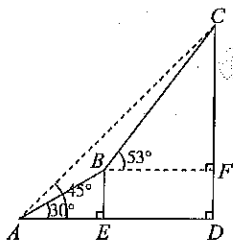
$$\therefore AE = AB \cdot \cos \angle BAE = 10\sqrt{3}.$$

在  $\text{Rt}\triangle ADC$  中, 由  $\tan \angle CAD = \frac{CD}{AD}$ ,  $CD=h$ ,  $\angle CAD=45^\circ$ ,

$$\text{得 } AD = \frac{CD}{\tan 45^\circ} = h.$$

$$\therefore DE = AD - AE = h - 10\sqrt{3}, \text{即 } DE \text{ 的长为 } (h - 10\sqrt{3}) \text{ m}.$$

(II) 如图, 过点  $B$  作  $BF \perp CD$ , 垂足为  $F$ ,



根据题意, 四边形  $BEDF$  是矩形.

$$\therefore BF = DE = h - 10\sqrt{3}, DF = BE = 10,$$

$$\text{可得 } CF = CD - DF = h - 10.$$

在  $\text{Rt}\triangle BFC$  中,  $\tan \angle CBF = \frac{CF}{BF}$ ,  $\angle CBF=53^\circ$ ,

$$\therefore CF = BF \cdot \tan \angle CBF, \text{即 } h - 10 = (h - 10\sqrt{3}) \times \tan 53^\circ.$$

$$\therefore h = \frac{10\sqrt{3} \times \tan 53^\circ - 10}{\tan 53^\circ - 1} \approx \frac{10 \times 1.7 \times 1.3 - 10}{1.3 - 1} \approx 40(\text{m}).$$

答: 建筑物  $CD$  的高度约为  $40 \text{ m}$ .

23. 解: (I)  $0.4 \quad 15 \quad 1$ .

(II) 当  $0 \leq x \leq 1$  时, 设  $y = k_1x + b_1$ ,

$$\text{将 } (0, 3) \text{ 和 } (1, 18) \text{ 代入, 得 } \begin{cases} b_1 = 3 \\ k_1 + b_1 = 18 \end{cases}, \text{解得 } \begin{cases} k_1 = 15 \\ b_1 = 3 \end{cases},$$

$$\therefore y = 15x + 3;$$

当  $1 < x \leq 2.8$  时, 设  $y = k_2x + b_2$ ,

$$\text{将 } (1, 18) \text{ 和 } (2.8, 36) \text{ 代入, 得 } \begin{cases} k_2 + b_2 = 18 \\ 2.8k_2 + b_2 = 36 \end{cases}, \text{解得 } \begin{cases} k_2 = 10 \\ b_2 = 8 \end{cases},$$

$$\therefore y = 10x + 8.$$

综上, 当  $0 \leq x \leq 1$  时,  $y = 15x + 3$ ;

当  $1 < x \leq 2.8$  时,  $y = 10x + 8$ .

(III)  $4$ .

(IV)  $1.2$  或  $2$  或  $2.6$ .

24. 解: (I)  $\because$  点  $A(2, 0)$ , 点  $B(0, 2)$ ,

$$\therefore OA = OB = 2.$$

$\because \triangle ABO$  绕点  $B$  逆时针旋转  $90^\circ$ , 得  $\triangle A'BO'$ ,

$$\therefore O'B = OB = 2, \angle O'BO = 90^\circ.$$

$$\therefore O'B = OA = 2.$$

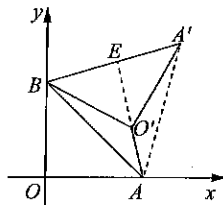
$$\therefore \angle O'BO + \angle AOB = 180^\circ,$$

$$\therefore O'B \parallel OA.$$

$\therefore$  四边形  $AOBO'$  是平行四边形.

$$\therefore AO' = OB = 2.$$

(II) 如图, 连接  $AA'$ , 延长  $AO'$  与  $A'B$  相交于点  $E$ ,



在  $\text{Rt}\triangle ABO$  中,  $AB = \sqrt{OB^2 + OA^2} = 2\sqrt{2}$ .

$\because \triangle ABO$  绕点  $B$  逆时针旋转  $60^\circ$ , 得  $\triangle A'BO'$ ,

$$\therefore \triangle A'BO' \cong \triangle ABO, \angle ABA' = 60^\circ.$$

$$\therefore A'B = AB = 2\sqrt{2},$$

$\therefore \triangle ABA'$  是等边三角形.

$$\therefore AA' = AB = 2\sqrt{2}.$$

$$\text{又 } O'A' = O'B,$$

$\therefore$  点  $O'$ ,  $A$  在  $A'B$  的垂直平分线上.

$\therefore AO'$  垂直平分  $A'B$ .

$$\therefore A'E = BE = \frac{1}{2}A'B = \sqrt{2}, \angle AEB = 90^\circ.$$

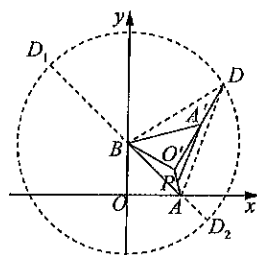
在  $\text{Rt}\triangle AEB$  中,  $AE = \sqrt{AB^2 - BE^2} = \sqrt{6}$ .

在  $\text{Rt}\triangle A'BO'$  中,  $O'E = BE = A'E = \sqrt{2}$ .

$$\therefore AO' = AE - O'E = \sqrt{6} - \sqrt{2}.$$

$$(III) \sqrt{5} - \sqrt{2} \leq A'P \leq \sqrt{5} + \sqrt{2}.$$

如图, 过点  $A$  作  $AD \parallel A'P$  交  $O'A'$  的延长线于点  $D$ , 连接  $BD$ ,



∵  $P$  为线段  $AO'$  的中点,  $AD \parallel A'P$ ,

∴  $A'$  为线段  $O'D$  的中点,

∴  $O'D = 2O'A' = 4, A'P = \frac{1}{2}AD$ ,

在  $Rt\triangle BDO'$  中,  $BD = \sqrt{O'B^2 + O'D^2} = 2\sqrt{5}$ ,

∴ 点  $D$  在以  $B$  为圆心,  $BD$  长为半径的圆上运动,

又  $AD_1 = BD_1 + AB = 2\sqrt{5} + 2\sqrt{2}$ ,

$AD_2 = BD_2 - AB = 2\sqrt{5} - 2\sqrt{2}$ ,

∴  $2\sqrt{5} - 2\sqrt{2} \leq AD \leq 2\sqrt{5} + 2\sqrt{2}$ ,

∴  $\sqrt{5} - \sqrt{2} \leq A'P \leq \sqrt{5} + \sqrt{2}$ .

25. 解: (I) ∵ 抛物线  $y = ax^2 + bx + c$  的顶点为  $Q(-1, -4)$ ,

∴  $y = a(x+1)^2 - 4$ .

∵ 抛物线与  $x$  轴相交于点  $A(1, 0)$ ,

∴  $0 = a(1+1)^2 - 4$ , 解得  $a = 1$ .

∴  $y = (x+1)^2 - 4 = x^2 + 2x - 3$ .

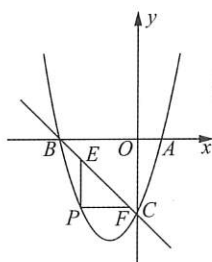
当  $y = 0$  时,  $(x+1)^2 - 4 = 0$ , 解得  $x_1 = 1, x_2 = -3$ .

∴ 点  $B$  的坐标为  $(-3, 0)$ .

当  $x = 0$  时,  $y = -3$ .

∴ 点  $C$  的坐标为  $(0, -3)$ .

(II) 如图所示,



∵ 点  $C(0, -3)$ ,

∴ 设直线  $BC$  的解析式为  $y = kx - 3$ , 把  $B(-3, 0)$  代入,

得  $-3k - 3 = 0$ , 解得  $k = -1$ .

∴ 直线  $BC$  的解析式为  $y = -x - 3$ .

∵  $B(-3, 0), C(0, -3)$ ,

∴  $OB = OC = 3$ .

∴  $\angle OBC = \angle OCB = 45^\circ$ .

∵  $PF \perp y$  轴,  $AB \perp y$  轴,

∴  $AB \parallel PF$ .

∴  $\angle BFP = \angle OBC = 45^\circ$ .

在  $Rt\triangle PEF$  中,  $\sin \angle EFP = \frac{PE}{EF}$ ,

∴  $EF = \frac{PE}{\sin \angle EFP} = \sqrt{2}PE$ .

∵ 点  $P$  的横坐标为  $t$ , 其中  $-3 < t < 0$ ,

∴  $P(t, t^2 + 2t - 3)$ .

∵  $PE \perp x$  轴,

∴ 点  $E$  的坐标为  $(t, -t - 3)$ .

∴  $EF = \sqrt{2}(-t - 3 - t^2 - 2t + 3) = \sqrt{2}(-t^2 - 3t)$

$= -\sqrt{2}(t + \frac{3}{2})^2 + \frac{9\sqrt{2}}{4}$ .

∴ 当  $t = -\frac{3}{2}$  时,  $EF$  有最大值.

此时, 点  $P$  的坐标为  $(-\frac{3}{2}, -\frac{15}{4})$ .

(III) 在点  $P$  运动过程中  $\frac{HP}{DH}$  的比值为定值 2.

∵ 抛物线  $C_2: y = mx^2 + 2mx - 1$  经过点  $A(1, 0)$ ,

可得  $0 = m + 2m - 1$ , 解得  $m = \frac{1}{3}$ .

∴ 抛物线  $C_2$  的解析式为  $y = \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x - 1$ .

令  $\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x - 1 = 0$ , 解得  $x_1 = 1, x_2 = -3$ .

∴ 抛物线  $C_2$  经过点  $B$ , 如图所示,

∵ 点  $P$  的横坐标为  $t$ , 其中  $-3 < t < 1$ ,

∴  $P(t, t^2 + 2t - 3)$ ,

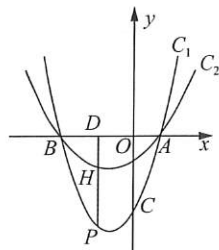
$H(t, \frac{1}{3}t^2 + \frac{2}{3}t - 1), D(t, 0)$ .

∴  $DH = -\frac{1}{3}t^2 - \frac{2}{3}t + 1, HP = \frac{1}{3}t^2 +$

$\frac{2}{3}t - 1 - t^2 - 2t + 3 = -\frac{2}{3}t^2 - \frac{4}{3}t + 2$ .

∴  $\frac{HP}{DH} = \frac{-\frac{2}{3}t^2 - \frac{4}{3}t + 2}{-\frac{1}{3}t^2 - \frac{2}{3}t + 1} = \frac{2(-\frac{1}{3}t^2 - \frac{2}{3}t + 1)}{-\frac{1}{3}t^2 - \frac{2}{3}t + 1} = 2$ .

∴ 在点  $P$  运动过程中  $\frac{HP}{DH}$  的比值为定值 2.



## ⑩ 2024 河西区初中学业水平考试模拟(一)

1. B 2. A 3. B 4. C 5. B 6. C 7. D 8. D 9. B 10. A

11. D

12. C 当  $AF$  的长是 12 cm 时,  $BC$  的长是  $(80 - 12 \times 4) \div 4 = 8$  (cm),

故①正确;

设  $AF$  的长为  $x$  cm, 则  $BC$  的长为  $(80 - 4x) \div 4 = (20 - x)$  cm,

其中  $0 < x < 20$ ,

则这两个正方形的面积之和  $S = x^2 + (20 - x)^2 = 2x^2 - 40x + 400$ ,

令  $S = 198$ , 即  $2x^2 - 40x + 400 = 198$ ,

整理, 得  $x^2 - 20x + 101 = 0$ ,

∴  $\Delta = (-20)^2 - 4 \times 101 = -4 < 0$ ,

∴ 原方程没有实数根,

∴ 这两个正方形的面积之和不能是 198  $\text{cm}^2$ , 故②错误;

令  $S = 288$ , 即  $2x^2 - 40x + 400 = 288$ ,

整理, 得  $x^2 - 20x + 56 = 0$ ,

解得  $x_1 = 10 - 2\sqrt{11}$ ,  $x_2 = 10 + 2\sqrt{11}$ ,

∴ 这两个正方形的面积之和可以是  $288 \text{ cm}^2$ , 故③正确.

13.  $m^8 n^4$  14.  $\frac{5}{6}$  15. 7 16. (1, 2) (答案不唯一)

17. (I) 40 (II)  $\sqrt{41}$

(I) ∵  $AB = AD$ ,  $CB = CD$ ,

∴  $AC$  垂直平分  $BD$ , 即  $AC \perp BD$ ,

∴ 四边形  $ABCD$  的面积为  $\frac{1}{2} AC \cdot BD = \frac{1}{2} \times 10 \times 8 = 40$ ;

(II) 如图, 取  $AD$  的中点  $M$ , 连接  $EM$ ,  $FM$ ,

∵  $E$  为  $AB$  的中点,

∴  $EM \parallel BD$ ,  $EM = \frac{1}{2} BD = \frac{1}{2} \times 8 = 4$ ,

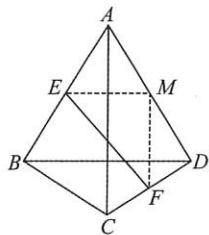
∵  $F$  为  $CD$  的中点,

∴  $FM \parallel AC$ ,  $FM = \frac{1}{2} AC = \frac{1}{2} \times 10 = 5$ ,

∵  $AC \perp BD$ ,

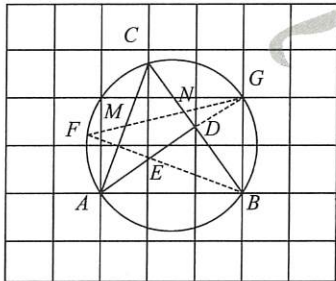
∴  $EM \perp FM$ , ∴  $\angle EMF = 90^\circ$ ,

∴  $EF = \sqrt{EM^2 + FM^2} = \sqrt{4^2 + 5^2} = \sqrt{41}$ .



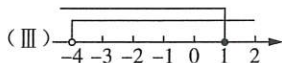
18. (I)  $2\sqrt{3}$ ;

(II) 如图, 连接  $BE$  并延长交圆于点  $F$ ; 延长  $AD$  交圆于点  $G$ ; 连接  $FG$  交  $AC$  于点  $M$ , 交  $BC$  于点  $N$ , 则点  $M, N$  即为所求.



19. 解: (I)  $x > -4$ ;

(II)  $x \leq 1$ ;



(IV)  $-4 < x \leq 1$ .

20. 解: (I) 40 25.

(II) 3 3;

观察条形统计图,

∴  $\bar{x} = \frac{1 \times 4 + 2 \times 8 + 3 \times 15 + 4 \times 10 + 5 \times 3}{40} = 3$ ,

∴ 这组数据的平均数为 3.

(III) ∵  $3 \times 400 = 1200$  (册),

∴ 根据统计的数据, 估计暑期该校七年级学生读书的总册数为 1200 册.

21. 解: (I) ∵ 直径  $BD \perp AC$  于点  $E$ ,

∴  $\widehat{AD} = \widehat{CD}$ ,

∴  $\angle ABD = \angle CBD = \frac{1}{2} \angle ABC = 55^\circ$ ,

∴  $\angle BAE = 90^\circ - \angle ABD = 90^\circ - 55^\circ = 35^\circ$ ,

∴  $\widehat{CD} = \widehat{CD}$ ,

∴  $\angle CAD = \angle CBD = 55^\circ$ .

(II) 如图, 连接  $OC$ ,

由 (I) 知  $\widehat{AD} = \widehat{CD}$ ,

∴  $AD = CD$ .

又  $AC = AD$ ,

∴  $\triangle ACD$  是等边三角形.

∴  $\angle CAD = 60^\circ$ ,

∴  $\angle FBC = \angle ADC = 60^\circ$ ,

∴  $\widehat{CD} = \widehat{CD}$ ,

∴  $\angle CBD = \angle CAD = 60^\circ$ .

∵  $OB = OC$ ,

∴  $\triangle BOC$  是等边三角形,

∴  $BC = OC$ ,  $\angle BCO = 60^\circ$ .

∵  $FC$  切  $\odot O$  于点  $C$ ,

∴  $\angle FCO = 90^\circ$ .

∴  $\angle FCB = 90^\circ - \angle BCO = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$ ,

∴  $\angle F = 180^\circ - \angle FBC - \angle FCB = 180^\circ - 60^\circ - 30^\circ = 90^\circ$ ,

∴  $BC = 2BF = 4$ .

∴  $OC = BC = 4$ , 即  $\odot O$  的半径为 4.

22. 解: 如图, 过点  $A$  作  $AG \perp BC$  于点  $G$ ,  $AF \perp CE$  于点  $F$ ,

依题意,  $\angle FCG = \angle AGC = \angle AFC = 90^\circ$ ,

∴ 四边形  $AFCG$  是矩形,

∴  $AF = GC$ ,  $AG = FC$ ,

在  $\text{Rt}\triangle ABG$  中,  $\angle BAG = 16^\circ$ ,  $AB = 5$ ,

∴  $BG = AB \cdot \sin \angle BAG = 5 \times \sin 16^\circ \approx 5 \times 0.28 = 1.4$ ,

$AG = AB \cdot \cos \angle BAG = 5 \times \cos 16^\circ \approx 5 \times 0.96 = 4.8$ ,

在  $\text{Rt}\triangle ADF$  中,  $\angle ADF = 45^\circ$ ,

∴  $AF = DF \cdot \tan \angle ADF = DF \cdot \tan 45^\circ = DF$ ,

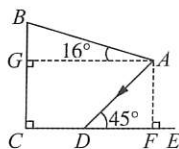
∴  $BC = 4$ ,

∴  $GC = BC - BG = 4 - 1.4 = 2.6$ ,

∴  $DF = 2.6$ ,

∴  $CD = FC - DF = 4.8 - 2.6 = 2.2$  (米).

答: 阴影  $CD$  的长约为 2.2 米.



23. 解: (I) (i) 0.12 1.2 0.6;

(ii) 0.03;

(iii) 当  $40 \leq x \leq 50$  时,  $y = -0.06x + 3.6$ ;

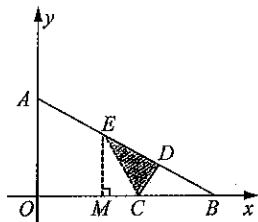
当  $50 < x \leq 60$  时,  $y = 0.6$ .

(II) 0.48 km.

24. 解: (I) 在  $\text{Rt}\triangle AOB$  中, 点  $A(0, 2)$ ,  $\angle ABO = 30^\circ$ ,

$$\therefore OA = 2, OB = \frac{OA}{\tan \angle ABO} = 2\sqrt{3},$$

如图, 过点  $E$  作  $EM \perp OB$  于点  $M$ ,



由折叠可知  $\triangle BCD \cong \triangle ECD$ ,

$$\therefore EC = BC = 1, \angle ECD = \angle BCD = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle OCE = 180^\circ - \angle ECD - \angle BCD = 180^\circ - 60^\circ - 60^\circ = 60^\circ,$$

$\therefore$  在  $\text{Rt}\triangle ECM$  中,

$$CM = EC \cdot \cos 60^\circ = \frac{1}{2}, EM = EC \cdot \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\therefore OM = OB - BC - CM = 2\sqrt{3} - 1 - \frac{1}{2} = 2\sqrt{3} - \frac{3}{2},$$

$$\therefore \text{点 } E \text{ 的坐标为 } (2\sqrt{3} - \frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}).$$

(II)  $\because EC = BC = t$ ,

$$\therefore OC = 2\sqrt{3} - t,$$

由(I)可知, 在  $\text{Rt}\triangle OCF$  中,  $\angle OCF = 60^\circ$ ,

$$\therefore \angle OFC = 90^\circ - \angle OCF = 30^\circ,$$

$$\therefore FC = 2OC = 4\sqrt{3} - 2t,$$

$$\therefore FE = EC - FC = t - (4\sqrt{3} - 2t) = 3t - 4\sqrt{3}, \text{ 其中 } t \text{ 的取值范}$$

$$\text{围是 } \frac{4\sqrt{3}}{3} < t < 2\sqrt{3}.$$

$$(III) \frac{4\sqrt{3}}{5}.$$

① 当  $0 < t \leq \frac{4\sqrt{3}}{3}$  时, 折叠后重合部分为  $\triangle CDE$ ,

在  $\text{Rt}\triangle CDE$  中,  $\angle ECD = \angle BCD = 60^\circ$ ,  $EC = BC = t$ ,

$$\therefore DE = EC \cdot \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}t, DC = EC \cdot \cos 60^\circ = \frac{1}{2}t,$$

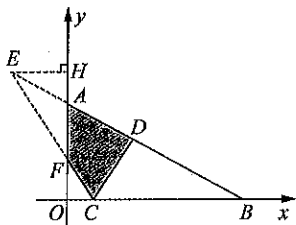
$\therefore$  折叠后重合部分的面积为

$$S_{\triangle CDE} = \frac{1}{2} DE \cdot DC = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}t \times \frac{1}{2}t = \frac{\sqrt{3}}{8}t^2,$$

$$\therefore \text{当 } t = \frac{4\sqrt{3}}{3} \text{ 时, } S_{\triangle CDE} \text{ 有最大值为 } \frac{2\sqrt{3}}{3},$$

② 当  $\frac{4\sqrt{3}}{3} < t < 2\sqrt{3}$  时, 折叠后重合部分为四边形  $ADCF$ ,

如图, 过点  $E$  作  $EH \perp y$  轴于点  $H$ ,



由(II)可知  $FE = 3t - 4\sqrt{3}$ ,  $\angle EFH = \angle OFC = 30^\circ$ ,

$$OC = 2\sqrt{3} - t,$$

$$\therefore EH = \frac{1}{2} FE = \frac{3t - 4\sqrt{3}}{2}, OF = \sqrt{3} OC = 6 - \sqrt{3}t,$$

$$\therefore AF = OA - OF = 2 - (6 - \sqrt{3}t) = \sqrt{3}t - 4,$$

$$\therefore \text{折叠后重合部分的面积为 } S_{\text{四边形 } ADCF} = S_{\triangle CDE} - S_{\triangle AEF}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{8}t^2 - \frac{1}{2} \times (\sqrt{3}t - 4) \times \frac{3t - 4\sqrt{3}}{2} = -\frac{5\sqrt{3}}{8}t^2 + 6t - 4\sqrt{3}$$

$$= -\frac{5\sqrt{3}}{8}(t - \frac{8\sqrt{3}}{5})^2 + \frac{4\sqrt{3}}{5},$$

$$\therefore \text{当 } t = \frac{8\sqrt{3}}{5} \text{ 时, } S_{\text{四边形 } ADCF} \text{ 有最大值为 } \frac{4\sqrt{3}}{5},$$

$$\therefore \frac{2\sqrt{3}}{3} < \frac{4\sqrt{3}}{5},$$

$$\therefore \text{折叠后重合部分面积的最大值为 } \frac{4\sqrt{3}}{5}.$$

25. (I) 解:  $\because$  点  $P$  是直线  $l: y = -2x - 2$  上的点, 其横坐标为  $-2$ ,

$$\therefore y = -2 \times (-2) - 2 = 2.$$

$$\therefore P(-2, 2),$$

(I) 当直线  $m \parallel x$  轴时, 直线  $m$  的解析式为  $y = 2$ ,

$\therefore$  点  $A, B$  的纵坐标为  $2$ .

$$\text{由 } 2 = x^2, \text{ 得 } x = \pm\sqrt{2},$$

又点  $A$  在点  $B$  的左侧,

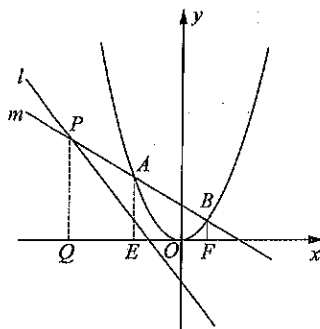
$$\therefore \text{点 } A \text{ 的坐标为 } (-\sqrt{2}, 2), \text{ 点 } B \text{ 的坐标为 } (\sqrt{2}, 2).$$

(II) 设点  $A(m, m^2)$ , 点  $B(p, p^2)$ ,

$\because$  直线  $l$  与抛物线  $y = x^2$  没有交点, 点  $P$  应在点  $A$  的左侧,

$$\therefore m > -2,$$

如图, 分别过点  $P, A, B$  作  $x$  轴的垂线, 垂足分别为点  $Q, E, F$ ,



则  $BF \parallel AE \parallel PQ$ ,

$$\text{由 } PA = AB, \text{ 得 } QE = EF, AE = \frac{1}{2}(PQ + BF),$$

$$\therefore m + 2 = p - m, m^2 = \frac{1}{2}(2 + p^2),$$

$$\text{即 } p = 2m + 2, p^2 = 2m^2 + 2,$$

$$\therefore (2m + 2)^2 = 2m^2 + 2, \text{ 即 } m^2 + 4m + 3 = 0,$$

$$\text{解得 } m_1 = -1, m_2 = -3 (\text{舍}),$$

$$\therefore p=2m+2=0.$$

$\therefore$  点  $A$  的坐标为  $(-1, 1)$ , 点  $B$  的坐标为  $(0, 0)$ .

(II) 证明: 设点  $P(a, -2a-2)$ , 点  $A(m, m^2)$ , 点  $B(p, p^2)$ ,

同(II)可得  $m-a=p-m, m^2=\frac{1}{2}(-2a-2+p^2)$ ,

$$\text{即 } p=2m-a, p^2=2m^2+2a+2,$$

$$\therefore (2m-a)^2=2m^2+2a+2,$$

整理得关于  $m$  的一元二次方程  $2m^2-4am+a^2-2a-2=0$ ,

$$\text{其中 } \Delta=16a^2-8(a^2-2a-2)=8a^2+16a+16$$

$$=8(a+1)^2+8>0,$$

$\therefore$  无论  $a$  为何值, 关于  $m$  的方程总有两个不相等的实数解, 即对于直线  $l$  上任意给定的一点  $P$ , 在抛物线上都存在点  $A$ , 使  $PA=AB$  成立.

### ⑪ 2024 南开区初中学业水平考试模拟(一)

1. A 2. D 3. C 4. B 5. A 6. A 7. D 8. D 9. C 10. B

11. C

12. D 如图, 建立平面直角坐标系,

根据题意得  $AB=4, OC=2$ ,

由对称性知  $OA=OB=\frac{1}{2}AB=2$ ,

$$\therefore A(-2, 0), B(2, 0), C(0, 2),$$

设抛物线的解析式为  $y=ax^2+2$ ,

将  $B(2, 0)$  代入, 得  $0=4a+2$ , 解得  $a=-\frac{1}{2}$ ,

$$\therefore \text{抛物线的解析式为 } y=-\frac{1}{2}x^2+2.$$

当水面宽度为 5 米时,  $x=\frac{5}{2}$ ,

$$\therefore y=-\frac{1}{2}\times(\frac{5}{2})^2+2=-1.125,$$

$\therefore$  水面下降了 1.125 m, 故①正确;

当水面下降 1 m 时,  $y=-1$ ,

$$\text{即 } -\frac{1}{2}x^2+2=-1, \text{ 解得 } x=\sqrt{6}, \text{ 或 } x=-\sqrt{6},$$

$\therefore$  水面宽度为  $2\sqrt{6}$  m, 故②正确;

当水面下降 2 m 时,  $y=-2$ ,

$$\text{即 } -\frac{1}{2}x^2+2=-2, \text{ 解得 } x=2\sqrt{2}, \text{ 或 } x=-2\sqrt{2},$$

此时水面宽度为  $4\sqrt{2}$  m,

$\therefore$  水面宽度增加了  $(4\sqrt{2}-4)$  m, 故③正确.

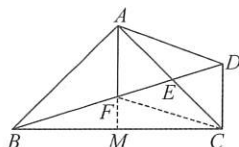
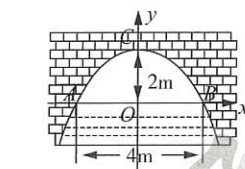
$$13. -9a^2 \quad 14. \frac{2}{5} \quad 15. -11 \quad 16. y=\frac{1}{2}x+1$$

17. 5 如图, 延长  $AF$  交  $BC$  于点  $M$ , 连接  $CF$ ,

$\because CD \perp BC, F$  为线段  $BD$  的中点,

$$\therefore CF=\frac{1}{2}BD=BF,$$

$\because \triangle ABC$  是等腰直角三角形,



$$\therefore AB=AC,$$

$\therefore AM$  是线段  $BC$  的垂直平分线,

$$\therefore AM \perp BC,$$

$$\therefore BM=CM=AM, AM \parallel CD,$$

$\therefore MF$  为  $\triangle BCD$  的中位线,

$$\therefore MF=\frac{1}{2}CD=\frac{\sqrt{10}}{2},$$

$$\therefore CM=AM=AF+MF=\frac{3\sqrt{10}}{2},$$

$$\therefore CF=\sqrt{MF^2+CM^2}=\sqrt{(\frac{\sqrt{10}}{2})^2+(\frac{3\sqrt{10}}{2})^2}=5,$$

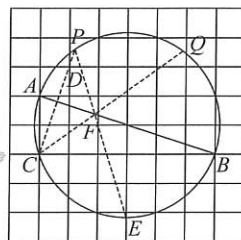
$$\therefore AF \parallel CD, AF=CD,$$

$\therefore$  四边形  $AFCD$  是平行四边形,

$$\therefore AD=CF=5.$$

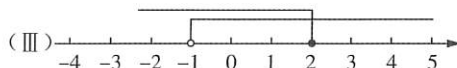
18. (I)  $2\sqrt{10}$ ;

(II) 如图, 取格点  $D$ , 连接  $CD$  并延长交  $\odot O$  于点  $P$ ; 取格线与  $\odot O$  的交点  $E$ , 连接  $PE$  交  $AB$  于点  $F$ ; 连接  $CF$  并延长, 与  $\odot O$  交于点  $Q$ , 则点  $P, Q$  即为所求.



19. 解: (I)  $x > -1$ ;

(II)  $x \leq 2$ ;



(IV)  $-1 < x \leq 2$ .

20. 解: (I) 100 28.

(II) 观察条形统计图,

$$\therefore \bar{x}=\frac{2 \times 8+3 \times 28+4 \times 42+5 \times 22}{8+28+42+22}=3.78,$$

$\therefore$  这组数据的平均数为 3.78.

$\because$  在这组数据中, 4 出现了 42 次, 出现的次数最多,

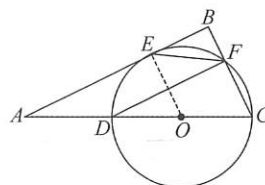
$\therefore$  这组数据的众数为 4.

$\because$  将这组数据按从小到大的顺序排列, 其中处于中间的两个

数都是 4, 有  $\frac{4+4}{2}=4$ ,

$\therefore$  这组数据的中位数为 4.

21. 解: (I) 如图, 连接  $OE$ ,



∵ CD 为 ⊙O 的直径,

∴ ∠DFC = 90°,

∵ DF // AB,

∴ ∠B = ∠DFC = 90°,

∵ AB 与 ⊙O 相切于点 E, 且 OE 为半径,

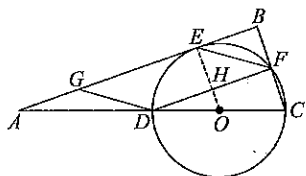
∴ OE ⊥ AB, 即 ∠OEA = 90°,

∴ ∠EOA = 90° - ∠A = 90° - 26° = 64°,

∴  $\widehat{DE} = \widehat{DE}$ ,

∴ ∠DFE =  $\frac{1}{2}$  ∠EOD = 32°.

(II) 如图, 连接 OE, OE 与 DF 交于点 H, 设 HF = m, OD = R,



由(I)可知 ∠B = ∠BFD = ∠BEO = 90°,

∴ 四边形 EHF B 为矩形,

∴ ∠EHF = ∠DHO = 90°, 且 EB = HF = m,

∵ OE ⊥ DF, 且 OE 为半径,

∴ DF = 2DH = 2HF = 2m,

∵ DF // AB, 且 DG // EF,

∴ 四边形 DFE G 为平行四边形,

∴ GE = DF = 2m,

∵ BF = CF, 且 DF // AB,

∴ AB = 2DF = 4m, AD = CD = 2R,

∴ AG = m =  $\sqrt{6}$ , AO = 3R,

在 Rt△AEO 中, AE = 3m =  $3\sqrt{6}$ ,  $AE^2 + OE^2 = AO^2$ ,

∴  $(3\sqrt{6})^2 + R^2 = (3R)^2$ , 解得  $R = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ ,

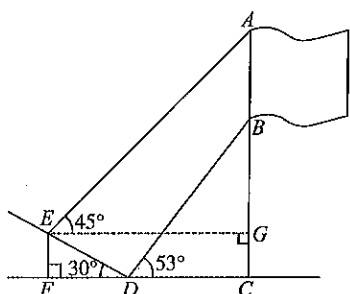
即 ⊙O 的半径为  $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ .

22. 解:(I) 在 Rt△DEF 中, ∠EDF = 30°, DE = 2,

∴ EF =  $\frac{1}{2}$  DE = 1.

∴ 斜坡的高度 EF 的值为 1 m.

(II) 如图, 过点 E 作 EG ⊥ AC, 垂足为 G,



在 Rt△DEF 中,  $\cos \angle EDF = \frac{DF}{DE}$ ,

∴ DF = DE · cos ∠EDF = 2 × cos 30° =  $\sqrt{3}$ ,

根据题意, ∠EGC = ∠EFC = ∠FCG = 90°,

∴ 四边形 EFCG 为矩形,

∴ CG = EF = 1, EG = FC = DF + CD =  $\sqrt{3} + 6$ ,

在 Rt△AEG 中, ∠AEG = 45°,

∴ AG = EG =  $\sqrt{3} + 6$ ,

在 Rt△BCD 中, ∠BDC = 53°,  $\tan \angle BDC = \frac{BC}{CD}$ ,

∴ BC = CD · tan 53° = 6 tan 53°,

∴ AB = AG + CG - BC =  $\sqrt{3} + 6 + 1 - 6 \tan 53^\circ \approx 1.73 + 7 - 6 \times 1.33 \approx 0.8$  (m).

答: 旗面宽 AB 的值约为 0.8 m.

23. 解:(I) 90 360.

(II) (I) 1 640;

(II) 11;

(III) 80;

(IV) 当  $0 \leq x < 4$  时,  $y = 90x$ ;

当  $4 \leq x < 15$  时,  $y = 360$ ;

当  $15 \leq x < 35$  时,  $y = 82x - 870$ .

(III) 360 或  $\frac{6 \times 120}{41}$  或 1 920.

24. 解:(I) OE = BF.

(II) 如图 1, 过点 N 作 NH ⊥ OA, 垂足为 H,

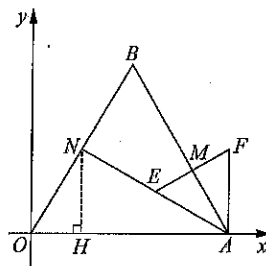


图 1

依题意可知, △OAB 和 △EAF 为等边三角形, 且点 A ( $4\sqrt{3}$ , 0),

∴ OA = AB =  $4\sqrt{3}$ , ∠AOB = ∠OAB = ∠EAF = 60°,

∴ AB ⊥ EF,

∴ ∠BAF = ∠EAB = 30°,

即 △CAD 旋转的角度为 30°.

∴ AN ⊥ OB,

∴ ON =  $\frac{1}{2}$  OA =  $2\sqrt{3}$ ,

在 Rt△ONH 中, ∠ONH = 90° - ∠AOB = 30°,

∴ OH =  $\frac{1}{2}$  ON =  $\sqrt{3}$ , NH =  $\sqrt{ON^2 - OH^2} = 3$ ,

故点 N 的坐标为 ( $\sqrt{3}$ , 3).

(Ⅲ)(1) ∵ 点  $A(4\sqrt{3}, 0)$ , 点  $C(4\sqrt{3}-3, 0)$ ,

∴  $AC=3$ , ∴  $A'E'=3$ ,

如图 2, 当  $t=3$  时,  $\triangle E'A'F'$  与  $\triangle ABN$  重叠部分为等边三角形, 可知  $S=\frac{9\sqrt{3}}{4}$ ;

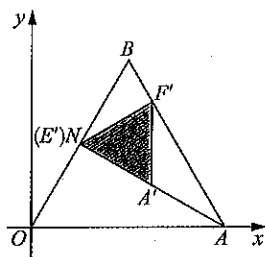


图 2

如图 3, 当  $\frac{9}{2} \leq t < 6$  时,  $A'F'$  与  $OB$  相交于点  $S$ ,  $\triangle E'A'F'$  与  $\triangle ABN$  重叠部分为  $Rt\triangle A'NS$ ,

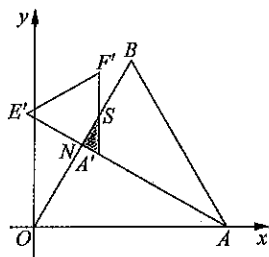


图 3

在  $Rt\triangle OAN$  中,  $AN = \sqrt{OA^2 - ON^2} = 6$ ,

∴  $A'N = AN - AA' = 6 - t$ ,

∵  $\triangle E'A'F'$  为等边三角形,

∴  $\angle NA'S = 60^\circ$ , 即  $\tan 60^\circ = \frac{NS}{A'N} = \sqrt{3}$ ,

∴  $NS = \sqrt{3}A'N = \sqrt{3}(6-t)$ ,

∴  $S = \frac{1}{2}A'N \cdot NS = \frac{\sqrt{3}}{2}(t-6)^2$ .

综上所述,  $S = \begin{cases} \frac{9\sqrt{3}}{4}, & t=3 \\ \frac{\sqrt{3}}{2}(t-6)^2, & \frac{9}{2} \leq t < 6 \end{cases}$

(Ⅱ)  $0 < t \leq 3 - \sqrt{6}$  或  $3 + \frac{\sqrt{6}}{2} \leq t < 6$ .

① 当  $0 < t < 3$  时,  $\triangle E'A'F'$  与  $\triangle ABN$  重叠部分为四边形  $A'E'PQ$ , 如图 4 所示,

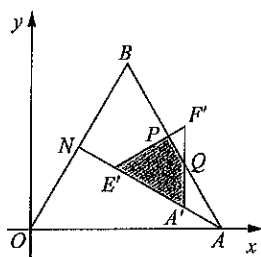


图 4

此时  $AE' = AA' + A'E' = t + 3$ ,  $PE' = \frac{1}{2}AE' = \frac{1}{2}(t+3)$ ,

∴  $PF' = 3 - \frac{1}{2}(t+3) = \frac{1}{2}(3-t)$ ,

∴  $\angle PF'Q = 60^\circ$ ,

∴  $PQ = PF' \cdot \tan 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}(3-t)$ ,

∴  $S_{\triangle PF'Q} = \frac{1}{2}PQ \cdot PF' = \frac{\sqrt{3}}{8}(3-t)^2$ ,

∴  $S = S_{\triangle E'A'F'} - S_{\triangle PF'Q} = \frac{9\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{8}(3-t)^2$ ,

令  $S \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$ , 即  $\frac{9\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{8}(3-t)^2 \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$ ,

解得  $t \leq 3 - \sqrt{6}$ , 或  $t \geq 3 + \sqrt{6}$ ,

∴  $0 < t \leq 3 - \sqrt{6}$ ,

② 当  $t=3$  时, 由(1)可知  $S = \frac{9\sqrt{3}}{4} > \frac{3\sqrt{3}}{2}$ , 舍去;

③ 当  $3 < t < \frac{9}{2}$  时,  $\triangle E'A'F'$  与  $\triangle ABN$  重叠部分为四边形  $A'F'MN$ , 如图 5 所示,

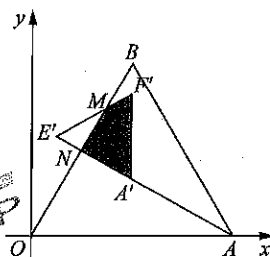


图 5

此时  $E'N = AA' + A'E' - AN = t + 3 - 6 = t - 3$ ,

同理, 得  $S_{\triangle E'MN} = \frac{\sqrt{3}}{2}(t-3)^2$ ,

∴  $S = S_{\triangle E'A'F'} - S_{\triangle E'MN} = \frac{9\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2}(t-3)^2$ ,

令  $S \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$ , 即  $\frac{9\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2}(t-3)^2 \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$ ,

解得  $t \leq 3 - \frac{\sqrt{6}}{2}$ , 或  $t \geq 3 + \frac{\sqrt{6}}{2}$ ,

∴  $3 + \frac{\sqrt{6}}{2} \leq t < \frac{9}{2}$ ;

④ 当  $\frac{9}{2} \leq t < 6$  时, 由(1)可知  $S = \frac{\sqrt{3}}{2}(t-6)^2$ ,

当  $t = \frac{9}{2}$  时,  $S$  取得最大值为  $\frac{9\sqrt{3}}{8} < \frac{3\sqrt{3}}{2}$ ,

∴  $\frac{9}{2} \leq t < 6$  符合题意.

综上所述,  $0 < t \leq 3 - \sqrt{6}$  或  $3 + \frac{\sqrt{6}}{2} \leq t < 6$ .

25. 解: (I) 当  $m = \sqrt{3}$  时, 点  $B(\sqrt{3}, -3 + \frac{\sqrt{3}}{2})$ ,

将  $A(0, \frac{\sqrt{3}}{2})$ ,  $B(\sqrt{3}, -3 + \frac{\sqrt{3}}{2})$  代入  $y = -2x^2 + bx + c$ ,

$$\begin{cases} c = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -2 \times (\sqrt{3})^2 + \sqrt{3}b + c = -3 + \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} b = \sqrt{3} \\ c = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

∴ 抛物线的解析式为  $y = -2x^2 + \sqrt{3}x + \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,

$$\because y = -2x^2 + \sqrt{3}x + \frac{\sqrt{3}}{2} = -2(x - \frac{\sqrt{3}}{4})^2 + \frac{3+4\sqrt{3}}{8},$$

∴ 顶点坐标为  $(\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{3+4\sqrt{3}}{8})$ .

(II) 已知  $A(0, \frac{\sqrt{3}}{2})$ ,

当  $b = 4\sqrt{3}$  时, 抛物线的解析式为  $y = -2x^2 + 4\sqrt{3}x + \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,

将点  $B(m, -\sqrt{3}m + \frac{\sqrt{3}}{2})$  代入,

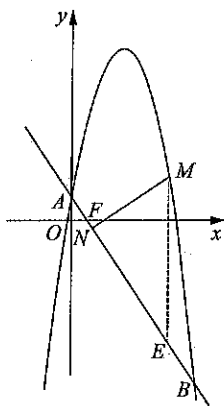
$$\text{得 } -2m^2 + 4\sqrt{3}m + \frac{\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3}m + \frac{\sqrt{3}}{2},$$

解得  $m = 0$  或  $m = \frac{5\sqrt{3}}{2}$ ,

$$\because m > \frac{\sqrt{3}}{2}, \therefore m = \frac{5\sqrt{3}}{2},$$

$$\therefore B(\frac{5\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}-15}{2}),$$

如图, 过点  $M$  作  $ME \parallel y$  轴, 与直线  $AB$  交于点  $E$ , 设直线  $AB$  与  $x$  轴交于点  $F$ ,



设直线  $AB$  的解析式为  $y = kx + a$ ,

将  $A(0, \frac{\sqrt{3}}{2})$ ,  $B(\frac{5\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}-15}{2})$  代入, 得  $k = -\sqrt{3}$ ,  $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,

∴ 直线  $AB$  的解析式为  $y = -\sqrt{3}x + \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,

$$\therefore F(\frac{1}{2}, 0),$$

$$\therefore OF = \frac{1}{2}, OA = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{易得 } \tan \angle OAF = \frac{OF}{OA} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

可知  $\angle OAF = 30^\circ$ ,

$\because ME \parallel y$  轴,

$$\therefore \angle FEM = \angle OAF = 30^\circ, \text{即 } MN = \frac{1}{2}ME,$$

设  $M(t, -2t^2 + 4\sqrt{3}t + \frac{\sqrt{3}}{2})$ , 其中  $0 < t < \frac{5\sqrt{3}}{2}$ ,

$$\text{则 } E(t, -\sqrt{3}t + \frac{\sqrt{3}}{2}),$$

$$\therefore ME = -2t^2 + 4\sqrt{3}t + \frac{\sqrt{3}}{2} - (-\sqrt{3}t + \frac{\sqrt{3}}{2}) = -2t^2 + 5\sqrt{3}t$$

$$= -2(t - \frac{5\sqrt{3}}{4})^2 + \frac{75}{8},$$

∴ 当  $t = \frac{5\sqrt{3}}{4}$  时,  $ME$  有最大值为  $\frac{75}{8}$ ,

即当点  $M$  的坐标为  $(\frac{5\sqrt{3}}{4}, \frac{45+4\sqrt{3}}{8})$  时,  $MN$  有最大值为  $\frac{75}{16}$ .

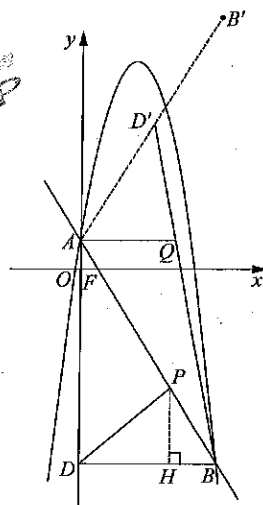
(III)  $b = 8 - \sqrt{3}$ , 点  $P$  的坐标为  $(\frac{8}{3}, -\frac{13\sqrt{3}}{6})$ .

已知点  $A(0, \frac{\sqrt{3}}{2})$  和点  $Q(n, \frac{\sqrt{3}}{2})$ , 点  $B(m, -\sqrt{3}m + \frac{\sqrt{3}}{2})$  和

点  $D(0, -\sqrt{3}m + \frac{\sqrt{3}}{2})$ ,

$\therefore AQ \parallel BD \parallel x$  轴,  $AQ = n$ ,  $BD = m$ ,

如图, 作  $AB$  关于  $AQ$  对称的线段  $AB'$ , 在  $AB'$  上截取  $AD' = BD = m$ ,



$$\because BP = n, \therefore AQ = BP,$$

由对称的性质可知  $\angle D'AQ = \angle BAQ$ ,

$$\because AQ \parallel BD, \therefore \angle BAQ = \angle DBP,$$

$$\therefore \angle D'AQ = \angle DBP,$$

$$\therefore \triangle D'AQ \cong \triangle DBP (\text{SAS}),$$

$$\therefore D'Q = DP,$$

$$\therefore DP + BQ = D'Q + BQ,$$

当点  $D', Q, B$  在同一直线上时,  $DP + BQ$  取得最小值,

$$\text{此时 } DP + BQ = BD' = 4\sqrt{7}.$$

由 (II) 得  $\angle OAF = 30^\circ$ ,

$$\therefore \angle D'AQ = \angle BAQ = \angle DBP = 60^\circ,$$

$$\text{易得点 } D'(\frac{m}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}m + \frac{\sqrt{3}}{2}),$$

$$\therefore BD'^2 = (m - \frac{m}{2})^2 + [(-\sqrt{3}m + \frac{\sqrt{3}}{2}) - (\frac{\sqrt{3}}{2}m + \frac{\sqrt{3}}{2})]^2$$

$$= (4\sqrt{7})^2,$$

解得  $m=4$  (负值舍),

$$\therefore B(4, -\frac{7\sqrt{3}}{2}), D'(2, \frac{5\sqrt{3}}{2}),$$

$$\text{将点 } B(4, -\frac{7\sqrt{3}}{2}) \text{ 代入 } y = -2x^2 + bx + \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\text{得 } -2 \times 4^2 + 4b + \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{7\sqrt{3}}{2},$$

$$\therefore b = 8 - \sqrt{3}.$$

$$\text{易得直线 } BD' \text{ 的解析式为 } y = -3\sqrt{3}x + \frac{17\sqrt{3}}{2},$$

$$\text{将点 } Q(n, \frac{\sqrt{3}}{2}) \text{ 代入, 得 } -3\sqrt{3}n + \frac{17\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ 解得 } n = \frac{8}{3},$$

$$\therefore BP = n = \frac{8}{3},$$

过点  $P$  作  $PH \perp BD$  于  $H$ , 则  $\angle BPH = 90^\circ - \angle DBP = 30^\circ$ ,

$$\therefore BH = \frac{1}{2}BP = \frac{4}{3},$$

$$\therefore DH = BD - BH = 4 - \frac{4}{3} = \frac{8}{3},$$

$$\therefore \text{点 } P \text{ 的横坐标为 } \frac{8}{3},$$

$$\text{将 } x = \frac{8}{3} \text{ 代入直线 } AB \text{ 的解析式 } y = -\sqrt{3}x + \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ 中,}$$

$$\text{得 } y = -\sqrt{3} \times \frac{8}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{13\sqrt{3}}{6},$$

$$\therefore \text{点 } P \text{ 的坐标为 } (\frac{8}{3}, -\frac{13\sqrt{3}}{6}).$$

## ⑫2024 河北省初中学业水平考试模拟(一)

1. A 2. D 3. A 4. C 5. C 6. B 7. D 8. B 9. A 10. D

11. C

12. C 如图, 设切割出的矩形为  $AFHG$ ,

$\therefore$  四边形  $AFHG$  为矩形,

$\therefore \angle HFD = 90^\circ, AG = FH$ ,

$\therefore$  四边形  $ABCD$  为菱形,

$\angle BAD = 135^\circ$ ,

$\therefore \angle B = \angle D = 45^\circ, AB = AD = 50$ ,

$\therefore \angle FHD = \angle D = 45^\circ$ ,

$\therefore FH = FD$ ,

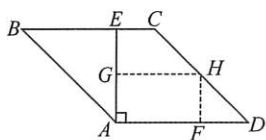
由题意得  $AG = FH = FD = x$ ,

$\therefore AF = 50 - x$ ,

$\therefore y = x(50 - x) = -x^2 + 50x$ ,

$\therefore AD \parallel BC, AE \perp AD$ ,

$\therefore AE \perp BC$ ,



在  $Rt\triangle ABE$  中,  $\angle B = 45^\circ, \sin B = \frac{AE}{AB}$ ,

$$\therefore AE = AB \cdot \sin B = 50 \times \sin 45^\circ = 25\sqrt{2},$$

$\therefore x$  的取值范围为  $0 < x \leq 25\sqrt{2}$ ,

$\therefore y$  与  $x$  之间的函数解析式为  $y = -x^2 + 50x (0 < x \leq 25\sqrt{2})$ ,

故①正确;

$\therefore \angle B = 45^\circ, \angle AEB = 90^\circ$ ,

$\therefore \angle BAE = 45^\circ$ ,

$\therefore BE = AE = 25\sqrt{2}$ ,

$$\therefore S_{\triangle BAE} = \frac{1}{2} \times 25\sqrt{2} \times 25\sqrt{2} = 625,$$

$$\therefore S_{\text{四边形 } AECD} = S_{\text{菱形 } ABCD} - S_{\triangle BAE} = 50 \times 25\sqrt{2} - 625$$

$$= 1250\sqrt{2} - 625 (\text{cm}^2),$$

当  $x = 10$  时,  $y = -10^2 + 50 \times 10 = 400 (\text{cm}^2)$ ,

$\therefore$  四边形  $AECD$  剩余的面积为  $1250\sqrt{2} - 625 - 400 = (1250\sqrt{2} - 1025) \text{cm}^2$ , 故②错误;

$\therefore y = -x^2 + 50x = -(x - 25)^2 + 625$ ,

$\therefore$  当  $x = 25$  时,  $y$  有最大值 625,

$\therefore$  此块矩形材料出售总价的最大值为  $625 \times 1.5 = 937.5$  (元),

故③正确.

$$13. \frac{1}{2} \quad 14. -8a^6b^9 \quad 15. 5 \quad 16. -\frac{1}{2}$$

$$17. (I) 4\sqrt{3} \quad (II) 37 - 6\sqrt{3}$$

(I) 如图 1, 过点  $F$  作  $FG \perp AD$ , 交  $AD$  的延长线于点  $G$ ,

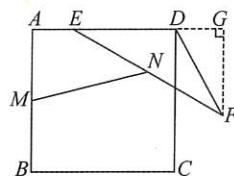


图1

$\therefore$  四边形  $ABCD$  是边长为 6 的正方形,

$\therefore AD = 6$ ,

$$\therefore AE = \frac{1}{3}AD = 2, FD = ED = AD - AE = 4,$$

$\therefore \angle EDF = 120^\circ$ ,

$\therefore \angle GDF = 60^\circ, \angle DFG = 30^\circ$ ,

$$\therefore DG = \frac{1}{2}FD = 2, FG = \sqrt{FD^2 - DG^2} = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore S_{\triangle EDF} = \frac{1}{2}ED \cdot FG = 4\sqrt{3};$$

(II) 如图 2, 连接  $EM$  并延长, 交  $CB$  的延长线于点  $P$ , 过点  $F$  作  $FQ \perp BC$ , 交  $BC$  的延长线于点  $Q$ , 连接  $PF$ ,

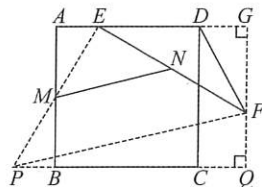


图2

则四边形  $CDGQ$  是矩形,

$$\therefore QG=CD=6, FQ=QG-FG=6-2\sqrt{3}, CQ=DG=2,$$

$\therefore$  点  $M$  为  $AB$  的中点,

$$\therefore AM=BM,$$

$$\text{又 } \angle A = \angle MBP = 90^\circ, \angle AME = \angle BMP,$$

$$\therefore \triangle AME \cong \triangle BMP (\text{ASA}),$$

$$\therefore BP=AE=2, ME=MP,$$

$$\therefore PQ=BP+BC+CQ=10, \text{点 } M \text{ 是 } EP \text{ 的中点},$$

$\therefore N$  为  $EF$  的中点,

$\therefore MN$  是  $\triangle EPF$  的中位线,

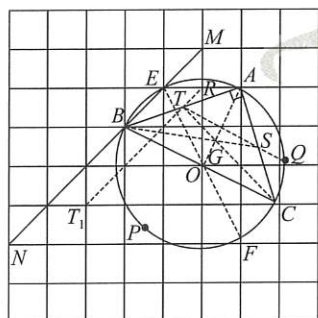
$$\therefore MN = \frac{1}{2} PF,$$

$$\text{在 Rt}\triangle PQF \text{ 中, 由勾股定理得 } PF^2 = PQ^2 + FQ^2 = 10^2 + (6-2\sqrt{3})^2 = 148 - 24\sqrt{3},$$

$$\therefore MN^2 = \frac{1}{4} PF^2 = 37 - 6\sqrt{3}.$$

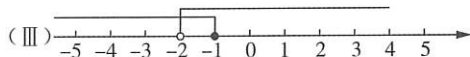
18. (I)  $5\sqrt{2}$ ;

(II) 如图, 取格点  $R, T_1$ , 连接  $RT_1$  交  $AB$  于点  $T$ ; 取圆与网格线的交点  $E, F$ , 连接  $EF$  交  $BC$  于点  $O$ ; 连接  $OA, CT$ , 相交于点  $G$ ; 连接  $BG$  并延长交  $AC$  于点  $S$ ; 连接  $TS$  并延长交圆于点  $Q$ , 则点  $Q$  即为所求.



19. 解: (I)  $x > -2$ ;

$$(II) x \leq -1;$$



$$(IV) -2 < x \leq -1.$$

20. 解: (I) 50 24.

(II) 观察条形统计图,

$$\therefore \bar{x} = \frac{6 \times 5 + 7 \times 8 + 8 \times 12 + 9 \times 15 + 10 \times 10}{5 + 8 + 12 + 15 + 10} = 8.34,$$

$\therefore$  这组数据的平均数为 8.34.

$\therefore$  在这组数据中, 9 出现了 15 次, 出现的次数最多,

$\therefore$  这组数据的众数为 9.

$\therefore$  将这组数据按从小到大的顺序排列, 其中处于中间位置的

$$\text{两个数是 8 和 9, 有 } \frac{8+9}{2} = 8.5,$$

$\therefore$  这组数据的中位数是 8.5.

$$(III) 3\ 000 \times \frac{15+10}{50} = 1\ 500 (\text{人}),$$

答: 读书时间不少于 9 小时的学生大约有 1 500 人.

21. 解: (I)  $\therefore$  半径  $OC$  经过弦  $AB$  的中点  $M$ ,

$$\therefore \widehat{AC} = \widehat{BC},$$

$$\therefore \angle AOC = \angle BOC = \frac{1}{2} \angle AOB = 75^\circ,$$

$$\therefore \angle APB = \frac{1}{2} \angle AOB = 75^\circ,$$

$$\text{又 } PB = AB,$$

$$\therefore \angle PAB = \angle APB = 75^\circ,$$

$$\therefore \angle ABP = 180^\circ - \angle PAB - \angle APB = 30^\circ.$$

$$(II) \therefore \angle AOB = 150^\circ,$$

$$\therefore \angle DOB = 180^\circ - \angle AOB = 30^\circ,$$

$$\therefore DB \text{ 切 } \odot O \text{ 于 } B,$$

$$\therefore DB \perp OB, \angle OBD = 90^\circ,$$

$$\text{在 Rt}\triangle OBD \text{ 中, } DB = \sqrt{6}, \tan \angle DOB = \frac{DB}{OB},$$

$$\therefore OB = \frac{DB}{\tan 30^\circ} = 3\sqrt{2},$$

$$\therefore AP = OB,$$

$$\therefore AP = OB = OP = OA,$$

$$\therefore \triangle OAP \text{ 为等边三角形, } \angle AOP = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle POB = \angle AOB - \angle AOP = 90^\circ,$$

$$\text{在 Rt}\triangle POB \text{ 中, } PB = \sqrt{OP^2 + OB^2} = \sqrt{2OB^2} = 6.$$

22. 解: (I) 在  $\text{Rt}\triangle DEC$  中,  $\angle ECD = 45^\circ, EC = 22$ ,

$$\therefore \angle EDC = 90^\circ - \angle ECD = 45^\circ, \text{ 得 } \angle EDC = \angle ECD,$$

$$\therefore ED = EC = 22,$$

即教学楼  $ED$  的高为 22 m.

(II) (i) 在  $\text{Rt}\triangle ABC$  中,

$$\text{由 } \angle BCA = 60^\circ, AB = h, \tan \angle BCA = \frac{AB}{CA},$$

$$\text{得 } CA = \frac{AB}{\tan 60^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{3} h,$$

$$\therefore EA = EC + CA = 22 + \frac{\sqrt{3}}{3} h,$$

$$\text{即线段 } EA \text{ 的长为 } (22 + \frac{\sqrt{3}}{3} h) \text{ m}.$$

(ii) 由题意得  $\angle DAE = 22^\circ$ ,

$$\text{在 Rt}\triangle ADE \text{ 中, } \tan \angle DAE = \frac{ED}{EA},$$

$$\therefore ED = EA \cdot \tan \angle DAE, \text{ 即 } 22 = (22 + \frac{\sqrt{3}}{3} h) \times \tan 22^\circ,$$

$$\therefore h = (\frac{22}{\tan 22^\circ} - 22) \times \frac{\sqrt{3}}{3} \approx (\frac{22}{0.40} - 22) \times 1.73 \approx 57 (\text{m}).$$

答: 建筑物  $AB$  的高度约为 57 m.

23. 解: (I) (1) 1.8 3.6 0;

(II) 0.09;

(III) 当  $50 \leq x \leq 70$  时,  $y = -0.09x + 8.1$ ;

当  $70 < x \leq 130$  时,  $y = 1.8$ .

(II) 0.9 km.

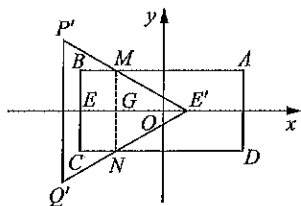
24. 解: (I)  $(-2, -1)$   $(-5, -\sqrt{3})$ .

(II) (1) 在矩形  $ABCD$  中, 其顶点  $A(2, 1)$ ,  $B(-2, 1)$ ,  $C(-2, -1)$ ,  $D(2, -1)$ ,

则  $AB \parallel x$  轴  $\parallel CD$ ,  $CB \perp x$  轴,

由  $E$  是  $BC$  的中点, 得  $E(-2, 0)$ ,  $\triangle E'P'Q'$  关于  $x$  轴对称,

如图, 连接  $MN$  交  $x$  轴于  $G$ ,



则  $MN \perp x$  轴, 四边形  $BCNM$  和四边形  $BEGM$  是矩形,

$\therefore MN = BC = 2$ ,  $MG = BE = 1$ ,  $BM = EG$ ,

由平移的性质得  $\angle ME'G = \frac{1}{2} \angle P'E'Q' = 30^\circ$ ,

在  $Rt\triangle ME'G$  中,  $E'G = \frac{MG}{\tan \angle ME'G} = \frac{1}{\tan 30^\circ} = \sqrt{3}$ ,

$\therefore S_{\triangle MNE'} = \frac{1}{2} MN \cdot E'G = \frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{3} = \sqrt{3}$ ,

$\because EE' = t$ ,

$\therefore EG = EE' - E'G = t - \sqrt{3}$ ,

$\therefore S_{\text{矩形}BCNM} = BC \cdot EG = 2(t - \sqrt{3})$ ,

$\therefore S = S_{\text{矩形}BCNM} + S_{\triangle MNE'} = 2(t - \sqrt{3}) + \sqrt{3} = 2t - \sqrt{3}$ , 其中  $t$  的

取值范围是  $\sqrt{3} < t < 3$ .

(II)  $\frac{\sqrt{3}}{16} < S \leq 6 - \sqrt{3}$ .

① 当  $\frac{\sqrt{3}}{4} < t < 3$  时, 由平移可知,  $S$  随  $t$  的增大而增大,

如图 1, 当  $t = \frac{\sqrt{3}}{4}$  时, 重叠部分为等边  $\triangle E'RS$ ,

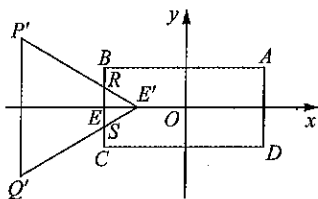


图1

则  $EE' = \frac{\sqrt{3}}{4}$ ,  $ER = \frac{\sqrt{3}}{3} EE' = \frac{1}{4}$ ,  $RS = 2ER = \frac{1}{2}$ ,

$\therefore S = S_{\triangle E'RS} = \frac{1}{2} RS \cdot EE' = \frac{\sqrt{3}}{16}$ ,

当  $t = 3$  时, 重叠部分为五边形, 由 (I) 可知  $S = 2t - \sqrt{3}$ ,

则  $S = 6 - \sqrt{3}$ ,

$\therefore \frac{\sqrt{3}}{16} < S < 6 - \sqrt{3}$ ;

② 当  $3 \leq t \leq 4$  时, 由平移可知, 重叠部分的面积不变,

此时  $S = 6 - \sqrt{3}$ ;

③ 当  $4 < t < 6$  时, 由平移可知,  $S$  随  $t$  的增大而减小,

如图 2, 当  $t = 6$  时, 重叠部分为矩形  $AMND$ ,

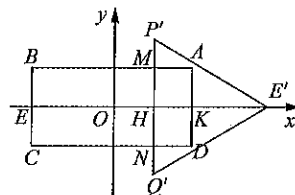


图2

则  $EE' = 6$ ,  $EK = AB = 4$ ,  $HE' = \frac{P'H}{\tan 30^\circ} = 3$ ,

$\therefore KE' = EE' - EK = 2$ ,  $HK = HE' - KE' = 1$ ,

$\therefore S = S_{\text{矩形}AMND} = AD \cdot HK = 2$ ,

$\therefore 2 < S < 6 - \sqrt{3}$ .

综上所述  $\frac{\sqrt{3}}{16} < S \leq 6 - \sqrt{3}$ .

25. 解: (I)  $\because$  抛物线  $y = -x^2 + bx + c$  与  $y$  轴相交于点  $C(0, 2)$ ,

对称轴为  $x = \frac{b}{2}$ ,

$\therefore \begin{cases} c = 2 \\ -\frac{b}{2 \times (-1)} = -\frac{1}{2} \end{cases}$ , 解得  $\begin{cases} b = -1 \\ c = 2 \end{cases}$ ,

$\therefore y = -x^2 - x + 2 = -(x + \frac{1}{2})^2 + \frac{9}{4}$ ,

顶点  $P(-\frac{1}{2}, \frac{9}{4})$ .

令  $y = 0$ , 得  $-x^2 - x + 2 = 0$ , 解得  $x_1 = -2$ ,  $x_2 = 1$ ,

$\because$  点  $A$  在点  $B$  的左侧,

$\therefore A(-2, 0)$ .

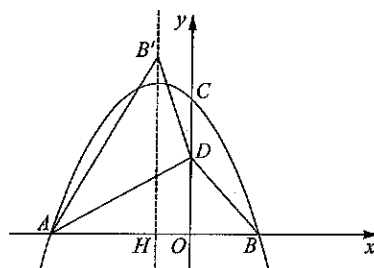
(II) 由 (I) 得  $A(-2, 0)$ ,  $B(1, 0)$ ,

$\therefore OA = 2$ ,  $AB = 3$ ,

如图, 当  $D$  点在  $y$  轴正半轴上时, 连接  $B'A$ , 设对称轴

$x = -\frac{1}{2}$  与  $x$  轴交于点  $H$ ,

则  $H(-\frac{1}{2}, 0)$ ,  $AH = \frac{3}{2}$ ,



∵  $\triangle ABD$  沿  $AD$  所在直线翻折得到  $\triangle AB'D$ ,

$$\therefore AB' = AB = 3,$$

$$\text{在 Rt}\triangle AHB' \text{ 中, } \cos \angle HAB' = \frac{AH}{AB'} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \angle HAB' = 60^\circ, \text{ 则 } \angle HAD = 30^\circ,$$

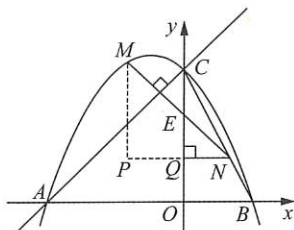
$$\text{在 Rt}\triangle ADO \text{ 中, } OD = OA \cdot \tan \angle HAD = 2 \times \tan 30^\circ = \frac{2\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore D \text{ 点的坐标为 } (0, \frac{2\sqrt{3}}{3}).$$

$$\text{同理, 当 } D \text{ 点在 } y \text{ 轴负半轴上时, } D \text{ 点的坐标为 } (0, -\frac{2\sqrt{3}}{3}).$$

$$\therefore D \text{ 点的坐标为 } (0, \frac{2\sqrt{3}}{3}) \text{ 或 } (0, -\frac{2\sqrt{3}}{3}).$$

(Ⅲ) 如图, 过点  $M$  作  $MP \parallel y$  轴, 交  $NQ$  的延长线于点  $P$ , 设  $MN$  交  $y$  轴于点  $E$ .



$$\text{由 } A(-2, 0), C(0, 2), B(1, 0),$$

$$\text{得 } OA = OC = 2, CB = \sqrt{5},$$

$$\therefore \angle OAC = \angle OCA = 45^\circ,$$

$$\therefore MN \perp AC, MP \parallel y \text{ 轴, } NQ \perp y \text{ 轴,}$$

$$\therefore \angle PME = \angle MEC = 45^\circ, \angle MPQ = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle PNM = 45^\circ, PM = PN.$$

$$\text{设直线 } BC \text{ 的解析式为 } y = kx + b',$$

$$\text{则有 } \begin{cases} 0 = k + b' \\ 2 = b' \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} k = -2 \\ b' = 2 \end{cases},$$

$$\text{即直线 } BC \text{ 的解析式为 } y = -2x + 2,$$

$$\text{设点 } M(m, -m^2 - m + 2), \text{ 其中 } -1 < m < 0,$$

$$\text{点 } N(n, -2n + 2),$$

$$\text{则点 } P(m, -2n + 2), Q(0, -2n + 2),$$

$$\therefore PM = -m^2 - m + 2 - (-2n + 2) = -m^2 - m + 2n,$$

$$PN = n - m,$$

$$\text{则 } -m^2 - m + 2n = n - m, \text{ 得 } n = m^2,$$

$$\therefore MN = \sqrt{PM^2 + PN^2} = \sqrt{2} PM = \sqrt{2} (m^2 - m), QN = n = m^2,$$

$$\therefore CB - MN + 2\sqrt{2} QN = \sqrt{5} - \sqrt{2} (m^2 - m) + 2\sqrt{2} m^2 = \sqrt{2} m^2 +$$

$$\sqrt{2} m + \sqrt{5} = \sqrt{2} (m + \frac{1}{2})^2 + \sqrt{5} - \frac{\sqrt{2}}{4},$$

$$\therefore \text{当 } m = -\frac{1}{2} \text{ 时, } CB - MN + 2\sqrt{2} QN \text{ 有最小值 } \sqrt{5} - \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

### ⑬2024 河东区初中学业水平考试模拟(一)

1. C 2. C 3. A 4. B 5. D 6. A 7. A 8. B 9. C 10. D

11. A

12. C 当  $x=0$  时,  $y=1$ ,

$$\therefore \text{点 } A(0, 1),$$

$\therefore$  出球点  $A$  离点  $O$  的距离是 1 m, 故①正确;

$$\therefore y = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{4}x + 1 = -\frac{1}{4}(x - \frac{3}{2})^2 + \frac{25}{16},$$

$$\therefore \text{当 } x = \frac{3}{2} \text{ 时, } y \text{ 取得最大值, 最大值为 } \frac{25}{16},$$

$\therefore$  羽毛球最高达到  $\frac{25}{16}$  m, 故②正确;

$$\text{当 } y=0 \text{ 时, } -\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{4}x + 1 = 0,$$

$$\text{解得 } x_1 = -1, x_2 = 4,$$

$$\therefore \text{点 } B(4, 0),$$

$\therefore$  羽毛球横向飞出的最远距离是 4 m, 故③错误.

13.  $\frac{2}{11}$  14.  $a^6b^2$  15. 18 16. -2

17. (I) 2 (II) 5

$$(I) \because AF \perp AE,$$

$$\therefore \angle EAF = 90^\circ,$$

$$\therefore AE = AF = \sqrt{2},$$

$$\therefore EF = \sqrt{AE^2 + AF^2} = 2;$$

(II) 如图, 设  $AB$  与  $CE$  交于点  $G$ ,

$$\therefore \angle EAF = \angle BAC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BAF + \angle EAB = 90^\circ, \angle BAF + \angle FAC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle EAB = \angle FAC,$$

$$\therefore AB = AC, AE = AF,$$

$$\therefore \triangle ABE \cong \triangle ACF (\text{SAS}),$$

$$\therefore \angle ABE = \angle ACF,$$

$$\therefore \angle ACF + \angle AGF = 90^\circ, \angle AGF = \angle BGE,$$

$$\therefore \angle ABE + \angle BGE = 90^\circ, \text{ 即 } \angle BEG = 90^\circ.$$

$$\therefore EF = 2, BF = 2\sqrt{2},$$

$$\therefore BE = \sqrt{BF^2 - EF^2} = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 - 2^2} = 2,$$

$\therefore \triangle BEF$  是等腰直角三角形,

$$\therefore \angle BFE = 45^\circ,$$

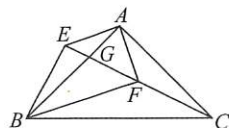
$$\therefore AE = AF, \angle EAF = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle AFE = \angle AEF = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle AFB = \angle AFE + \angle BFE = 45^\circ + 45^\circ = 90^\circ,$$

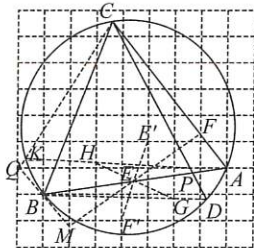
$$\therefore AB = \sqrt{BF^2 + AF^2} = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{10},$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{1}{2} \times \sqrt{10} \times \sqrt{10} = 5.$$



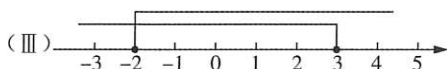
18. (I)  $5\sqrt{2}$ ;

(II) 如图,取格点  $E', F'$ , 连接  $E'F'$  交  $AB$  于点  $E$ ; 取  $AC$  与网格线的交点  $F$ , 连接  $FE$  并延长与网格线相交于点  $M$ ; 连接  $DB$  与网格线相交于点  $G$ ; 连接  $GE$  并延长与网格线相交于点  $H$ ; 连接  $AH$  并延长与圆相交于点  $K$ ; 分别连接  $CK, MB$  并延长相交于点  $Q$ , 则点  $Q$  即为所求.



19. 解: (I)  $x \leq 3$ ;

(II)  $x \geq -2$ ;



(IV)  $-2 \leq x \leq 3$ .

20. 解: (I) 50 20.

(II) 观察条形统计图,

$$\therefore \bar{x} = \frac{5 \times 8 + 5.5 \times 12 + 6 \times 16 + 6.5 \times 10 + 7 \times 4}{50} = 5.9,$$

$\therefore$  这组数据的平均数是 5.9.

$\therefore$  在这组数据中, 6 出现了 16 次, 出现的次数最多,

$\therefore$  这组数据的众数为 6.

$\therefore$  将这组数据按从小到大的顺序排列, 其中处于中间的两个数都是 6, 有  $\frac{6+6}{2} = 6$ ,

$\therefore$  这组数据的中位数为 6.

21. 解: (I) 如图, 连接  $OA$ ,

$\because EF$  为  $\odot O$  的切线,  $A$  为切点,

$\therefore OA \perp EF, \angle FAO = 90^\circ$ .

$\because \angle ABH = 24^\circ$ ,

$\therefore \angle FOA = 2\angle ABH = 48^\circ$ ,

$\therefore \angle F = 42^\circ$ ,

$\because D$  是弧  $BC$  的中点,

$\therefore DO \perp BC, \angle FGE = 90^\circ$ .

$\therefore \angle E = 90^\circ - \angle F = 48^\circ$ .

(II) 如图, 连接  $AC$ , 过  $C$  作  $CM \perp AB$ , 垂足为  $M$ ,

$\because \angle AOC + \angle B = 135^\circ, \angle AOC = 2\angle B$ ,

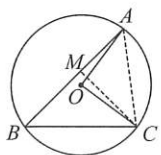
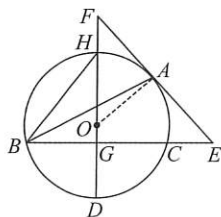
$\therefore 3\angle B = 135^\circ$ ,

$\therefore \angle B = 45^\circ, \angle AOC = 90^\circ$ .

$\therefore \triangle AOC, \triangle BCM$  是等腰直角三角形,

$\therefore OA = OC = 5, BC = 8$ ,

$\therefore AC = \sqrt{2}OA = 5\sqrt{2}, BM = CM = 4\sqrt{2}$ ,



在  $Rt\triangle ACM$  中,  $AM = \sqrt{AC^2 - CM^2} = 3\sqrt{2}$ ,

$\therefore AB = AM + BM = 3\sqrt{2} + 4\sqrt{2} = 7\sqrt{2}$ .

22. 解: (I) 由题意得  $DE \perp CE$ ,

在  $Rt\triangle DEC$  中,  $CD = 5, DE = 3$ ,

$\therefore CE = \sqrt{CD^2 - DE^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$ ,

即  $CE$  的长为 4 m.

(II) (i) 由题意得  $AB \perp AC$ ,

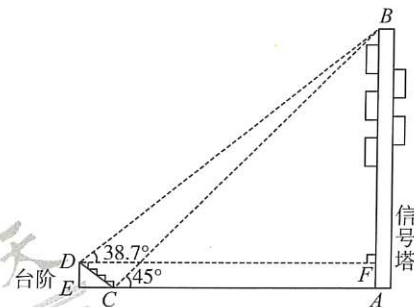
在  $Rt\triangle ABC$  中,  $\tan \angle BCA = \frac{AB}{AC}, \angle BCA = 45^\circ, AB = h$ ,

$\therefore AC = \frac{AB}{\tan 45^\circ} = h$ ,

$\therefore EA = AC + CE = h + 4$ ,

即线段  $EA$  的长为  $(h+4)$  m.

(ii) 如图, 过点  $D$  作  $DF \perp AB$ , 垂足为  $F$ ,



根据题意,  $\angle DEA = \angle EAF = \angle AFD = 90^\circ$ ,

$\therefore$  四边形  $DEAF$  是矩形.

$\therefore AF = DE = 3, DF = EA = h + 4, BF = AB - AF = h - 3$ ,

在  $Rt\triangle BDF$  中,  $\tan \angle BDF = \frac{BF}{DF}, \angle BDF = 38.7^\circ$ ,

$\therefore BF = DF \cdot \tan \angle BDF$ , 即  $h - 3 = (h + 4) \times \tan 38.7^\circ$ ,

$\therefore h = \frac{4 \times \tan 38.7^\circ + 3}{1 - \tan 38.7^\circ} \approx \frac{4 \times 0.80 + 3}{1 - 0.80} = 31(\text{m})$ .

答: 信号塔  $AB$  的高度约为 31 m.

23. 解: (I) (i) 0.075 0.6 0.8;

(ii)  $\frac{1}{15}$ ;

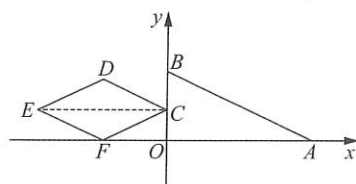
(iii) 当  $28 \leq x < 58$  时,  $y = 0.8$ ;

当  $58 \leq x \leq 68$  时,  $y = -0.08x + 5.44$ .

(II) 0.4 km.

24. 解: (I) (0, 2)  $(-\sqrt{3}, 2)$ .

(II) (i) 如图, 连接  $EC$ ,



由点  $A(2\sqrt{3}, 0)$ , 点  $B(0, 2)$ , 得  $S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2}OA \cdot OB = 2\sqrt{3}$ ,

由点  $C(0,1)$ , 点  $E(-2\sqrt{3},1)$ , 点  $F(-\sqrt{3},0)$ ,

得  $EC \parallel x$  轴,  $OC=1$ ,  $OF=\sqrt{3}$ ,

在  $\text{Rt}\triangle OCF$  中,  $\tan \angle CFO = \frac{OC}{OF} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ , 得  $\angle CFO = 30^\circ$ ,

$\therefore \angle ECF = \angle CFO = 30^\circ$ ,

$\therefore$  在菱形  $CDEF$  中,  $EF=CF$ ,

$\therefore \angle FEC = \angle ECF = 30^\circ$ ,

$\therefore \angle EFC = 120^\circ$ ,

根据平移可知,  $\angle E'F'C' = 120^\circ$ ,  $\angle C'F'A = 30^\circ$ ,

$\therefore \angle PF'O = 30^\circ$ ,

$\therefore FF' = t$ ,

$\therefore OF' = t - \sqrt{3}$ ,

在  $\text{Rt}\triangle POF'$  中, 由  $OP = OF' \cdot \tan 30^\circ$ , 得  $OP = \frac{\sqrt{3}}{3}t - 1$ ,

$\therefore S_{\triangle POF'} = \frac{1}{2}OP \cdot OF' = \frac{\sqrt{3}}{6}(t - \sqrt{3})^2$ ,

同理, 得  $S_{\triangle AQF'} = \frac{\sqrt{3}}{12}(t - 3\sqrt{3})^2$ ,  $S_{\triangle BMN} = \frac{\sqrt{3}}{12}(t - \sqrt{3})^2$ ,

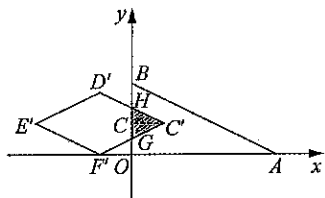
$\therefore S = S_{\triangle OAB} - S_{\triangle POF'} - S_{\triangle AQF'} - S_{\triangle BMN}$

$= 2\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{6}(t - \sqrt{3})^2 - \frac{\sqrt{3}}{12}(t - 3\sqrt{3})^2 - \frac{\sqrt{3}}{12}(t - \sqrt{3})^2$

$= -\frac{\sqrt{3}}{3}t^2 + 3t - \sqrt{3}$ , 其中  $t$  的取值范围是  $\sqrt{3} < t < 2\sqrt{3}$ .

(II)  $t = \frac{\sqrt{6}}{2}$  或  $\frac{5\sqrt{3}}{2}$ .

① 当  $0 < t \leq \sqrt{3}$  时, 重叠部分为等边三角形, 如图所示,



连接  $CC'$ , 则  $CC' \perp y$  轴,  $CC' = t$ ,

$\therefore GH = C'G = \frac{CC'}{\cos 30^\circ} = \frac{2\sqrt{3}}{3}t$ ,

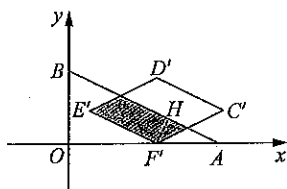
$\therefore S = \frac{1}{2}GH \cdot CC' = \frac{1}{2} \times \frac{2\sqrt{3}}{3}t \times t = \frac{\sqrt{3}}{3}t^2$ ,

令  $S = \frac{\sqrt{3}}{2}$ , 即  $\frac{\sqrt{3}}{3}t^2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ , 解得  $t = \frac{\sqrt{6}}{2}$  (负值舍);

② 当  $\sqrt{3} < t < 2\sqrt{3}$  时, 由 (I) 可知  $S = -\frac{\sqrt{3}}{3}t^2 + 3t - \sqrt{3}$ ,

令  $S = \frac{\sqrt{3}}{2}$ , 即  $-\frac{\sqrt{3}}{3}t^2 + 3t - \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ , 解得  $t = \frac{3\sqrt{3} \pm 3}{2}$  (舍);

③ 当  $2\sqrt{3} \leq t < 3\sqrt{3}$  时, 重叠部分为平行四边形, 如图所示,



过点  $F'$  作  $F'H \perp AB$  于点  $H$ ,

则  $AF' = OA - OF' = 2\sqrt{3} - (t - \sqrt{3}) = 3\sqrt{3} - t$ ,

$\therefore \angle F'AH = 30^\circ$ ,

$\therefore F'H = \frac{1}{2}AF' = \frac{3\sqrt{3} - t}{2}$ ,

又  $E'F' = EF = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$ ,

$\therefore S = E'F' \cdot F'H = 2 \times \frac{3\sqrt{3} - t}{2} = 3\sqrt{3} - t$ ,

令  $S = \frac{\sqrt{3}}{2}$ , 即  $3\sqrt{3} - t = \frac{\sqrt{3}}{2}$ , 解得  $t = \frac{5\sqrt{3}}{2}$ .

综上, 当  $S = \frac{\sqrt{3}}{2}$  时,  $t = \frac{\sqrt{6}}{2}$  或  $\frac{5\sqrt{3}}{2}$ .

25. 解: (I)  $(\quad)$   $\therefore b = -2, c = -6$ ,

$\therefore$  抛物线的解析式为  $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x - 6 = \frac{1}{2}(x - 2)^2 - 8$ ,

$\therefore D(2, -8)$ ,

当  $y = 0$  时,  $\frac{1}{2}x^2 - 2x - 6 = 0$ ,

解得  $x_1 = -2, x_2 = 6$ ,

$\therefore$  点  $A$  在点  $B$  的左侧,

$\therefore A(-2, 0)$

(II) 当  $x = 0$  时,  $y = -6, \therefore C(0, -6)$ ,

设直线  $AC$  的解析式为  $y = k_1x + b_1$ ,

$\begin{cases} -2k_1 + b_1 = 0 \\ b_1 = -6 \end{cases}$ , 解得  $\begin{cases} k_1 = -3 \\ b_1 = -6 \end{cases}$ ,

$\therefore$  直线  $AC$  的解析式为  $y = -3x - 6$ ,

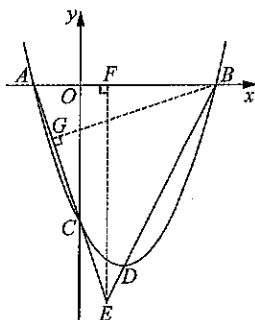
同理, 由点  $D(2, -8), B(6, 0)$ ,

可得直线  $BD$  的解析式为  $y = 2x - 12$ ,

令  $-3x - 6 = 2x - 12$ , 解得  $x = \frac{6}{5}$ ,

$\therefore$  点  $E$  的坐标为  $(\frac{6}{5}, -\frac{48}{5})$ ,

如图, 过点  $E$  作  $EF \perp x$  轴于点  $F$ , 过点  $B$  作  $BG \perp AE$  于点  $G$ ,



$\therefore AE = \sqrt{AF^2 + EF^2} = \sqrt{(2 + \frac{6}{5})^2 + (-\frac{48}{5})^2} = \frac{16\sqrt{10}}{5}$ ,

$BE = \sqrt{BF^2 + EF^2} = \sqrt{(6 - \frac{6}{5})^2 + (-\frac{48}{5})^2} = \frac{24\sqrt{5}}{5}$ ,

$\therefore S_{\triangle ABE} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot EF = \frac{1}{2} \cdot AE \cdot BG$ ,

$$\therefore BG = \frac{12\sqrt{10}}{5},$$

$$\text{在 Rt}\triangle BGE \text{ 中, } \sin \angle CEB = \frac{BG}{BE} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\therefore \angle CEB = 45^\circ.$$

(II)  $\because$  点  $B(-c, 0)$  在抛物线  $y = \frac{1}{2}x^2 + bx + c$  上, 其中  $c < -1$ ,

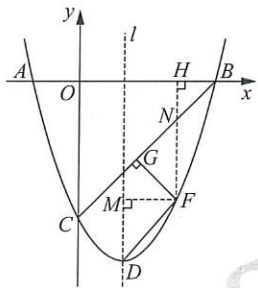
$$\therefore \frac{1}{2}c^2 - bc + c = 0, \text{ 得 } c = 2b - 2 (c = 0 \text{ 舍去}), \text{ 则 } b < \frac{1}{2}.$$

$$\therefore \text{抛物线的解析式为 } y = \frac{1}{2}x^2 + bx + 2b - 2,$$

$$\therefore F(m, \frac{1}{2}m^2 + bm + 2b - 2), \text{ 其中 } -b < m < 2 - 2b.$$

$$\therefore \text{对称轴为直线 } l: x = -b, \text{ 顶点 } D \text{ 的坐标为 } (-b, -\frac{b^2}{2} + 2b - 2).$$

如图, 过点  $F$  作  $FM \perp l$  于点  $M$ , 过点  $F$  作  $FH \perp x$  轴于点  $H$ , 与直线  $BC$  交于点  $N$ ,



$$\text{则 } \angle FMD = 90^\circ, M(-b, \frac{1}{2}m^2 + bm + 2b - 2),$$

$$\because B(-c, 0), C(0, c),$$

$$\therefore OB = OC = -c, \angle CBO = \angle BCO = 45^\circ,$$

$$\because DF \parallel BC,$$

$$\therefore \angle MDF = 45^\circ,$$

$$\therefore FM = MD,$$

$$\therefore m + b = \frac{1}{2}(m + b)^2, \text{ 解得 } b = 2 - m (b = -m \text{ 舍去}),$$

$$\text{则 } m > \frac{3}{2},$$

$$\therefore F(m, -\frac{1}{2}m^2 + 2),$$

$$\text{由 } B(-c, 0), C(0, c),$$

$$\text{可得直线 } BC \text{ 的解析式为 } y = x + c = x + 2b - 2 = x - 2m + 2,$$

$$\text{则点 } H(m, 0), \text{ 点 } N(m, 2 - m),$$

$$\therefore NH = m - 2, FN = 2 - m + \frac{1}{2}m^2 - 2 = \frac{1}{2}m^2 - m,$$

$$\because \angle HNB = \angle NBH = 45^\circ, \angle FNG = \angle NFG = 45^\circ,$$

$$\therefore BG + 3FG = BN + NG + 3FG = \sqrt{2}NH + 2\sqrt{2}FN = 4\sqrt{2},$$

$$\text{即 } \sqrt{2}(m - 2) + 2\sqrt{2}(\frac{1}{2}m^2 - m) = 4\sqrt{2}, \text{ 整理得 } m^2 - m - 6 = 0,$$

$$\text{解得 } m = 3, \text{ 或 } m = -2 (\text{舍}).$$

$$\therefore m \text{ 的值为 } 3.$$

## ④2024 红桥区初中学业水平考试模拟(一)

1. D 2. A 3. C 4. B 5. B 6. C 7. D 8. A 9. D 10. C

11. A

12. B 由题意得  $AP = t, BQ = 2t, 0 < t \leq 8$ ,

$$\therefore BP = AB - AP = 10 - t,$$

$$\therefore S_{\triangle PBQ} = \frac{1}{2}BP \cdot BQ = \frac{1}{2} \times (10 - t) \times 2t = -t^2 + 10t$$

$$= -(t - 5)^2 + 25,$$

$\therefore$  当  $t = 5$  时,  $\triangle PBQ$  的面积有最大值为  $25 \text{ cm}^2$ , 故①正确;

令  $S_{\triangle PBQ} = 9$ , 则  $-t^2 + 10t = 9$ , 解得  $t = 1$ , 或  $t = 9$  (舍), 故②

错误;

$$\because PQ^2 = BQ^2 + BP^2 = (2t)^2 + (10 - t)^2 = 5t^2 - 20t + 100,$$

$$\text{令 } 5t^2 - 20t + 100 = 64, \text{ 即 } 5t^2 - 20t + 36 = 0,$$

$$\Delta = 400 - 4 \times 5 \times 36 = -320 < 0, \therefore \text{方程无解},$$

$\therefore PQ$  的长不可以是  $8 \text{ cm}$ , 故③错误.

$$13. \frac{5}{7} \quad 14. x^6 y^2 \quad 15. x(y+2)(y-2) \quad 16. -1$$

$$17. \frac{\sqrt{17}}{2} \because \text{四边形 } ABCD \text{ 是边长为 } 4 \text{ 的正方形},$$

$$\therefore AB = AD = CD = BC = 4, \angle BAE = \angle D = \angle C = 90^\circ,$$

由作图知  $\angle DAP = \angle ABE$ ,

$$\because \angle ABE + \angle AEB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DAP + \angle AEB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle AME = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BMP = \angle AME = 90^\circ,$$

$$\text{在 } \triangle ABE \text{ 和 } \triangle DAP \text{ 中, } \begin{cases} \angle ABE = \angle DAP \\ AB = DA \\ \angle BAE = \angle D \end{cases},$$

$$\therefore \triangle ABE \cong \triangle DAP (\text{ASA}),$$

$$\therefore DP = AE = AD - DE = 3,$$

$$\therefore CP = CD - DP = 1,$$

$$\therefore BP = \sqrt{BC^2 + CP^2} = \sqrt{4^2 + 1^2} = \sqrt{17},$$

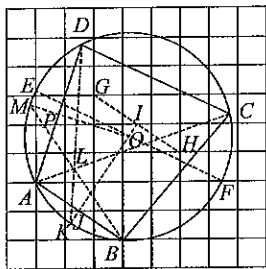
$\because N$  为  $BP$  的中点,

$$\therefore MN = \frac{1}{2}BP = \frac{\sqrt{17}}{2}.$$

18. (I)  $\sqrt{13}$ ;

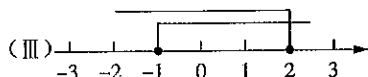
(II) 如图, 取圆与网格线的交点  $E, F$ , 连接  $EF$ ; 取格点  $G, H$ , 连接  $GH$  与网格线相交于点  $I$ , 取  $AB$  与网格线的交点  $J$ , 连接  $IJ$  并延长, 与  $EF$  相交于点  $O$ , 与圆相交于点  $K$ ; 连接  $AC, DK$  相交于点  $L$ , 连接  $BL$  并延长, 与圆相交于点  $M$ ; 连接  $OM$  与

AD 相交于点 P, 则点 P 即为所求.



19. 解: (I)  $x \geq -1$ ;

(II)  $x \leq 2$ ;



(IV)  $-1 \leq x \leq 2$ .

20. 解: (I) 40 20.

(II) 观察条形统计图,

$$\therefore \bar{x} = \frac{1 \times 4 + 2 \times 4 + 3 \times 8 + 4 \times 16 + 5 \times 8}{40} = 3.5,$$

$\therefore$  这组数据的平均数为 3.5.

$\therefore$  在这组数据中, 4 出现了 16 次, 出现的次数最多,

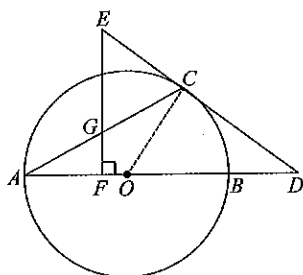
$\therefore$  这组数据的众数为 4.

$\therefore$  将这组数据按从小到大的顺序排列, 其中处于中间的两个

数都是 4, 有  $\frac{4+4}{2} = 4$ ,

$\therefore$  这组数据的中位数为 4.

21. 解: (I) 如图, 连接 OC,



$\therefore CD$  与  $\odot O$  相切,

$\therefore OC \perp CD$ , 得  $\angle OCD = \angle OCE = 90^\circ$ ,

$\therefore \angle D = 36^\circ$ ,

$\therefore \angle COB = 90^\circ - 36^\circ = 54^\circ$ ,

$\therefore OA = OC$ ,

$\therefore \angle OCA = \angle CAO = \frac{1}{2} \angle COB = 27^\circ$ ,

$\therefore \angle ECG = \angle OCE - \angle OCA = 63^\circ$ ,

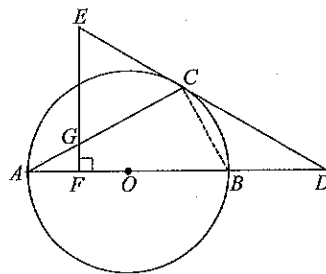
$\therefore EF \perp AB$ ,

$\therefore \angle AFG = 90^\circ$ ,

$\therefore \angle AGF = 90^\circ - \angle CAO = 63^\circ$ ,

$\therefore \angle EGC = \angle AGF = 63^\circ$ .

(II) 如图, 连接 BC,



同 (I), 可得  $\angle EGC = \angle ECG$ ,

$\therefore \angle E = \angle EGC = \angle ECG$ ,

$\therefore \triangle ECG$  是等边三角形,

$\therefore EG = GC, \angle EGC = 60^\circ$ ,

$\therefore \angle CAO = 30^\circ$ ,

$\therefore F$  为  $OA$  的中点,  $OA = \sqrt{3}$ ,

$\therefore AF = \frac{\sqrt{3}}{2}, AB = 2\sqrt{3}$ ,

$\therefore AG = \frac{AF}{\cos 30^\circ} = 1$ ,

$\therefore AB$  是  $\odot O$  的直径,

$\therefore \angle ACB = 90^\circ$ ,

$\therefore AC = AB \cdot \cos 30^\circ = 3$ ,

$\therefore EG = GC = AC \cdot AG = 2$ .

22. 解: (I)  $\therefore \angle CAB = 30^\circ, \angle CBA = 60^\circ$ ,

$\therefore \angle CAB + \angle CBA = 90^\circ$ ,

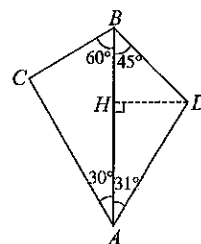
$\therefore \angle C = 90^\circ$ ,

$\therefore BC = 20$ ,

$\therefore AB = 2BC = 40$ ,

$\therefore$  该渔船航行的距离  $AB$  为 40 海里.

(II) 如图, 过点  $D$  作  $DH \perp AB$ , 垂足为  $H$ ,



在  $Rt\triangle BDH$  中,  $\angle DBH = 45^\circ$ ,

$$\tan \angle DBH = \frac{DH}{BH}, \sin \angle DBH = \frac{DH}{BD},$$

$$\therefore BH = \frac{DH}{\tan 45^\circ} = DH, BD = \frac{DH}{\sin 45^\circ} = \sqrt{2} DH,$$

在  $Rt\triangle ADH$  中,  $\angle DAH = 31^\circ, \tan \angle DAH = \frac{DH}{AH}$ ,

$$\therefore AH = \frac{DH}{\tan 31^\circ},$$

$\therefore AH + BH = AB$ ,

$$\therefore \frac{DH}{\tan 31^\circ} + DH = 40, \text{ 则 } DH = \frac{40 \times \tan 31^\circ}{1 + \tan 31^\circ},$$

$$\therefore BD = \frac{\sqrt{2} \times 40 \times \tan 31^\circ}{1 + \tan 31^\circ} \approx \frac{1.4 \times 40 \times 0.60}{1 + 0.60} = 21 \text{ (海里)}.$$

答: B 处与小岛 D 之间的距离 BD 约为 21 海里.

23. 解: (I) 0.5 0.8 2 1.

(II) 0.2.

(III) 当  $0 \leq x < 8$  时,  $y = 0.1x$ ;

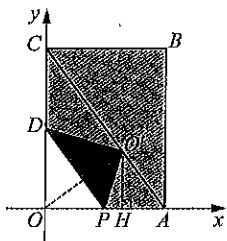
当  $8 \leq x < 20$  时,  $y = 0.8$ ;

当  $20 \leq x \leq 35$  时,  $y = 0.08x - 0.8$ .

(IV) 1.6 km.

24. 解: (I)  $(\frac{2\sqrt{3}}{3}, 0)$   $(\sqrt{3}, 1)$ .

(II) 如图, 连接  $OO'$ , 过点  $O'$  作  $O'H \perp OA$ , 垂足为  $H$ .



$\because$  点  $A(3,0)$ , 点  $C(0,4)$ ,  $D$  为边  $OC$  的中点,

$\therefore OA=3, OC=4, DO=DC=2$ .

根据折叠, 知  $\triangle ODP \cong \triangle O'DP, OO' \perp DP$ .

$\therefore DO=DO'$ . 得  $DO=DC=DO'$ .

$\therefore$  点  $O'$  在以点  $D$  为圆心,  $OC$  为直径的圆上.

$\therefore \angle CO'O = 90^\circ$ . 可得  $\angle O'OA = \angle OCA$ .

在  $Rt\triangle OAC$  中,  $AC = \sqrt{OA^2 + OC^2} = 5$ ,

$\therefore \sin \angle O'OA = \sin \angle OCA = \frac{3}{5}, \cos \angle O'OA = \cos \angle OCA = \frac{4}{5}$ ,

$$OO' = \frac{OA \cdot OC}{AC} = \frac{12}{5}.$$

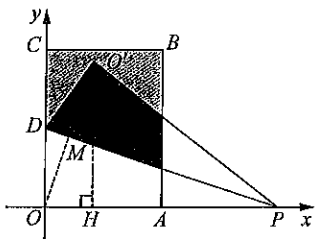
在  $Rt\triangle OO'H$  中,  $O'H = OO' \cdot \sin \angle O'OH = \frac{36}{25}$ ,

$$OH = OO' \cdot \cos \angle O'OH = \frac{48}{25}.$$

$\therefore$  点  $O'$  的坐标为  $(\frac{48}{25}, \frac{36}{25})$ .

(III)  $O'(\frac{6}{5}, \frac{18}{5})$ .

如图, 连接  $OO'$  与  $PD$  交于点  $M$ , 过点  $O'$  作  $O'H \perp OA$ , 垂足为  $H$ .



根据折叠, 知  $OO' \perp DP, OM = O'M$ ,

$\therefore \angle O'OH + \angle OPD = 90^\circ$ .

$\because \angle O'OH + \angle OO'H = 90^\circ$ ,

$\therefore \angle OPD = \angle OO'H$ .

$\because DO=2, OP=6$ ,

$$\therefore PD = \sqrt{DO^2 + OP^2} = 2\sqrt{10}.$$

$$\therefore \sin \angle OO'H = \sin \angle OPD = \frac{\sqrt{10}}{10},$$

$$\cos \angle OO'H = \cos \angle OPD = \frac{3\sqrt{10}}{10}, OM = \frac{OP \cdot DO}{PD} = \frac{3\sqrt{10}}{5}.$$

$$\therefore OO' = 2OM = \frac{6\sqrt{10}}{5}.$$

在  $Rt\triangle OO'H$  中,  $OH = OO' \cdot \sin \angle OO'H = \frac{6}{5}$ ,

$$O'H = OO' \cdot \cos \angle OO'H = \frac{18}{5}.$$

$\therefore$  点  $O'$  的坐标为  $(\frac{6}{5}, \frac{18}{5})$ .

25. 解: (I) 由题意得  $\begin{cases} -9-3b+c=0 \\ c=3 \end{cases}$ , 解得  $\begin{cases} b=-2 \\ c=3 \end{cases}$ ,

$\therefore$  抛物线的解析式为  $y = -x^2 - 2x + 3$ ,

$$\therefore y = -x^2 - 2x + 3 = -(x+1)^2 + 4,$$

$\therefore$  点  $P$  的坐标为  $(-1, 4)$ .

$$(II) \because c = 4 - \frac{b^2}{4},$$

$$\therefore y = -x^2 + bx + 4 - \frac{b^2}{4} = -(x - \frac{b}{2})^2 + 4.$$

$\therefore$  点  $M(m, -(m - \frac{b}{2})^2 + 4)$ , 对称轴为直线  $l: x = \frac{b}{2}$ ,

点  $P(\frac{b}{2}, 4)$ .

$\because$  点  $A(-3, 0)$ , 点  $B(0, 3)$ ,

$\therefore OA = OB$ . 可得在  $Rt\triangle AOB$  中,  $\angle OAB = 45^\circ$ .

过点  $M$  作  $MN \perp l$ , 垂足为  $N$ ,

则  $\angle PNM = 90^\circ, N(\frac{b}{2}, -(m - \frac{b}{2})^2 + 4)$ .

$\because MP \parallel AB$ ,

$\therefore \angle PMN = 45^\circ$ .

$\therefore MN = PN$ .

又  $m < \frac{b}{2}, \therefore \frac{b}{2} - m = 4 - [-(m - \frac{b}{2})^2 + 4]$ . 得  $\frac{b}{2} = m + 1$ .

$$\therefore MP = \sqrt{2}MN = \sqrt{2}(\frac{b}{2} - m) = \sqrt{2}.$$

(II)  $\because \frac{b}{2} = m + 1$ ,

$\therefore$  点  $M(m, 3)$ , 点  $P(m+1, 4)$ .

将点  $A(-3, 0)$  向右平移 1 个单位长度, 向上平移 1 个单位长

度得点  $A'(-2, 1)$ .

作点  $O$  关于直线  $y=4$  的对称点  $O'$ , 得点  $O'$  的坐标为  $(0, 8)$ .

当满足条件的点  $P$  落在线段  $A'O'$  上时,  $AM+OP$  取得最小值.

设直线  $A'O'$  的解析式为  $y=kx+t$ .

$$\text{则} \begin{cases} -2k+t=1 \\ t=8 \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} k=\frac{7}{2} \\ t=8 \end{cases},$$

$\therefore$  直线  $A'O'$  的解析式为  $y=\frac{7}{2}x+8$ .

当  $y=4$  时,  $x=-\frac{8}{7}$ .

$\therefore m+1=-\frac{8}{7}$ , 即  $m=-\frac{15}{7}$ .

$\therefore$  点  $M$  的坐标为  $(-\frac{15}{7}, 3)$ .

### 15. 2024 西青区初中学业水平考试模拟(一)

1. A 2. C 3. B 4. A 5. C 6. B 7. D 8. C 9. A 10. B

11. B

12. D 当  $AB=10$  m 时,  $BC=28-10=18$  (m),

$\therefore$  劳动基地  $ABCD$  的面积是  $10 \times 18 = 180$  ( $\text{m}^2$ ), 故①正确;

设  $AB$  的长是  $x$  m, 则  $BC=(28-x)$  m,

若劳动基地  $ABCD$  的面积为  $192$   $\text{m}^2$ , 则  $x(28-x)=192$ ,

解得  $x=12$ , 或  $x=16$ , 故②正确;

设劳动基地  $ABCD$  的面积为  $y$   $\text{m}^2$ ,

$$\text{由题意可得} \begin{cases} x \geq 8 \\ 28-x \geq 12 \end{cases}, \text{解得} 8 \leq x \leq 16,$$

$\therefore y=x(28-x)=-(x-14)^2+196$ ,

$\therefore$  当  $x=14$  时,  $y$  有最大值为  $196$ ,

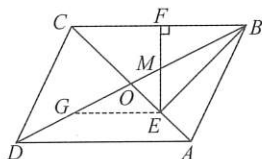
$\therefore$  当  $x=8$  时,  $y=160$ ; 当  $x=16$  时,  $y=192$ ,

$\therefore$  劳动基地面积的最大值是  $196$   $\text{m}^2$ , 最小值是  $160$   $\text{m}^2$ , 故③正确.

13.  $\frac{2}{9}$  14.  $a^5 b^2$  15. 4 16. -2

17. (I)  $\triangle CEF$  (或  $\triangle BEF$  或  $\triangle BEC$ );

(II) 4 如图, 过点  $E$  作  $EG \parallel AD$  交  $BD$  于  $G$ ,



$\therefore AB=OB$ ,  $BE$  平分  $\angle ABO$ ,

$\therefore BE \perp AC$ ,  $E$  为  $OA$  的中点,

$\therefore EG \parallel AD$ , 四边形  $ABCD$  为平行四边形,

$\therefore EG=\frac{1}{2}AD$ ,  $AD \parallel BC \parallel EG$ ,  $AD=BC$ ,

$\therefore \angle CAD=45^\circ$ ,

$\therefore \angle ACB=45^\circ$ ,

$\therefore EB=EC$ ,

$\therefore EF \perp BC$ ,

$\therefore EF=CF=FB=\frac{1}{2}BC$ , 得  $FB=EG$ ,

$\therefore \angle BMF=\angle GME$ ,  $\angle MBF=\angle MGE$ ,

$\therefore \triangle BMF \cong \triangle GME$  (AAS),

$\therefore FM=EM=\frac{1}{2}EF$ ,

设  $FB=x$ , 则  $FM=\frac{1}{2}x$ ,

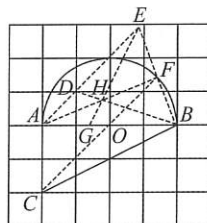
在  $\text{Rt}\triangle BMF$  中,  $BM^2=FM^2+FB^2$ , 即  $(\sqrt{5})^2=(\frac{1}{2}x)^2+x^2$ ,

解得  $x=2$  (负值舍), 即  $FB=2$ ,

$\therefore BC=2FB=4$ .

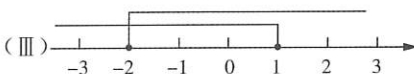
18. (I)  $2\sqrt{5}$ ;

(II) 如图, 取格点  $O$ , 连接  $CO$  并延长交半圆于点  $F$ ; 取格点  $D$ , 连接  $AD$  并延长, 与  $BF$  的延长线交于点  $E$ , 连接  $BD$ ,  $AF$  交于点  $H$ ; 连接  $EH$  并延长交  $AB$  于点  $G$ , 则点  $F$  和点  $G$  即为所求.



19. 解: (I)  $x \geq -2$ ;

(II)  $x \leq 1$ ;



(IV)  $-2 \leq x \leq 1$ .

20. 解: (I) 40 25.

(II) 观察条形统计图,

$$\therefore \bar{x} = \frac{3 \times 4 + 4 \times 8 + 5 \times 15 + 6 \times 10 + 7 \times 3}{40} = 5,$$

$\therefore$  统计的这部分学生定时定点投篮进球个数的平均数是 5.

$\therefore$  在这组数据中, 5 出现了 15 次, 出现的次数最多,

$\therefore$  统计的这部分学生定时定点投篮进球个数的众数是 5.

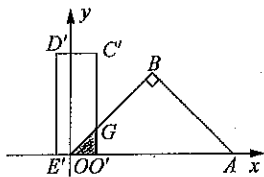
$\therefore$  将这组数据按由小到大的顺序排列, 处于中间的两个数都是 5, 有  $\frac{5+5}{2}=5$ ,

$\therefore$  统计的这部分学生定时定点投篮进球个数的中位数是 5.

微信公众号：玩转数学黄老师

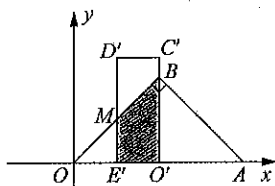
$$(II) \frac{9}{2} \leq S \leq 28.$$

①当  $3 \leq t \leq 8$  时, 由平移可知,  $S$  随  $t$  的增大而增大, 如图, 当  $t=3$  时, 重叠部分为  $\triangle OO'G$ ,



$$\therefore S = \frac{1}{2} OO' \cdot GO' = \frac{1}{2} \times 3 \times 3 = \frac{9}{2};$$

如图, 当  $t=8$  时, 重叠部分为四边形  $E'O'BM$ ,



$$\therefore OE' = ME' = 8 - 4 = 4,$$

$$\therefore S = S_{\triangle O'AB} - S_{\triangle O'E'M} = \frac{1}{2} \times 8 \times 8 - \frac{1}{2} \times 4 \times 4 = 24,$$

$$\therefore \frac{9}{2} \leq S \leq 24;$$

②当  $8 < t < 12$  时,

由 (I) 可知  $S = -t^2 + 20t - 72 = -(t-10)^2 + 28$ ,

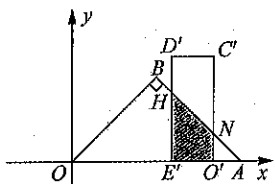
$\therefore$  当  $t=10$  时,  $S$  有最大值为 28,

$$\therefore 24 < S \leq 28;$$

③当  $12 \leq t \leq 14$  时, 由平移可知,  $S$  随  $t$  的增大而减小,

当  $t=12$  时, 由对称性可知  $S=24$ ;

如图, 当  $t=14$  时, 重叠部分为四边形  $E'O'NH$ ,



$$\therefore O'A = O'N = 16 - 14 = 2,$$

$$AE' = HE' = O'E' + O'A = 4 + 2 = 6,$$

$$\therefore S = S_{\triangle AE'H} - S_{\triangle O'AN} = \frac{1}{2} \times 6 \times 6 - \frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 16,$$

$$\therefore 16 \leq S \leq 24.$$

综上所述,  $S$  的取值范围为  $\frac{9}{2} \leq S \leq 28$ .

25. 解: (I) (1) 把点  $D(4, 12)$  代入  $y = -x^2 - 4ax - 12a$ ,

$$\text{有 } -4^2 - 4a \times 4 - 12a = 12, \text{ 解得 } a = -1.$$

$$\therefore \text{抛物线的解析式为 } y = -x^2 + 4x + 12.$$

$$\text{当 } y=0 \text{ 时, 有 } -x^2 + 4x + 12 = 0,$$

$$\text{解得 } x_1 = -2, x_2 = 6.$$

$\therefore$  点  $A$  在点  $B$  左边,

$\therefore$  点  $A$  的坐标是  $(-2, 0)$ .

(II) 设点  $P$  的坐标为  $(m, -m^2 + 4m + 12)$ , 其中  $-2 < m < 4$ ,

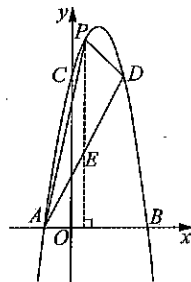
设直线  $AD$  的解析式为  $y = kx + b$ ,

把  $A(-2, 0), D(4, 12)$  分别代入,

$$\text{得 } \begin{cases} -2k + b = 0 \\ 4k + b = 12 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} k = 2 \\ b = 4 \end{cases},$$

$\therefore$  直线  $AD$  的解析式为  $y = 2x + 4$ .

如图, 过点  $P$  作  $PE \perp x$  轴, 交  $AD$  于点  $E$ ,



则点  $E$  的坐标为  $(m, 2m + 4)$ .

$$\therefore PE = -m^2 + 4m + 12 - 2m - 4 = -m^2 + 2m + 8;$$

$$\therefore S_{\triangle PAD} = \frac{1}{2} \cdot PE \cdot (x_D - x_A) = \frac{1}{2} (-m^2 + 2m + 8) \times 6$$

$$= -3m^2 + 6m + 24 = -3(m-1)^2 + 27.$$

$\therefore$  当  $m=1$  时,  $\triangle PAD$  面积最大, 最大值是 27.

此时点  $P$  的坐标为  $(1, 15)$ .

(II) 由抛物线  $y = -x^2 - 4ax - 12a$ ,

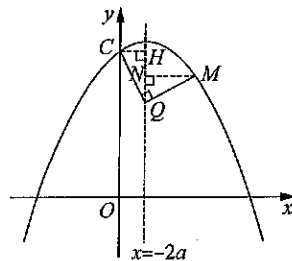
可知其对称轴是直线  $x = -2a$ , 点  $C$  的坐标为  $(0, -12a)$ ,

故点  $Q(-2a, -8a)$  在抛物线对称轴上.

$\therefore$  线段  $QC$  绕点  $Q$  顺时针旋转  $90^\circ$  后得到线段  $QM$ ,

$$\therefore QC = QM, \angle CQM = 90^\circ.$$

如图, 分别过点  $C, M$  作直线  $x = -2a$  的垂线, 垂足分别为点  $H, N$ ,



则  $\angle MNQ = \angle QHC = 90^\circ$ ,

$$\therefore \angle CQH + \angle NQM = 90^\circ, \angle CQH + \angle HCQ = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle NQM = \angle HCQ.$$

$$\therefore \triangle MNQ \cong \triangle QHC (\text{AAS}).$$

$$\therefore MN = QH = -4a, QN = CH = -2a,$$

$\therefore$  点  $M$  的坐标为  $(-6a, -10a)$ .

把点  $M(-6a, -10a)$  代入  $y = -x^2 - 4ax - 12a$ ,

$$\text{得 } -(-6a)^2 - 4a \times (-6a) - 12a = -10a,$$

$$\text{解得 } a_1 = 0 (\text{舍}), a_2 = -\frac{1}{6}.$$

$$\therefore \text{抛物线的解析式为 } y = -x^2 + \frac{2}{3}x + 2.$$

### ⑩ 2024 部分区初中学业水平考试模拟(一)

1. D 2. C 3. D 4. A 5. B 6. C 7. D 8. A 9. A 10. B

11. B  $\because$  将  $\triangle ABC$  绕点 A 顺时针旋转得到  $\triangle ADE$ ,

$$\therefore BC = DE = 6, AC = AE, \angle ACB = \angle AED,$$

$$\therefore BE = CE - BC = 14 - 6 = 8,$$

$$\therefore DE^2 + BE^2 = 6^2 + 8^2 = 100, BD^2 = 100,$$

$$\therefore DE^2 + BE^2 = BD^2,$$

$$\therefore \triangle BDE \text{ 是直角三角形, 即 } \angle DEB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle AED + \angle AEC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ACB + \angle AEC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle CAE = 90^\circ,$$

$$\therefore AC = AE,$$

$$\therefore \angle AEC = \angle ACE = 45^\circ,$$

$$\therefore AE = \frac{\sqrt{2}}{2} CE = 7\sqrt{2}.$$

12. C  $\because$  等边三角形 ABC 的边长为 3,  $AG = x, DG \perp AB$ ,

$$\therefore BG = 3 - x, \angle B = 60^\circ,$$

$$\therefore DG = BG \cdot \tan B = \sqrt{3}(3 - x), DB = \frac{BG}{\cos B} = 2(3 - x),$$

$\because$  点 D 不与点 B, C 重合,

$$\therefore 0 < DB < 3, \text{ 即 } 0 < 2(3 - x) < 3, \text{ 解得 } \frac{3}{2} < x < 3, \text{ 故 ① 正确,}$$

② 错误;

$$\therefore y = \frac{1}{2} BG \cdot DG = \frac{1}{2} (3 - x) \cdot \sqrt{3} (3 - x) = \frac{\sqrt{3}}{2} (3 - x)^2, \text{ 故 ③}$$

正确.

13.  $a^8$  14.  $\frac{2}{9}$  15.  $4 - 2\sqrt{3}$  16.  $y = x + 1$  (答案不唯一)

17. (I)  $3\sqrt{2}$  (II)  $3\sqrt{5}$

(I) 如图, 过点 E 作  $EH \perp CD$ , 垂足为 H, 过点 E 作  $EM \perp BC$ , 垂足为 M,

$\because$  E 是正方形 ABCD 对角线上一点,

$$\therefore \angle ECM = \angle ECH = 45^\circ, EH = EM.$$

$$\text{又 } \angle EMC = \angle MCH = \angle EHC = 90^\circ,$$

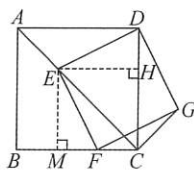
$$\therefore \angle MEH = 90^\circ,$$

$$\text{则 } \angle MEF + \angle FEH = 90^\circ.$$

$$\therefore DE \perp EF,$$

$$\therefore \angle DEF = 90^\circ, \text{ 则 } \angle HED + \angle FEH = 90^\circ.$$

$$\therefore \angle HED = \angle MEF.$$



$$\text{又 } \angle EHD = \angle EMF = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle DEH \cong \triangle FEM (\text{ASA}).$$

$$\therefore DE = FE.$$

$\therefore$  矩形 DEFG 是正方形.

$$\therefore DE = DG.$$

$$\therefore \angle ADE + \angle EDC = 90^\circ, \angle CDG + \angle EDC = 90^\circ,$$

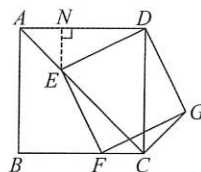
$$\therefore \angle ADE = \angle CDG.$$

$$\text{又 } AD = CD,$$

$$\therefore \triangle ADE \cong \triangle CDG (\text{SAS}).$$

$$\therefore AE = CG = 3\sqrt{2};$$

(II) 如图, 过点 E 作  $EN \perp AD$ , 垂足为 N,



$\because$  E 是正方形 ABCD 对角线上一点,

$$\therefore \angle EAD = 45^\circ.$$

$\therefore \triangle AEN$  是等腰直角三角形.

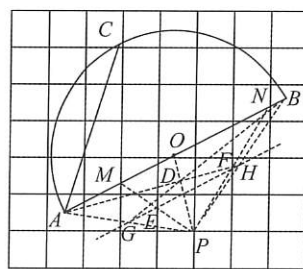
$$\therefore AN = EN = AE \cdot \sin 45^\circ = 3\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 3.$$

$$\text{又 } AD = AB = 9, \therefore DN = AD - AN = 6.$$

$$\therefore DE = \sqrt{DN^2 + EN^2} = 3\sqrt{5}.$$

18. (I) 45;

(II) 如图, 取格点 P, AB 与格线的交点 M, N, 连接 PM, PN, PA, PB; 取 PM, PN 与格线的交点 E, F, 直线 EF 交 PA, PB 于点 G, H; 连接 BG, AH, BG 与 AH 交于点 D; 连接 PD 并延长, 交 AB 于点 O, 则点 O 即为所求.



19. 解: (I)  $x \geq -2$ ;

(II)  $x \leq 2$ ;

(III)  $-3 \leq x \leq 2$

(IV)  $-2 \leq x \leq 2$ .

20. 解: (I) 50 28.

(II) 观察条形统计图,

$$\therefore \bar{x} = \frac{60 \times 7 + 70 \times 12 + 80 \times 11 + 90 \times 14 + 100 \times 6}{7 + 12 + 11 + 14 + 6} = 80,$$



$$\text{当 } t = \frac{5}{3} \text{ 时, } S = \frac{1}{2} \times \frac{5}{3} \times \frac{5}{3} = \frac{25}{18}.$$

$$\therefore \frac{1}{2} \leq S \leq \frac{25}{18};$$

$$\text{② 当 } \frac{5}{3} < t < \frac{5}{2} \text{ 时,}$$

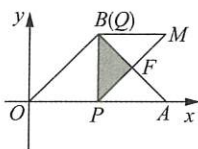
$$\text{由 (i) 可知 } S = -\frac{7}{4}t^2 + \frac{15}{2}t - \frac{25}{4} = -\frac{7}{4}\left(t - \frac{15}{7}\right)^2 + \frac{25}{14},$$

$$\therefore \text{当 } t = \frac{15}{7} \text{ 时, } S \text{ 有最大值为 } \frac{25}{14},$$

$$\therefore \frac{25}{18} < S \leq \frac{25}{14};$$

③ 当  $\frac{5}{2} \leq t \leq 4$  时, 重合部分为三角形, 且  $S$  随  $t$  的增大而减小,

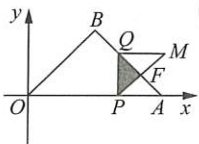
$$\text{如图, 当 } t = \frac{5}{2} \text{ 时, } OP = BP = \frac{5}{2},$$



同理, 得  $\triangle PBF$  是等腰直角三角形,

$$\therefore PF = BF = \frac{\sqrt{2}}{2}BP = \frac{5\sqrt{2}}{4}, S = \frac{1}{2} \times \frac{5\sqrt{2}}{4} \times \frac{5\sqrt{2}}{4} = \frac{25}{16};$$

如图, 当  $t = 4$  时,  $OP = 4, PA = 1$ ,



同理, 得  $\triangle PQF$  是等腰直角三角形,

$$\therefore PF = AF = \frac{\sqrt{2}}{2}PA = \frac{\sqrt{2}}{2}, S = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{4},$$

$$\therefore \frac{1}{4} \leq S \leq \frac{25}{16}.$$

综上,  $S$  的取值范围为  $\frac{1}{4} \leq S \leq \frac{25}{16}$ .

25. 解: (I) (i)  $\because b = 2, c = 3$ ,

$\therefore$  抛物线的解析式为  $y = -x^2 + 2x + 3 = -(x-1)^2 + 4$ ,

$\therefore$  点  $P(1, 4)$ ,

当  $y = 0$  时,  $-x^2 + 2x + 3 = 0$ ,

解得  $x_1 = -1, x_2 = 3$ ,

$\therefore$  点  $A$  在点  $B$  左侧,

$\therefore A(-1, 0), B(3, 0)$ .

(ii)  $\because$  直线  $l$  过点  $C$  且平行于  $x$  轴, 点  $M$  为直线  $l$  与抛物线的交点,

又点  $C(0, 3)$ ,

令  $-x^2 + 2x + 3 = 3$ , 解得  $x_1 = 0, x_2 = 2$ ,

$\therefore M(2, 3)$ ,

$\because B(3, 0), C(0, 3), \angle BOC = 90^\circ$ ,

$\therefore OB = OC = 3, \angle OBC = \angle OCB = 45^\circ$ ,

$\therefore \angle MCN = 45^\circ$ ,

由  $C(0, 3), M(2, 3)$ , 得  $MC = 2$ ,

$\therefore$  点  $N$  在线段  $BC$  上,

$\therefore$  当  $MN \perp BC$  时,  $MN$  最小,

$$\therefore MN = MC \cdot \sin \angle MCN = 2 \times \sin 45^\circ = \sqrt{2},$$

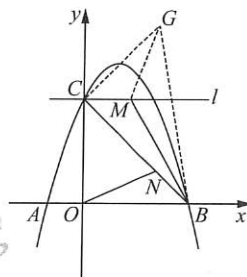
$\therefore MN$  的最小值为  $\sqrt{2}$ .

(II)  $\because B(c, 0), C(0, c), \angle BOC = 90^\circ$ ,

$\therefore OB = OC = c, \angle OCB = \angle OBC = 45^\circ$ ,

$$\therefore BC = \sqrt{OB^2 + OC^2} = \sqrt{2}c,$$

如图, 作  $\triangle GCM$ , 使  $\angle GCM = \angle OBN = 45^\circ, GC = OB$ , 连接  $BG$ ,



$$\text{在 } \triangle GCM \text{ 和 } \triangle OBN \text{ 中, } \begin{cases} CM = BN \\ \angle GCM = \angle OBN \\ GC = OB \end{cases}$$

$\therefore \triangle GCM \cong \triangle OBN (\text{SAS}),$

$\therefore GM = ON,$

$\therefore ON + BM = GM + BM,$

$\therefore$  当满足条件的点  $M$  落在线段  $BG$  上时,  $ON + BM$  取得最小值,

此时,  $ON + BM = BG = 4\sqrt{3}$ ,

$\because$  直线  $l$  过点  $C$  且平行于  $x$  轴,

$\therefore \angle MCB = \angle OBC = 45^\circ$ ,

$\therefore \angle GCB = \angle GCM + \angle MCB = 90^\circ$ ,

$$\therefore GC^2 + BC^2 = BG^2, \text{ 即 } c^2 + (\sqrt{2}c)^2 = (4\sqrt{3})^2,$$

解得  $c = 4$ , 或  $c = -4$  (舍),

$\because$  抛物线  $y = -x^2 + bx + c$  过  $B(c, 0)$ ,

$\therefore -c^2 + bc + c = 0$ , 即  $b = c - 1 = 3$ .

$\therefore b = 3, c = 4$ .

⑰ 2024 滨海新区初中学业水平考试模拟(一)

1. A 2. B 3. C 4. D 5. C 6. B 7. C 8. D 9. A 10. B

11. D

12. A  $\because$  抛物线  $y=ax^2+bx+c$  开口向上,

$$\therefore a > 0,$$

$$\because \text{对称轴是 } x = -\frac{b}{2a} = 1,$$

$$\therefore b = -2a < 0,$$

$\because$  与  $x$  轴的一个交点在  $(-2, 0)$  和  $(-1, 0)$  之间,

$$\therefore a - b + c < 0,$$

$$\therefore c < b - a = -3a < 0,$$

$$\therefore abc > 0, 3a + c < 0, \text{故①②正确};$$

$$\because \text{方程 } ax^2 + bx - b = 0 \text{ 的判别式 } \Delta = b^2 + 4ab = 4a^2 - 8a^2 = -4a^2 < 0,$$

$\therefore$  方程没有实数根, 故③正确.

13.  $\frac{2}{7}$  14.  $-8x^2y^3$  15.  $2\sqrt{2}$  16.  $(2, 0)$

17. (I) 3 (II)  $\frac{\sqrt{17}}{2}$

(I)  $\because$  四边形  $ABCD$  是菱形,

$$\therefore \angle BAC = \angle DAC,$$

$$\because EP \perp AC,$$

$$\therefore \angle APG = \angle APE = 90^\circ,$$

$$\text{在 } \triangle AGP \text{ 和 } \triangle AEP \text{ 中, } \begin{cases} \angle GAP = \angle EAP \\ AP = AP \\ \angle APG = \angle APE \end{cases},$$

$$\therefore \triangle AGP \cong \triangle AEP (\text{ASA}),$$

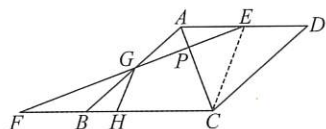
$$\therefore AG = AE,$$

$\because E$  为  $AD$  的中点,

$$\therefore AE = \frac{1}{2}AD = 3,$$

$$\therefore AG = 3;$$

(II) 如图, 连接  $CE$ ,



$$\because AG = 3, AB = 6,$$

$$\therefore BG = 3,$$

$\therefore G$  为  $AB$  的中点,  $AG = BG$ ,

$$\because AD \parallel CF,$$

$$\therefore \angle EAG = \angle FBG, \angle AEG = \angle BFG,$$

$$\therefore \triangle AEG \cong \triangle BFG (\text{AAS}),$$

$$\therefore BF = AE = 3, CF = 9,$$

$$\text{由 } AD \parallel CF, \text{得 } \frac{AE}{CF} = \frac{AP}{PC} = \frac{1}{3},$$

$$\text{又 } AC = 4, \therefore AP = 1, PC = 3,$$

$$\text{在 Rt}\triangle APE \text{ 中}, EP = \sqrt{AE^2 - AP^2} = \sqrt{3^2 - 1^2} = 2\sqrt{2},$$

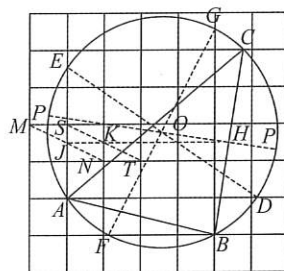
$$\text{在 Rt}\triangle PEC \text{ 中}, CE = \sqrt{EP^2 + PC^2} = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 + 3^2} = \sqrt{17},$$

又  $H$  为  $FC$  的中点,

$$\therefore GH = \frac{1}{2}CE = \frac{\sqrt{17}}{2}.$$

18. (I)  $\sqrt{17}$ ;

(II) 如图, 取圆与网格线的交点  $D, E, F, G$ , 连接  $DE, FG$ ,  $DE$  与  $FG$  交于点  $O$ , 则点  $O$  即为所求圆心; 取格点  $M, N, S, T$ , 连接  $MN, ST$ , 与网格线分别相交于点  $J, K$ , 连接  $JK$  并延长与  $BC$  相交于点  $H$ , 连接  $OH$  并延长与  $\odot O$  相交于点  $P$ , 则点  $P$  即为所求.



19. 解: (I)  $x \geq -2$ ;

(II)  $x \leq 2$ ;



(IV)  $-2 \leq x \leq 2$ .

20. 解: (I) 50 16.

(II) 观察条形统计图,

$$\therefore \bar{x} = \frac{6 \times 10 + 7 \times 8 + 8 \times 10 + 9 \times 16 + 10 \times 6}{10 + 8 + 10 + 16 + 6} = 8,$$

$\therefore$  这组数据的平均数是 8.

$\because$  在这组数据中, 9 出现了 16 次, 出现的次数最多,

$\therefore$  这组数据的众数是 9.

$\because$  将这组数据按从小到大的顺序排列, 处于中间的两个数都

$$\text{是 } 8, \text{有 } \frac{8+8}{2} = 8,$$

$\therefore$  这组数据的中位数是 8.

21. 解: (I)  $\because AB$  为  $\odot O$  的直径,

$$\therefore \angle AEB = 90^\circ.$$

$$\therefore \angle ABE = 90^\circ - \angle BAC = 40^\circ.$$

$$\because AB = AC,$$

$$\therefore \angle ABC = \angle ACB = \frac{1}{2}(180^\circ - 50^\circ) = 65^\circ.$$

$$\therefore \angle EBD = \angle ABC - \angle ABE = 25^\circ.$$

$\because$  四边形  $ABDE$  是圆内接四边形,

$$\therefore \angle AED = 180^\circ - \angle ABC = 115^\circ.$$

$$\therefore \angle BED = \angle AED - \angle AEB = 25^\circ.$$



25. 解: (I) 当  $m=1$  时, 抛物线的解析式为  $y=-x^2+2x+c$ .

$\because$  抛物线与  $x$  轴交于点  $A(-1,0)$ ,

$\therefore 0=-1-2+c$ , 得  $c=3$ .

$\therefore$  抛物线的解析式为  $y=-x^2+2x+3$ .

$\therefore y=-x^2+2x+3=-(x-1)^2+4$ ,

$\therefore$  抛物线的顶点坐标为  $(1,4)$ .

(II)  $\because$  抛物线  $y=-x^2+2mx+c$  与  $x$  轴交于点  $A(-1,0)$ ,

$\therefore 0=-1-2m+c$ , 得  $c=1+2m$ .

$\therefore$  抛物线的解析式为  $y=-x^2+2mx+1+2m$ .

可得抛物线的对称轴为直线  $x=m$ ,  $C(0,1+2m)$ ,  $M(m, \frac{1}{2})$ .

由对称性可知, 点  $B$  的坐标为  $(2m+1,0)$ .

$\therefore MB^2 = \frac{1}{4} + (m+1)^2$ ,  $MC^2 = m^2 + (2m + \frac{1}{2})^2$ ,

$\therefore MB=MC$ ,  $\therefore \frac{1}{4} + (m+1)^2 = m^2 + (2m + \frac{1}{2})^2$ ,

解得  $m_1 = \frac{1}{2}$ ,  $m_2 = -\frac{1}{2}$  (舍).

$\therefore$  抛物线的解析式为  $y=-x^2+x+2$ .

(III) 由点  $C(0,1+2m)$ , 点  $P(\sqrt{3}m, 1-m)$ ,

得直线  $CP$  的解析式为  $y=-\sqrt{3}x+1+2m$ .

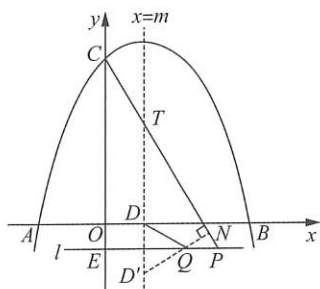
设直线  $CP$  与抛物线的对称轴相交于点  $T$ ,

则  $T(m, 2m-\sqrt{3}m+1)$ .

作点  $D(m,0)$  关于直线  $l$  的对称点  $D'$ , 则  $D'(m, 2-2m)$ ,

$\therefore TD' = 4m - \sqrt{3}m - 1$ .

如图, 过  $D'$  作  $D'N \perp CP$ , 垂足为  $N$ , 与直线  $l$  相交于点  $Q$ ,



此时  $DQ+QN=D'Q+QN=D'N$  取得最小值,

即  $D'N = \frac{10-3\sqrt{3}}{4}$ .

在  $Rt\triangle CEP$  中,  $PE = \sqrt{3}m$ ,  $CE = 3m$ ,

由  $\tan \angle PCE = \frac{PE}{CE} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ , 得  $\angle PCE = 30^\circ$ .

在  $Rt\triangle TD'N$  中,  $\angle D'TN = \angle PCE = 30^\circ$ , 有  $D'N = \frac{1}{2}TD'$ .

$\therefore \frac{10-3\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{2}(4m - \sqrt{3}m - 1)$ . 解得  $m = \frac{3}{2}$ .

⑩2024 和平区初中学业水平考试模拟(二)

1. D 2. A 3. B 4. B 5. C 6. C 7. B 8. A 9. A 10. C

11. D

12. B 在  $\triangle ABC$  中, 由三边关系可知  $AB-BC < AC < AB+BC$ ,

即  $2 < AC < 8$ ,

当  $AC=4$  时,  $AB^2 = BC^2 + AC^2$ ,

此时  $\triangle ABC$  是直角三角形, 且点  $C$  在线段  $BD$  上,  $ABCD$  不是四边形,

$\therefore 2 < AC < 4$  或  $4 < AC < 8$ , 故①错误;

$\therefore AC \perp BD$ ,

$\therefore S_{\text{四边形}ABCD} = S_{\triangle ACD} + S_{\triangle ACB} = \frac{1}{2}AC \cdot OD + \frac{1}{2}AC \cdot OB =$

$\frac{1}{2}AC \cdot (OD+OB) = \frac{1}{2}AC \cdot BD$ ,

$\therefore AC+BD=10$ ,

$\therefore BD=10-AC$ ,

$\therefore S_{\text{四边形}ABCD} = \frac{1}{2}AC \cdot (10-AC) = -\frac{1}{2}AC^2 + 5AC$ ,

当  $-\frac{1}{2}AC^2 + 5AC = 12$  时, 解得  $AC=4$  (舍), 或  $AC=6$ ,

$\therefore AC$  的长有 1 个值满足四边形  $ABCD$  面积为 12, 故②错误;

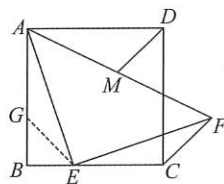
$\therefore S_{\text{四边形}ABCD} = -\frac{1}{2}AC^2 + 5AC = -\frac{1}{2}(AC-5)^2 + \frac{25}{2}$ ,

$\therefore$  当  $AC=5$  时, 四边形  $ABCD$  面积有最大值为  $\frac{25}{2}$ , 故③正确.

13.  $\frac{3}{7}$  14. 5 15.  $15a^3b$  16.  $(3,0)$

17. (I)  $\frac{3\sqrt{2}}{2}$  (II)  $\frac{5\sqrt{2}}{4}$

(I) 如图, 在  $AB$  上取一点  $G$ , 使  $BG=BE=\frac{3}{2}$ ,



$\because$  正方形  $ABCD$  的边长为 4,

$\therefore AB=BC=CD=AD=4$ ,  $\angle B=\angle BCD=\angle ADC=90^\circ$ ,

$\therefore \angle BGE=\angle BEG=45^\circ$ ,  $AG=EC$ ,  $\angle GAE+\angle AEB=90^\circ$ ,

$\therefore \angle AEF=90^\circ$ ,

$\therefore \angle AEB+\angle CEF=90^\circ$ ,

$\therefore \angle GAE=\angle CEF$ ,

又  $AE=EF$ ,

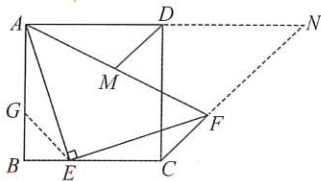
$\therefore \triangle AGE \cong \triangle ECF$  (SAS),

$\therefore GE=CF$ ,

$\therefore GE = \sqrt{BG^2 + BE^2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ ,

$\therefore CF = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ ;

(II)如图,延长CF交AD的延长线于点N,



由(I)知,  $\angle AGE = 180^\circ - \angle BGE = 135^\circ$ ,  $\triangle AGE \cong \triangle ECF$ ,

$$\therefore \angle ECF = \angle AGE = 135^\circ,$$

$$\therefore \angle DCN = \angle ECF - \angle BCD = 45^\circ,$$

$$\because \angle NDC = 180^\circ - \angle ADC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DNC = \angle DCN = 45^\circ,$$

$$\therefore DN = CD = 4,$$

$$\therefore CN = \sqrt{CD^2 + DN^2} = 4\sqrt{2},$$

$$\therefore FN = CN - CF = \frac{5\sqrt{2}}{2},$$

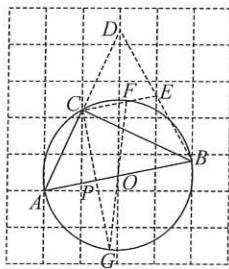
$\because DN = AD = 4$ , 即D为AN的中点,

又M为AF的中点,

$$\therefore DM = \frac{1}{2}FN = \frac{5\sqrt{2}}{4}.$$

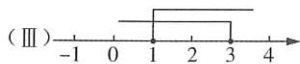
18. (I) 90;

(II)如图,延长AC与网格线相交于点D,连接DB,与网格线相交于点E;连接CE与圆相交于点F;取AB与网格线的交点O,连接FO并延长与圆相交于点G;连接CG与AB相交于点P,则点P即为所求.



19. 解:(I)  $x \geq 1$ ;

(II)  $x \leq 3$ ;



(IV)  $1 \leq x \leq 3$ .

20. 解:(I) 40 15.

(II)观察条形统计图,

$$\therefore \bar{x} = \frac{6 \times 4 + 7 \times 6 + 8 \times 11 + 9 \times 12 + 10 \times 7}{4 + 6 + 11 + 12 + 7} = 8.3,$$

$\therefore$ 这组数据的平均数是8.3.

$\because$ 在这组数据中,9出现了12次,出现的次数最多,

$\therefore$ 这组数据的众数是9.

$\because$ 将这组数据按由小到大的顺序排列,处于中间的两个数都

是8,有  $\frac{8+8}{2} = 8$ ,

$\therefore$ 这组数据的中位数是8.

$$(III) 800 \times \frac{12+7}{40} = 380 (\text{名}),$$

$\therefore$ 该校九年级学生的理化生实验操作得分不低于9分的学生人数约为380.

21. 解:(I)  $\because AB$ 是半圆O的直径,

$$\therefore \angle ACB = 90^\circ.$$

$\because C$ 是  $\widehat{BD}$ 的中点,

$$\therefore \widehat{BC} = \widehat{CD}.$$

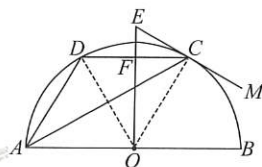
$$\therefore \angle CAB = \angle CAD = \frac{1}{2} \angle BAD = 20^\circ.$$

$$\therefore \angle ABC = 90^\circ - \angle CAB = 70^\circ.$$

$\because$ 四边形ABCD是圆内接四边形,

$$\therefore \angle ADC = 180^\circ - \angle ABC = 110^\circ.$$

(II)如图,连接OC,OD.



$\because CM$ 为半圆O的切线,

$$\therefore OC \perp CM.$$

$$\therefore \angle OCE = 90^\circ.$$

由(I)可知  $\widehat{BC} = \widehat{CD}$ .

$$\therefore \angle COB = \angle DOC.$$

$\because CD \parallel AB$ ,

$$\therefore \angle COB = \angle OCD.$$

$\because OD = OC$ ,

$$\therefore \angle ODC = \angle OCD.$$

$$\therefore \angle ODC = \angle OCD = \angle DOC = 60^\circ.$$

$\because OE \perp CD, OD = OC$ ,

$$\therefore \angle DOF = \angle COF = 30^\circ.$$

$\because AB = 4$ ,

$$\therefore OC = 2.$$

在  $Rt\triangle OCE$  中,  $\angle COE = 30^\circ, \tan \angle COE = \frac{CE}{OC}$ ,

$$\therefore CE = OC \cdot \tan \angle COE = 2 \times \tan 30^\circ = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

22. 解:(I)由题意得  $BH \perp AH$ ,

在  $Rt\triangle ABH$  中,  $\angle BAH = 30^\circ, AB = 12$ ,

$$\therefore BH = \frac{1}{2}AB = 6. \text{ 即 } BH \text{ 的值为 } 6 \text{ m}.$$

(II)(I)在  $\text{Rt}\triangle ABH$  中,  $\cos\angle BAH = \frac{AH}{AB}$ ,

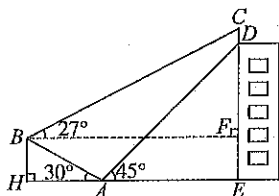
$$\therefore AH = AB \cdot \cos\angle BAH = 12 \times \cos 30^\circ = 6\sqrt{3},$$

在  $\text{Rt}\triangle ADE$  中, 由  $\tan\angle DAE = \frac{DE}{AE}$ ,  $DE = h$ ,  $\angle DAE = 45^\circ$ ,

$$\text{得 } AE = \frac{DE}{\tan 45^\circ} = h.$$

$$\therefore EH = AE + AH = h + 6\sqrt{3}. \text{ 即 } EH \text{ 的长为 } (h + 6\sqrt{3}) \text{ m}.$$

(II)如图,过点  $B$  作  $BF \perp DE$ , 垂足为  $F$ .



根据题意,  $\angle BFE = \angle FEH = \angle H = 90^\circ$ ,

$\therefore$  四边形  $BFEH$  是矩形.

$$\therefore BF = EH = h + 6\sqrt{3}, EF = BH = 6,$$

$$\therefore CF = CD + DE - EF = 3 + h - 6 = h - 3.$$

在  $\text{Rt}\triangle BFC$  中,  $\tan\angle CBF = \frac{CF}{BF}$ ,  $\angle CBF = 27^\circ$ ,

$$\therefore CF = BF \cdot \tan\angle CBF, \text{ 即 } h - 3 = (h + 6\sqrt{3}) \times \tan 27^\circ,$$

$$\therefore h = \frac{6\sqrt{3} \times \tan 27^\circ + 3}{1 - \tan 27^\circ} \approx \frac{6 \times 1.7 \times 0.5 + 3}{1 - 0.5} \approx 16 \text{ (m)}.$$

答: 建筑物  $DE$  的高度约为 16 m.

23. 解: (I)(I) 3.6 7.2 4;

(II) 16;

(III)  $\frac{1}{4}$  或  $\frac{41}{8}$ ;

(IV) 当  $0 \leq x \leq 0.6$  时,  $y = 12x$ ;

当  $0.6 < x \leq 1$  时,  $y = 7.2$ ;

当  $1 < x \leq 1.5$  时,  $y = 9.6x - 2.4$ .

(II) 9.6 km.

24. 解: (I)  $\because$  点  $B(6, 0)$ ,  $\therefore OB = 6$ .

根据折叠知四边形  $ABPQ$  和四边形  $A'B'PQ$  全等,

$$\therefore BP = B'P, \angle QPB' = \angle QPB = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle OPB' = 180^\circ - \angle QPB - \angle QPB' = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle OB'P = 90^\circ - \angle OPB' = 30^\circ,$$

$$\therefore OP = \frac{1}{2} B'P,$$

$$\therefore OB = OP + BP = OP + B'P = \frac{3}{2} B'P = 6,$$

$$\therefore B'P = 4, OP = 2,$$

在  $\text{Rt}\triangle OPB'$  中,  $OB' = \sqrt{B'P^2 - OP^2} = 2\sqrt{3}$ ,

$$\therefore B'(0, 2\sqrt{3}).$$

(II)(I)同(I)知,  $BP = B'P$ ,  $\angle OPB' = 60^\circ$ ,

$$\therefore BP = t, OB = 6,$$

$$\therefore B'P = t, OP = 6 - t,$$

$$\therefore \angle EOP = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle OEP = 90^\circ - \angle OPB' = 30^\circ,$$

$$\text{得 } PE = 2OP = 2(6 - t) = 12 - 2t,$$

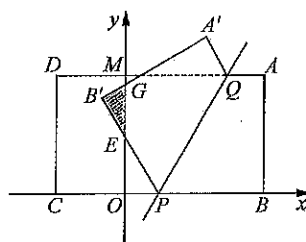
$$\text{又 } B'E = B'P - PE,$$

$$\therefore B'E = 3t - 12, \text{ 其中 } t \text{ 的取值范围是 } 5 < t < 6.$$

$$(II) \frac{3\sqrt{3}}{8} \leq S \leq \frac{27\sqrt{3}}{4}.$$

① 当  $\frac{9}{2} \leq t \leq 6$  时,  $S$  随  $t$  的增大而增大,

当  $t = \frac{9}{2}$  时, 如图所示, 设  $A'B'$  交  $y$  轴于点  $G$ ,

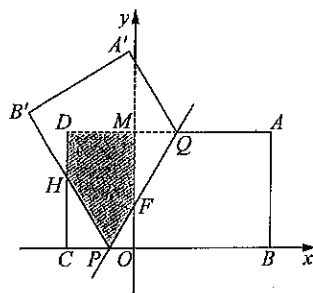


此时, 重叠部分是  $\triangle EB'G$ ,

$$\therefore B'E = 3t - 12 = 3 \times \frac{9}{2} - 12 = \frac{3}{2}, B'G = \frac{\sqrt{3}}{3} B'E = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$S_{\triangle EB'G} = \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{8};$$

② 当  $6 < t < 9$  时, 如图所示, 设  $PQ$  交  $y$  轴于点  $F$ ,  $B'P$  交  $CD$  于点  $H$ ,



此时, 重叠部分是五边形  $DHPFM$ ,

$$\therefore OP = BP - OB = t - 6, \angle QPB = 60^\circ,$$

$$\therefore OF = \sqrt{3} OP = \sqrt{3}(t - 6), CP = OC - OP = 3 - (t - 6) = 9 - t,$$

$$\angle B'PC = 60^\circ,$$

$$\therefore CH = \sqrt{3} CP = \sqrt{3}(9 - t),$$

$$\therefore S = S_{\text{矩形}OCDM} - S_{\triangle OFF} - S_{\triangle FCH}$$

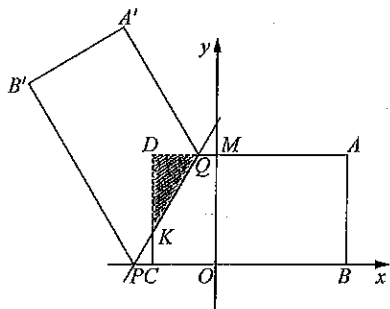
$$= 3 \times 3\sqrt{3} - \frac{1}{2}(t - 6) \times \sqrt{3}(t - 6) - \frac{1}{2}(9 - t) \times \sqrt{3}(9 - t)$$

$$= -\sqrt{3}t^2 + 15\sqrt{3}t - \frac{99\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3}(t - \frac{15}{2})^2 + \frac{27\sqrt{3}}{4},$$

$\therefore$  当  $t = \frac{15}{2}$  时,  $S$  有最大值为  $\frac{27\sqrt{3}}{4}$ ;

③当  $9 \leq t \leq 10$  时, 重叠部分是三角形, 且  $S$  随  $t$  的增大而减小,

当  $t=10$  时, 如图所示, 设  $PQ$  交  $CD$  于点  $K$ ,



此时, 重叠部分是  $\triangle DKQ$ ,

$\because CP=BP-BC=10-9=1, \angle QPB=60^\circ$ ,

$\therefore CK=\sqrt{3}CP=\sqrt{3}, \angle DKQ=\angle PKC=90^\circ-\angle QPB=30^\circ$ ,

$\therefore DK=CD-CK=3\sqrt{3}-\sqrt{3}=2\sqrt{3}, DQ=\frac{\sqrt{3}}{3}DK=2$ ,

$\therefore S=S_{\triangle DKQ}=\frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times 2=2\sqrt{3}$ .

$\because \frac{3\sqrt{3}}{8} < 2\sqrt{3}$ ,

$\therefore \frac{3\sqrt{3}}{8} \leq S \leq \frac{27\sqrt{3}}{4}$ .

25. 解: (I) (1) 由  $b=-2, c=3$ ,

得抛物线的解析式为  $y=-x^2+2x+3$ .

$\because y=-x^2+2x+3=-(x-1)^2+4$ ,

$\therefore$  点  $P$  的坐标为  $(1, 4)$ .

当  $y=0$  时,  $-x^2+2x+3=0$ , 解得  $x_1=-1, x_2=3$ .

$\therefore$  点  $A$  在点  $B$  的左侧,

$\therefore$  点  $B$  的坐标为  $(3, 0)$ .

(II) 当  $x=0$  时,  $y=3$ .

$\therefore$  点  $C$  的坐标为  $(0, 3)$ .

设直线  $BC$  的解析式为  $y=kx+t$ ,

有  $\begin{cases} 3k+t=0, \\ t=3. \end{cases}$  解得  $\begin{cases} k=-1, \\ t=3. \end{cases}$

$\therefore$  直线  $BC$  的解析式为  $y=-x+3$ .

$\therefore$  直线  $x=m$  与抛物线相交于点  $M$ , 与  $BC$  相交于点  $E$ ,

$\therefore$  点  $M$  的坐标为  $(m, -m^2+2m+3)$ ,

点  $E$  的坐标为  $(m, -m+3)$ .

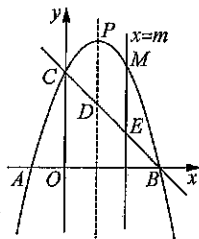
$\therefore ME=-m^2+2m+3-(-m+3)=-m^2+3m$ , 其中  $0 < m < 3$  且  $m \neq 1$ .

$\therefore$  抛物线的对称轴与  $BC$  相交于点  $D$ ,

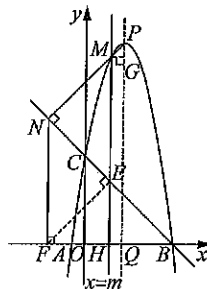
$\therefore$  点  $D$  的坐标为  $(1, 2)$ .

$\therefore PD=ME=2$ . 即  $-m^2+3m=2$ , 解得  $m_1=1$  (舍),  $m_2=2$ .

$\therefore m$  的值为 2.



(II) 如图, 设抛物线的对称轴与  $x$  轴的交点为  $Q$ , 过点  $M$  作  $MG \perp PQ$ , 垂足为  $G$ , 连接  $EF$ .



$\because$  点  $B(c, 0)$  在抛物线  $y=-x^2-bx+c$  上, 其中  $c > 0$ ,

$\therefore -c^2-bc+c=0$ , 得  $b=1-c$ .

$\therefore$  抛物线的解析式为  $y=-x^2+(c-1)x+c$ .

$\therefore$  点  $M(m, -m^2+(c-1)m+c)$ , 其中  $0 < m < c$  且  $m \neq \frac{c-1}{2}$ ,

顶点  $P$  的坐标为  $(\frac{c-1}{2}, \frac{(c+1)^2}{4})$ .

$\therefore MH=-m^2+(c-1)m+c$ .

$\because$  当  $x=0$  时,  $y=c$ ,

$\therefore$  点  $C$  的坐标为  $(0, c)$ .

由  $OB=OC=c$ , 得  $\angle OBC=\angle OCB=45^\circ$ .

$\because NF \perp x$  轴,  $ME \perp x$  轴,

$\therefore ME \parallel NF$ .

又  $ME=NF$ ,

$\therefore$  四边形  $MEFN$  是平行四边形.

$\therefore EF \parallel MN$ .

由  $MN \perp BC$ , 得  $\angle MNE=90^\circ$ .

$\therefore \angle NEF=\angle MNE=90^\circ$ .

$\therefore \angle EFB=\angle OBC=45^\circ$ .

$\therefore EF=EB$ .

$\because ME \perp x$  轴,

$\therefore EH=FH=BH=c-m, BF=2BH=2c-2m$ .

$\because NF \perp x$  轴,

$\therefore \angle FNB=\angle OBC=45^\circ$ .

$\therefore NF=BF=2c-2m$ , 即  $ME=NF=2c-2m$ .

又  $ME=MH-EH$ ,

$\therefore 2c-2m=-m^2+(c-1)m+c-(c-m)$ ,

即  $m^2-(c+2)m+2c=0$ ,

解得  $m_1=2, m_2=c$  (舍).

$\therefore$  点  $M$  的坐标为  $(2, 3c-6)$ .

$\because \angle NFE=90^\circ-\angle EFB=45^\circ$ ,

$\therefore \angle NME=45^\circ$ .

$\because ME \perp x$  轴,  $PQ \perp x$  轴,

$\therefore ME \parallel PQ$ .

$$\therefore \angle MPG = \angle NME = 45^\circ.$$

$$\therefore MG = PG.$$

$$\therefore \frac{c-1}{2} - 2 = \frac{(c+1)^2}{4} - (3c-6), \text{ 即 } c^2 - 12c + 35 = 0,$$

$$\text{解得 } c_1 = 5 (\text{舍}), c_2 = 7.$$

$$\therefore \text{抛物线的解析式为 } y = -x^2 + 6x + 7.$$

### ⑩ 2024 河西区初中学业水平考试模拟(二)

1. B 2. C 3. C 4. D 5. B 6. A 7. D 8. A 9. B 10. C

11. D

12. D  $\because$  四边形 ABCD 是菱形,  $\angle A = 60^\circ$ ,

$$\therefore AB = BC, \angle B = 180^\circ - \angle A = 120^\circ.$$

$$\therefore AH = AE = CG = CF,$$

$$\therefore BE = BF, \triangle AHE \text{ 是等边三角形.}$$

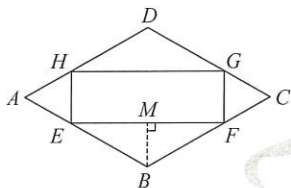
$$\therefore \angle BEF = \angle BFE = \frac{180^\circ - \angle B}{2} = 30^\circ, \angle AEH = 60^\circ.$$

$$\therefore \angle HEF = 180^\circ - \angle AEH - \angle BEF = 90^\circ,$$

$$\text{同理得 } \angle EFG = \angle FGH = 90^\circ,$$

$$\therefore \text{四边形 EFGH 是矩形, 故 ① 正确;}$$

如图, 过点 B 作  $BM \perp EF$  于点 M,



设  $AE = HE = x, 0 < x < 10$ , 四边形 EFGH 的面积为  $y$ ,

$$\text{则 } BE = 10 - x,$$

$$\therefore \angle BEM = 30^\circ,$$

$$\therefore EM = BE \cdot \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} BE = \frac{\sqrt{3}}{2} (10 - x).$$

$$\therefore EF = 2EM = \sqrt{3} (10 - x).$$

$$\therefore y = \sqrt{3} (10 - x)x = -\sqrt{3} (x - 5)^2 + 25\sqrt{3}.$$

$$\therefore 10 < 25\sqrt{3},$$

$\therefore$  AE 长有两个不同的值, 使得四边形 EFGH 的面积都为  $10 \text{ cm}^2$ , 故 ② 正确;

$$\therefore y = -\sqrt{3} (x - 5)^2 + 25\sqrt{3},$$

$$\therefore \text{当 } x = 5 \text{ 时, } y \text{ 有最大值为 } 25\sqrt{3},$$

即四边形 EFGH 面积的最大值为  $25\sqrt{3} \text{ cm}^2$ , 故 ③ 正确.

13.  $a^8$  14.  $\frac{5}{9}$  15. 11 16. -1 (答案不唯一, 满足  $b \leq 0$  即可)

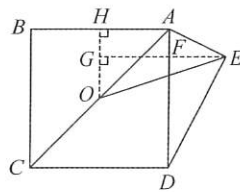
17. (I)  $2 + 2\sqrt{3}$  (II)  $\sqrt{2} + \sqrt{6}$

(I)  $\because$  三角形 ADE 中,  $\angle AED = 90^\circ, \angle ADE = 30^\circ, AD = 4$ ,

$$\therefore AE = \frac{1}{2} AD = 2, DE = \sqrt{AD^2 - AE^2} = 2\sqrt{3}.$$

$$\therefore AE + DE = 2 + 2\sqrt{3};$$

(II) 如图, 过点 O 作  $OH \perp AB$  于点 H, 过点 E 作  $EG \perp OH$  于点 G, 交 AD 于点 F,



$$\text{则 } \angle AHG = \angle HGF = \angle HAF = 90^\circ,$$

$$\therefore \text{四边形 AHGF 是矩形.}$$

$$\therefore HG = AF, AH = FG, \angle AFE = 90^\circ.$$

$$\therefore \angle DAE = 90^\circ - \angle ADE = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle AEF = 90^\circ - \angle DAE = 30^\circ.$$

$$\therefore AE = 2,$$

$$\therefore AF = \frac{1}{2} AE = 1, EF = \sqrt{AE^2 - AF^2} = \sqrt{3}.$$

$$\therefore HG = AF = 1.$$

$$\therefore \angle AHG = \angle ABC = 90^\circ,$$

$$\therefore OH \parallel CB.$$

$$\therefore O \text{ 为 } AC \text{ 的中点,}$$

$$\therefore OH = \frac{1}{2} CB = 2, AH = \frac{1}{2} AB = 2.$$

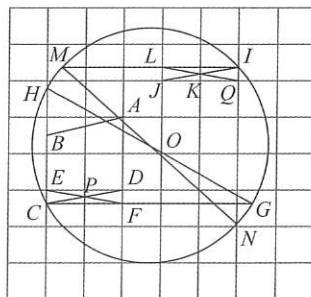
$$\therefore OG = OH - HG = 1, FG = AH = 2.$$

$$\therefore EG = EF + FG = \sqrt{3} + 2.$$

$$\therefore OE = \sqrt{OG^2 + EG^2} = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3} + 2)^2} = \sqrt{8 + 4\sqrt{3}} = \sqrt{(\sqrt{2} + \sqrt{6})^2} = \sqrt{2} + \sqrt{6}.$$

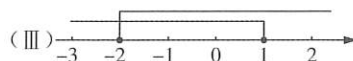
18. (I)  $\frac{\sqrt{17}}{2}$ ;

(II) 如图, 取圆与格线的交点 C, H, 取格点 D, E, 连接 CD, 交格线于点 P; 连接 EP 并延长, 交格线于点 F; 连接 CF 并延长, 交圆于点 G; 连接 GH, 则 GH 为圆的一条直径; 同理再作另一条直径 MN, MN 交 HG 于点 O, 则点 O 即为所求.



19. 解: (I)  $x \geq -2$ ;

(II)  $x \leq 1$ ;



(IV)  $-2 \leq x \leq 1$ .

20. 解:(I) 50 20.

(II) 观察条形统计图,

$$\therefore \bar{x} = \frac{5 \times 8 + 5.5 \times 12 + 6 \times 16 + 6.5 \times 10 + 7 \times 4}{50} = 5.9,$$

$\therefore$  这组数据的平均数是 5.9.

$\therefore$  在这组数据中, 6 出现了 16 次, 出现的次数最多,

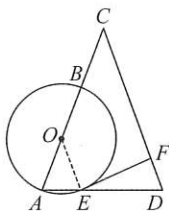
$\therefore$  这组数据的众数是 6.

$\therefore$  将这组数据按从小到大的顺序排列, 其中处于中间的两个

数都是 6, 有  $\frac{6+6}{2} = 6$ ,

$\therefore$  这组数据的中位数是 6.

21. 解:(I) 如图, 连接 OE,



$\therefore$  直线 EF 是  $\odot O$  的切线,

$\therefore OE \perp EF$ , 即  $\angle OEF = 90^\circ$ .

$\therefore CA = CD$ ,  $\angle C = 40^\circ$ ,

$\therefore \angle A = \angle D = 70^\circ$ .

$\therefore OA = OE$ ,

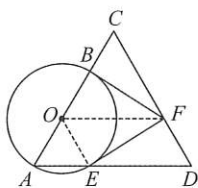
$\therefore \angle A = \angle OEA = 70^\circ$ .

$\therefore \angle OEA = \angle D$ .

$\therefore OE \parallel CD$ ,

$\therefore \angle EFD = \angle OEF = 90^\circ$ .

(II) 如图, 连接 OE, OF,



$\therefore \angle C = 60^\circ$ ,  $CA = CD$ ,

$\therefore \triangle CAD$  是等边三角形.

$\therefore \angle A = \angle D = 60^\circ$ .

$\therefore OA = OE = 3$ ,

$\therefore \triangle OAE$  是等边三角形.

$\therefore \angle AEO = \angle AOE = 60^\circ$ .

$\therefore$  直线 EF, BF 都是  $\odot O$  的切线,

$\therefore \angle OEF = \angle OBF = 90^\circ$ , FO 平分  $\angle BFE$ ,

$\therefore \angle OFE = \angle OFB$ .

$\therefore \angle BOF + \angle OFB = 90^\circ$ ,  $\angle EOF + \angle OFE = 90^\circ$ ,

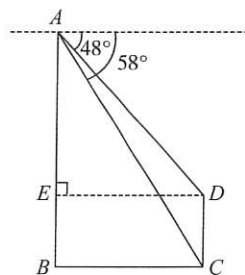
$\therefore \angle BOF = \angle EOF = \frac{180^\circ - \angle AOE}{2} = 60^\circ$ .

$$\therefore EF = OE \cdot \tan \angle EOF = 3 \times \tan 60^\circ = 3\sqrt{3}.$$

同(I)得  $\angle EFD = \angle OEF = 90^\circ$ ,

$$\therefore FD = \frac{EF}{\tan D} = \frac{3\sqrt{3}}{\tan 60^\circ} = 3.$$

22. 解: 如图, 过点 D 作  $DE \perp AB$ , 垂足为 E.



则  $\angle AED = \angle BED = 90^\circ$ .

由题意可知,  $BC = 78$ ,  $\angle ADE = 48^\circ$ ,  $\angle ACB = 58^\circ$ ,

$\angle ABC = 90^\circ$ ,  $\angle DCB = 90^\circ$ .

可得四边形 BCDE 为矩形.

$\therefore ED = BC = 78$ ,  $DC = EB$ .

在  $\text{Rt}\triangle ABC$  中,  $\tan \angle ACB = \frac{AB}{BC}$ ,

$$\therefore AB = BC \cdot \tan 58^\circ \approx 78 \times 1.60 \approx 125(\text{m}).$$

在  $\text{Rt}\triangle AED$  中,  $\tan \angle ADE = \frac{AE}{ED}$ ,

$$\therefore AE = ED \cdot \tan 48^\circ.$$

$$\therefore EB = AB - AE = BC \cdot \tan 58^\circ - ED \cdot \tan 48^\circ \approx 78 \times 1.60 - 78 \times 1.11 \approx 38.$$

$$\therefore DC = EB \approx 38 \text{ m}.$$

答: 甲建筑物的高度 AB 约为 125 m, 乙建筑物的高度 DC 约为 38 m.

23. 解:(I) 10 12 20.

(II) (i) 8; (ii) 16;

(iii) 当  $1 \leq x \leq 1.5$  时,  $y = 16x - 4$ ;

当  $1.5 < x \leq 3.5$  时,  $y = 20$ ;

当  $3.5 < x \leq 5$  时,  $y = -\frac{40}{3}x + \frac{200}{3}$ .

(III) 10 km.

24. 解:(I)  $60^\circ$   $(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ .

(II)  $\therefore$  四边形 OABC 为矩形,

$\therefore \angle QOP = 90^\circ$ ,  $\angle OCB = \angle QCD = 90^\circ$ ,  $CB \parallel OA$ ,

在  $\text{Rt}\triangle OPQ$  中,  $\angle OQP = 30^\circ$ ,  $OP = t$ ,

$$\therefore OQ = \frac{OP}{\tan \angle OQP} = \sqrt{3}t, \angle CDQ = \angle OPQ = 60^\circ.$$

$\therefore$  点  $C(0, 3)$ ,

$$\therefore OC = 3, \text{ 得 } CQ = OQ - OC = \sqrt{3}t - 3,$$

在  $\text{Rt}\triangle CDQ$  中,  $CD = CQ \cdot \tan \angle OQP = t - \sqrt{3}$ ,

根据折叠,知  $C'D=CD=t-\sqrt{3}$ ,  $\angle C'=\angle OCB=90^\circ$ ,

$$\angle C'DQ=\angle CDQ=60^\circ,$$

$$\therefore \angle C'DE=180^\circ-\angle C'DQ-\angle CDQ=60^\circ.$$

在  $\text{Rt}\triangle C'DE$  中,  $C'E=C'D \cdot \tan \angle C'DE=\sqrt{3}C'D$ ,

即  $C'E=\sqrt{3}t-3$ , 其中  $t$  的取值范围是  $\sqrt{3}<t<2\sqrt{3}$ .

$$(\text{III}) 12-5\sqrt{3} \leq S \leq 3\sqrt{3}.$$

①当  $2 \leq t < 2\sqrt{3}$  时, 由 (II) 知折叠后重合部分为四边形,

根据折叠, 知  $O'P=OP=t$ ,  $O'C'=OC=3$ ,

$$\therefore S_{\text{梯形}C'DPO'} = \frac{1}{2}(t-\sqrt{3}+t) \times 3 = 3t - \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

$$\therefore S_{\triangle C'DE} = \frac{1}{2} \times (t-\sqrt{3}) \times (\sqrt{3}t-3) = \frac{\sqrt{3}}{2}t^2 - 3t + \frac{3\sqrt{3}}{2},$$

$$\therefore S = S_{\text{梯形}C'DPO'} - S_{\triangle C'DE} = -\frac{\sqrt{3}}{2}t^2 + 6t - 3\sqrt{3}$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{2}(t-2\sqrt{3})^2 + 3\sqrt{3},$$

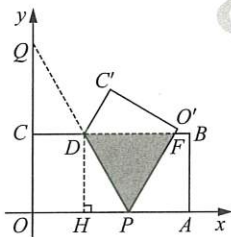
当  $2 \leq t < 2\sqrt{3}$  时,  $S$  随  $t$  的增大而增大,

当  $t=2$  时,  $S=12-5\sqrt{3}$ ; 当  $t=2\sqrt{3}$  时,  $S=3\sqrt{3}$ .

$$\therefore 12-5\sqrt{3} \leq S < 3\sqrt{3};$$

②当  $2\sqrt{3} \leq t \leq 4$  时, 折叠后重合部分为三角形,  $O'P$  与边  $BC$

相交于点  $F$ , 如图所示, 过点  $D$  作  $DH \perp x$  轴于点  $H$ .



$$\text{则 } DH=OC=3, PD=\frac{DH}{\sin \angle OPQ}=\frac{3}{\sin 60^\circ}=2\sqrt{3},$$

根据折叠, 知  $\angle O'PQ=\angle OPQ=60^\circ$ ,

由  $CB \parallel OA$ , 得  $\angle BDP=\angle OPQ=60^\circ$ ,

$\therefore \triangle PDF$  是等边三角形, 得  $DF=PD=2\sqrt{3}$ ,

$$\therefore S=S_{\triangle PDF}=\frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times 3=3\sqrt{3}.$$

即当  $2\sqrt{3} \leq t \leq 4$  时,  $S$  为定值  $3\sqrt{3}$ .

综上所述,  $12-5\sqrt{3} \leq S \leq 3\sqrt{3}$ .

$$25. \text{解: (I) 当 } b=-2 \text{ 时, } y=\frac{1}{4}x^2-2x-5=\frac{1}{4}(x-4)^2-9,$$

$\therefore$  抛物线的顶点坐标为  $(4, -9)$ .

$$(\text{II}) (\text{i}) \text{ 在 } y=\frac{1}{4}x^2+bx+2b-1 \text{ 中, 当 } x=0 \text{ 时, } y=2b-1,$$

$\therefore$  点  $C$  的坐标为  $(0, 2b-1)$ .

$$\therefore y=\frac{1}{4}x^2+bx+2b-1=(\frac{1}{2}x+1)(\frac{1}{2}x+2b-1),$$

$$\therefore \text{当 } y=0 \text{ 时, 解得 } x_1=-2, x_2=2-4b,$$

$\therefore$  点  $C$  在  $y$  轴负半轴,

$$\therefore 2b-1 < 0, \text{ 即 } b < \frac{1}{2}, \text{ 则 } 2-4b > 0,$$

$\therefore$  点  $A$  在点  $B$  的左侧,

$\therefore$  点  $B$  的坐标为  $(2-4b, 0)$ .

$\therefore$  点  $M$  的坐标为  $(0, 2)$ ,

$$\therefore MC=2-(2b-1)=3-2b.$$

在  $\text{Rt}\triangle BOM$  中, 由勾股定理, 得  $MB^2=(2-4b)^2+2^2$ .

$\therefore MB=MC$ , 即  $MB^2=MC^2$ ,

$$\therefore (2-4b)^2+2^2=(3-2b)^2,$$

$$\text{解得 } b=\frac{1}{2} \text{ 或 } b=-\frac{1}{6},$$

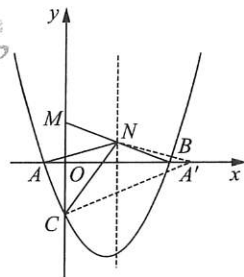
$$\text{又 } b < \frac{1}{2}, \therefore b=-\frac{1}{6}.$$

(ii) 由 (i) 知点  $A(-2, 0)$ , 点  $B(2-4b, 0)$ , 点  $C(0, 2b-1)$ ,

$\therefore$  点  $M$  是  $y$  轴上一点, 点  $N$  为  $BM$  的中点,

$\therefore$  随着点  $M$  的运动, 点  $N$  的运动轨迹为直线  $x=1-2b$ ,

如图, 作点  $A$  关于直线  $x=1-2b$  的对称点  $A'$ , 连接  $A'N$ ,  $A'C$ ,



则  $AN=A'N$ , 此时  $AN+CN=A'N+CN \geq A'C$ ,

即  $AN+CN$  的最小值为  $A'C=13$ ,

由对称的性质可知, 点  $A'$  的坐标为  $(4-4b, 0)$ ,

$\therefore$  点  $C$  在  $y$  轴负半轴上,

$$\therefore OC=1-2b.$$

在  $\text{Rt}\triangle A'OC$  中,  $A'C^2=OC^2+OA'^2$ ,

$$\text{即 } 13^2=(1-2b)^2+(4-4b)^2,$$

$$\text{解得 } b=-2 \text{ 或 } b=\frac{19}{5},$$

$$\therefore b < \frac{1}{2}, \therefore b=-2.$$

## ②024 南开区初中学业水平考试模拟(二)

1. B 2. A 3. C 4. D 5. D 6. B 7. A 8. D 9. C

10. D  $\therefore \angle ABC=90^\circ, BC=2, AB=\sqrt{5}$ ,

$$\therefore \angle C \neq \angle A \neq 45^\circ, AC=\sqrt{BC^2+AB^2}=3,$$

由作图可知  $CD=BC=BE=BG=BF=2, BD=EG$ ,

$$\therefore \triangle CBD \cong \triangle BEG(\text{SSS}).$$

$\therefore \angle GBE = \angle DCB \neq 45^\circ$ , 则  $BG$  不平分  $\angle ABE$ , 故 A 错误;

$\therefore \angle CBD = \angle BEG$ ,  $\therefore BD \parallel EG$ .

又  $BD = EG$ ,  $\therefore$  四边形  $BDGE$  为平行四边形.

$\therefore DG \parallel BE, DG = BE$ .

$\therefore$  四边形  $BCDG$  为菱形, 故 D 正确;

$\therefore \angle ABC = 90^\circ, \therefore \angle AHD = 90^\circ$ .

$\therefore AD = AC - CD = 1$ ,

又  $DH \parallel BC$ ,

$\therefore \frac{AH}{BH} = \frac{AD}{CD}, \frac{DH}{BC} = \frac{AD}{AC}$ , 得  $AH = \frac{\sqrt{5}}{3}, BH = \frac{2\sqrt{5}}{3}, DH = \frac{2}{3}$ .

$\therefore FH = BF - BH = 2 - \frac{2\sqrt{5}}{3}$ .

$\therefore FH \neq DH$ , 故 B 错误;

$\therefore BD = \sqrt{BH^2 + DH^2} = \sqrt{(\frac{2\sqrt{5}}{3})^2 + (\frac{2}{3})^2} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$ ,

$\therefore BD \neq BE$ , 故  $\square BDGE$  不是菱形, 故 C 错误.

11. C 12. C

13. 6 14. 22 15.  $2x^6 - x^5$  16. -1 (答案不唯一, 满足  $b \leq 0$  即可)

17. (I)  $90^\circ$  (II)  $\sqrt{5}$

(I)  $\because \triangle CAB, \triangle CDE$  均为等腰直角三角形,

$\therefore \angle ACB = \angle DCE = 90^\circ$ .

$\therefore \angle ACB - \angle ECF = \angle DCE - \angle ECF$ .

即  $\angle ACE = \angle BCD$ ,

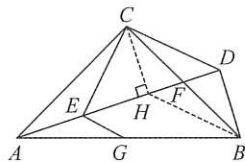
又  $AC = BC, EC = DC$ ,

$\therefore \triangle ACE \cong \triangle BCD$  (SAS).

$\therefore \angle CDB = \angle CEA$ .

$\therefore \angle ADB = \angle CDB - \angle EDC = \angle CEA - \angle EDC = \angle ECD = 90^\circ$ ;

(II) 如图, 过点  $C$  作  $CH \perp AD$  于点  $H$ , 连接  $BH$ ,



则  $\angle CHF = \angle BDF = 90^\circ$ ,

$\because \triangle CDE$  为等腰直角三角形,

$\therefore CH = EH = DH = \frac{1}{2} DE$ .

$\because F$  为  $BC$  的中点,

$\therefore CF = BF$ .

在  $\triangle CHF$  和  $\triangle BDF$  中,  $\begin{cases} \angle CHF = \angle BDF \\ \angle CFH = \angle BFD \\ CF = BF \end{cases}$

$\therefore \triangle CHF \cong \triangle BDF$  (AAS).

$\therefore CH = BD$ .

$\therefore AE = BD$ ,

$\therefore AE = CH = EH$ , 即  $E$  为  $AH$  的中点.

$\because G$  为  $AB$  的中点,

$\therefore EG = \frac{1}{2} BH$ .

$\because AB = 10$ ,

$\therefore AC = BC = 5\sqrt{2}$ .

在  $Rt\triangle ACH$  中,  $AH^2 + CH^2 = AC^2, AH = 2CH$ ,

$\therefore 4CH^2 + CH^2 = 50$ , 解得  $CH = \sqrt{10}$ .

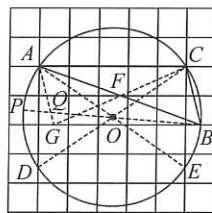
$\therefore DH = CH = BD = \sqrt{10}$ ,

$\therefore BH = \sqrt{DH^2 + BD^2} = 2\sqrt{5}$ .

$\therefore EG = \frac{1}{2} BH = \sqrt{5}$ .

18. (I) 5;

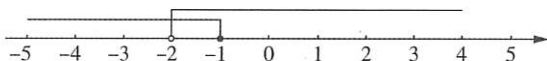
(II) 如图, 取圆与格线的交点  $D, E$ , 连接  $AE, CD$  交于点  $O$ ; 连接  $BO$  并延长与圆交于点  $P$ ; 取  $AB$  与格线的交点  $F$ , 连接  $CF$  并延长交格线于点  $G$ ; 连接  $AG$  交  $BP$  于点  $Q$ , 则点  $P, Q$  即为所求.



19. 解: (I)  $x > -2$ ;

(II)  $x \leq -1$ ;

(III)



(IV)  $-2 < x \leq -1$ .

20. 解: (I) 15 20.

(II) 观察条形统计图,

$$\therefore \bar{x} = \frac{1.50 \times 1 + 1.60 \times 2 + 1.65 \times 3 + 1.70 \times 5 + 1.75 \times 3 + 1.80 \times 1}{1 + 2 + 3 + 5 + 3 + 1}$$

$= 1.68$ ,

$\therefore$  这组数据的平均数是 1.68.

$\because$  在这组数据中, 1.70 出现了 5 次, 出现的次数最多,

$\therefore$  这组数据的众数是 1.70.

$\because$  将这组数据按从小到大的顺序排列, 其中处于中间位置的数是 1.70,

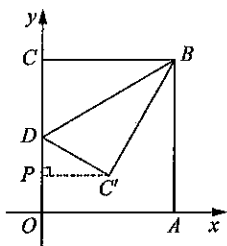
$\therefore$  这组数据的中位数是 1.70.

21. 解: (I)  $\because \angle ACB = 90^\circ, AC = BC = 8$ ,

$\therefore \angle CAB = \angle B = 45^\circ$ .



24. 解: (I) 如图, 过点  $C'$  作  $C'P \perp y$  轴于点  $P$ ,



$\because$  四边形  $OABC$  为矩形, 点  $A(3\sqrt{3}, 0)$ , 点  $C(0, 6)$ ,

$\therefore OA = BC = 3\sqrt{3}, OC = AB = 6$ .

在  $Rt\triangle BCD$  中,  $\angle CDB = 60^\circ$ ,

$$\therefore t = CD = \frac{BC}{\tan 60^\circ} = 3.$$

$\because \triangle BC'D$  是由  $\triangle BCD$  折叠得到的,

$\therefore C'D = CD = 3, \angle C'DB = \angle CDB = 60^\circ$ .

$\therefore \angle C'DP = 60^\circ$ .

$\because$  在  $Rt\triangle C'DP$  中,  $\cos \angle C'DP = \frac{DP}{C'D}, \sin \angle C'DP = \frac{C'P}{C'D}$ ,

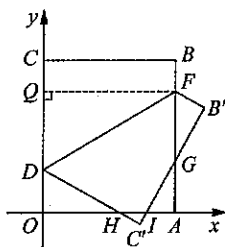
$$\therefore DP = C'D \cdot \cos 60^\circ = 3 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2},$$

$$C'P = C'D \cdot \sin 60^\circ = 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

$$\therefore OP = OC - CD - DP = 6 - 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}.$$

$\therefore$  点  $C'$  的坐标为  $(\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2})$ .

(II) (1) 如图, 过点  $F$  作  $FQ \perp y$  轴于点  $Q$ ,



则四边形  $QOAF, CQFB$  均为矩形,

$\therefore QF = OA = 3\sqrt{3}$ .

$\because \angle QDF = 60^\circ$ ,

$$\therefore DQ = \frac{QF}{\tan 60^\circ} = 3.$$

$\therefore BF = CQ = t - 3, OD = 6 - t, AF = OQ = 9 - t$ ,

$$\therefore S_{\text{梯形DOAF}} = \frac{1}{2} (6 - t + 9 - t) \times 3\sqrt{3} = -3\sqrt{3}t + \frac{45\sqrt{3}}{2},$$

同(I)得  $\angle ODH = 60^\circ$ ,

$$\therefore OH = OD \cdot \tan 60^\circ = \sqrt{3}(6 - t).$$

$$\therefore S_{\triangle ODH} = \frac{\sqrt{3}}{2} (6 - t)^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} t^2 - 6\sqrt{3}t + 18\sqrt{3}.$$

$\because OC \parallel AB$ ,

$\therefore \angle BFD = 180^\circ - \angle CDF = 120^\circ, \angle DFG = \angle CDF = 60^\circ$ .

由折叠知,  $B'F = BF = t - 3, \angle B'FD = \angle BFD = 120^\circ$ ,

$\therefore \angle B'FG = 60^\circ$ .

$\therefore \angle B'GF = \angle AGI = 30^\circ$ .

$\therefore FG = 2B'F = 2t - 6, AG = 15 - 3t$ .

$$\therefore AI = AG \cdot \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} (15 - 3t).$$

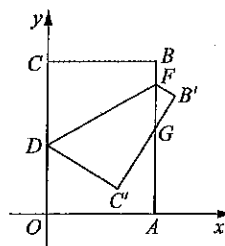
$$\therefore S_{\triangle AGI} = \frac{\sqrt{3}}{6} (15 - 3t)^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2} t^2 - 15\sqrt{3}t + \frac{75\sqrt{3}}{2}.$$

$$\therefore S = S_{\text{梯形DOAF}} - S_{\triangle ODH} - S_{\triangle AGI} = -2\sqrt{3}t^2 + 18\sqrt{3}t - 33\sqrt{3},$$

其中  $t$  的取值范围是  $4 < t < 5$ .

$$(II) \frac{49\sqrt{3}}{9} < S \leq \frac{15\sqrt{3}}{2}.$$

① 当  $\frac{7}{2} < t \leq 4$  时, 如图, 重合部分为四边形  $DC'GF$ ,



此时  $S = S_{\text{梯形BC'DF}} - S_{\triangle B'FG}$

$$= \frac{1}{2} (t - 3 + t) \times 3\sqrt{3} - \frac{1}{2} (t - 3) \times \sqrt{3} (t - 3)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} t^2 + 6\sqrt{3}t - 9\sqrt{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2} (t - 6)^2 + 9\sqrt{3},$$

$\therefore$  当  $\frac{7}{2} < t \leq 4$  时,  $S$  随  $t$  的增大而增大,

$$\therefore \frac{47\sqrt{3}}{8} < S \leq 7\sqrt{3};$$

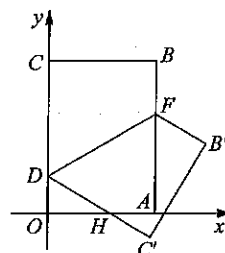
② 当  $4 < t < 5$  时, 由(1)可知  $S = -2\sqrt{3}t^2 + 18\sqrt{3}t - 33\sqrt{3} =$

$$-2\sqrt{3} (t - \frac{9}{2})^2 + \frac{15\sqrt{3}}{2},$$

$\because 4 < t < 5$ ,

$$\therefore 7\sqrt{3} < S \leq \frac{15\sqrt{3}}{2};$$

③ 当  $5 \leq t < \frac{17}{3}$  时, 如图, 重合部分为四边形  $DHAF$ ,



此时  $S = S_{\text{梯形DOAF}} - S_{\triangle ODH}$

$$= -3\sqrt{3}t + \frac{45\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} (6 - t)^2$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{2} t^2 + 3\sqrt{3}t + \frac{9\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} (t - 3)^2 + 9\sqrt{3},$$

∵ 当  $5 \leq t < \frac{17}{3}$  时,  $S$  随  $t$  的增大而减小,

$$\therefore \frac{49\sqrt{3}}{9} < S \leq 7\sqrt{3}.$$

综上所述,  $\frac{49\sqrt{3}}{9} < S \leq \frac{15\sqrt{3}}{2}$ .

25. 解: (I) 当  $c=6$  时,  $A(-3,0), D(3,6), y=ax^2+bx+6$ ,

$$\therefore \begin{cases} 9a-3b+6=0 \\ 9a+3b+6=6 \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} a=-\frac{1}{3} \\ b=1 \end{cases}.$$

∴ 抛物线的解析式为  $y=-\frac{1}{3}x^2+x+6$ .

$$\therefore y=-\frac{1}{3}x^2+x+6=-\frac{1}{3}(x-\frac{3}{2})^2+\frac{27}{4},$$

∴ 顶点  $E$  的坐标为  $(\frac{3}{2}, \frac{27}{4})$ .

(II) ∵ 抛物线  $y=ax^2+bx+c$  与  $y$  轴相交于点  $C$ ,

∴ 点  $C$  的坐标为  $(0,c)$ .

又点  $D(3,c)$  在抛物线上,

∴ 抛物线的对称轴为  $x=\frac{3}{2}$ , 即  $-\frac{b}{2a}=\frac{3}{2}$ , 可得  $b=-3a$ .

∵  $c=-10a$ ,

∴ 抛物线的解析式为  $y=ax^2-3ax-10a$ .

即  $y=a(x^2-3x-10)=a(x+2)(x-5)$ ,

令  $y=0$ , 得  $x_1=-2, x_2=5$ ,

∴ 点  $A$  在点  $B$  的左侧,

∴  $A(-2,0), B(5,0)$ .

即  $3-c=-2$ , 得  $c=5, a=-\frac{1}{2}, D(3,5)$ ,

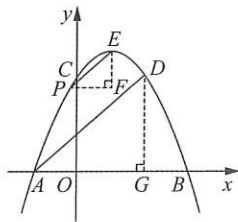
∴ 抛物线的解析式为  $y=-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x+5=-\frac{1}{2}(x-\frac{3}{2})^2+\frac{49}{8}$ .

∴  $E(\frac{3}{2}, \frac{49}{8})$ .

∴ 点  $P$  的横坐标为  $m$ ,

∴  $P(m, -\frac{1}{2}m^2+\frac{3}{2}m+5)$ .

如图, 过点  $D$  作  $DG \perp x$  轴于点  $G$ , 过点  $E$  作  $EF \parallel y$  轴, 过点  $P$  作  $PF \parallel x$  轴,  $EF$  与  $PF$  交于点  $F$ ,



则  $G(3,0), F(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}m^2+\frac{3}{2}m+5), \angle PFE=90^\circ$ ,

∴  $AG=5, DG=5$ , 得  $\angle DAG=\angle ADG=45^\circ$ ,

∴  $EP \parallel AD$ ,

∴  $\angle EPF=45^\circ$ , 得  $PF=EF$ .

$$\text{即 } \frac{3}{2}-m=\frac{49}{8}-(-\frac{1}{2}m^2+\frac{3}{2}m+5),$$

解得  $m=-\frac{1}{2}$ , 或  $m=\frac{3}{2}$  (舍),

∴  $m$  的值为  $-\frac{1}{2}$ .

$$(III) a=-\frac{2\sqrt{2}}{3}, m=\frac{6-3\sqrt{2}}{4}.$$

由 (II) 可知抛物线的对称轴为  $x=\frac{3}{2}$ , 即  $b=-3a$ ,

又  $A(3-c,0)$ ,

∴ 抛物线的解析式为  $y=ax^2-3ax+c, B(c,0)$ ,

$$\therefore ac^2-3ac+c=0.$$

又  $c \neq 0$ , 则  $c=3-\frac{1}{a}$ ,

$$\therefore y=ax^2-3ax+3-\frac{1}{a}.$$

当  $x=\frac{3}{2}$  时,  $y=-\frac{9}{4}a-\frac{1}{a}+3$ , 即  $E(\frac{3}{2}, -\frac{9}{4}a-\frac{1}{a}+3)$ ,

又  $P(m, am^2-3am+3-\frac{1}{a})$ ,

同 (II), 得  $\frac{3}{2}-m=-\frac{9}{4}a-\frac{1}{a}+3-(am^2-3am+3-\frac{1}{a})$ ,

整理, 得  $(m-\frac{3}{2})[a(m-\frac{3}{2})-1]=0$ , 即  $m=\frac{1}{a}+\frac{3}{2}$ ,

$$\therefore P(\frac{1}{a}+\frac{3}{2}, -\frac{9}{4}a+3).$$

由  $A(3-c,0), D(3,c)$ , 得直线  $AD$  的解析式为  $y=x-3+c$ ,

即  $y=x-\frac{1}{a}$ ,

∴  $PQ \parallel x$  轴,  $BQ \parallel y$  轴,

∴  $Q(c, -\frac{9}{4}a+3)$ , 即  $Q(3-\frac{1}{a}, -\frac{9}{4}a+3)$ .

∴ 点  $Q$  在直线  $AD$  上,

$$\therefore -\frac{9}{4}a+3=3-\frac{1}{a}-\frac{1}{a}, \text{即 } a^2=\frac{8}{9},$$

解得  $a=\frac{2\sqrt{2}}{3}$  (舍), 或  $a=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$ ,

$$\therefore a=-\frac{2\sqrt{2}}{3}, m=\frac{6-3\sqrt{2}}{4}.$$

## ② 2024 河北区初中学业水平考试模拟(二)

1. D 2. A 3. A 4. C 5. B 6. D 7. D 8. A 9. B 10. A

11. C

12. B 由题意, 抛物线过点  $(0,1.6), (4,4), (8,0)$ ,

设二次函数的解析式为  $y=ax^2+bx+c$ ,

$$\text{有} \begin{cases} c=1.6 \\ 16a+4b+c=4 \\ 64a+8b+c=0 \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} a=-\frac{1}{5} \\ b=\frac{7}{5} \\ c=\frac{8}{5} \end{cases}.$$

∴二次函数的解析式为  $y = -\frac{1}{5}x^2 + \frac{7}{5}x + \frac{8}{5}$ , 故②正确;

$$\therefore y = -\frac{1}{5}x^2 + \frac{7}{5}x + \frac{8}{5} = -\frac{1}{5}(x-3.5)^2 + 4.05,$$

∴铅球飞行至水平距离 3.5 米时, 铅球到达最大高度, 最大高度为 4.05 米, 故①正确;

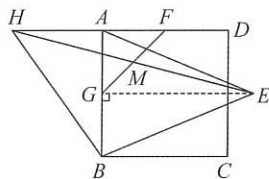
∴铅球从出手到飞行至最高点的水平距离为 3.5 米,

而从最高点运动至落地的水平距离为  $8-3.5=4.5$ (米), 故③错误.

13.  $\frac{3}{10}$  14. 7 15.  $9a^2b^6$  16. -5

17. (I) 60 (II)  $\sqrt{149}$

(I) 如图, 过 E 作  $EG \perp AB$  于 G,



$$\because AE = BE,$$

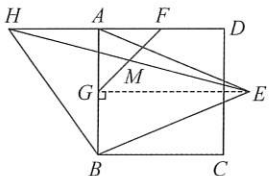
$$\therefore AG = \frac{1}{2}AB = 5.$$

$$\because AE = 13,$$

$$\therefore EG = \sqrt{AE^2 - AG^2} = 12.$$

$$\therefore \triangle ABE \text{ 的面积为 } \frac{1}{2} \times 10 \times 12 = 60;$$

(II) 如图, 连接 EG,



$$\because G \text{ 为 } AB \text{ 的中点}, AE = BE,$$

$$\therefore AG = BG, EG \perp AB.$$

$$\because \text{四边形 } ABCD \text{ 是正方形},$$

$$\therefore \angle DAB = 90^\circ.$$

$$\therefore AD \parallel EG.$$

$$\therefore \angle FHM = \angle GEM, \angle HFM = \angle EGM.$$

$$\because M \text{ 为 } GF \text{ 的中点},$$

$$\therefore FM = GM.$$

$$\therefore \triangle HFM \cong \triangle EGM (\text{AAS}).$$

$$\therefore HF = EG.$$

$$\text{由 (I) 知, } EG = 12,$$

$$\therefore HF = 12.$$

$$\because F \text{ 为 } AD \text{ 的中点},$$

$$\therefore AF = \frac{1}{2}AD = 5.$$

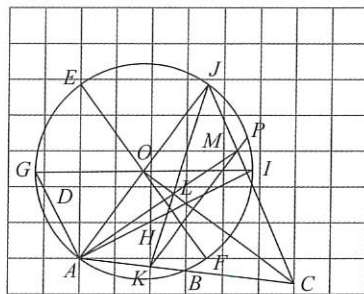
$$\therefore AH = HF - AF = 7.$$

$$\because \angle HAB = \angle DAB = 90^\circ,$$

$$\therefore BH = \sqrt{AH^2 + AB^2} = \sqrt{7^2 + 10^2} = \sqrt{149}.$$

18. (I)  $\sqrt{5}$ ;

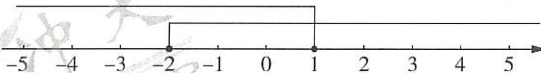
(II) 如图, 取圆与格线的交点 E, F, 连接 EF; 取格点 H, 连接 AH 并延长交圆于点 I; 延长 AD 交圆于点 G, 连接 GI 交 EF 于点 O; 连接 AO 并延长交圆于点 J, 连接 CJ, OC; 取 AB 与格线的交点 K, 连接 JK 交 OC 于点 L; 连接 AL 并延长交 CJ 于点 M; 连接 KM 并延长交圆于点 P, 则点 P 即为所求.



19. 解: (I)  $x \geq -2$ ;

(II)  $x \leq 1$ ;

(III)



(IV)  $-2 \leq x \leq 1$ .

20. 解: (I) 40 15.

(II) 观察条形统计图,

$$\therefore \bar{x} = \frac{7 \times 5 + 8 \times 8 + 9 \times 9 + 10 \times 8 + 11 \times 6 + 12 \times 4}{5 + 8 + 9 + 8 + 6 + 4} = 9.35,$$

$$\therefore \text{这组数据的平均数是 } 9.35.$$

$$\because \text{在这组数据中, } 9 \text{ 出现了 } 9 \text{ 次, 出现的次数最多},$$

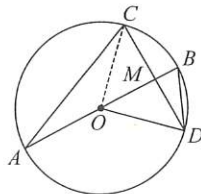
$$\therefore \text{这组数据的众数是 } 9.$$

$$\because \text{将这组数据按从小到大的顺序排列, 其中处于中间位置的}$$

$$\text{两个数都是 } 9, \text{ 有 } \frac{9+9}{2} = 9,$$

$$\therefore \text{这组数据的中位数是 } 9.$$

21. 解: (I) 如图, 连接 OC,



$$\because \widehat{BC} = \widehat{BD}, \angle CDB = 22.5^\circ,$$

$$\therefore \angle COB = \angle DOB = 2\angle CDB = 45^\circ.$$

$$\because OB = OD,$$

$$\therefore \angle ODB = \angle ABD = 67.5^\circ.$$

$$\therefore \angle ACD = \angle ABD = 67.5^\circ.$$

中汇数学[277]

当  $t=3$  时,  $S$  取得最大值  $\frac{9\sqrt{3}}{2}$ ;

②当  $3 < t \leq \frac{11}{2}$  时, 由 (i) 可得  $S = -\frac{3\sqrt{3}}{2}t^2 + 12\sqrt{3}t - 18\sqrt{3} = -\frac{3\sqrt{3}}{2}(t-4)^2 + 6\sqrt{3}$ ,

$\therefore$  当  $t = \frac{11}{2}$  时,  $S$  取得最小值  $\frac{21\sqrt{3}}{8}$ ;

当  $t=4$  时,  $S$  取得最大值  $6\sqrt{3}$ .

综上所述,  $S$  的最大值为  $6\sqrt{3}$ , 最小值为  $\frac{21\sqrt{3}}{8}$ .

25. 解: (I) (i) 当  $a=-1, c=3$  时,  $y = -x^2 + 2x + 3$ ,

即  $y = -(x-1)^2 + 4$ , 则顶点  $D$  的坐标为  $(1, 4)$ ,

令  $y=0$ , 得  $-x^2 + 2x + 3 = 0$ , 解得  $x_1 = -1, x_2 = 3$ ,

$\therefore$  点  $A$  在点  $B$  的左侧,

$\therefore$  点  $A$  的坐标为  $(-1, 0)$ .

(ii) 由 (i) 可知点  $B(3, 0)$ , 设  $P(m, -m^2 + 2m + 3)$ ,

$\therefore$  点  $P$  在第一象限,  $\therefore 0 < m < 3$ ,

$\therefore DM \perp x$  轴于点  $M, D(1, 4)$ ,

$\therefore M(1, 0)$ , 即  $OM=1$ ,

$\therefore$  点  $N$  在  $y$  轴正半轴上,  $\angle NMO = 60^\circ$ ,

$\therefore$  在  $Rt\triangle NMO$  中,  $ON = OM \cdot \tan \angle NMO = \sqrt{3}$ ,

即  $N(0, \sqrt{3})$ ,

设直线  $MN$  的解析式为  $y = kx + b'$ ,

$$\text{有} \begin{cases} 0 = k + b' \\ b' = \sqrt{3} \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} k = -\sqrt{3} \\ b' = \sqrt{3} \end{cases},$$

$\therefore$  直线  $MN$  的解析式为  $y = -\sqrt{3}x + \sqrt{3}$ ,

由  $PH \perp MN, PE \perp x$  轴交  $MN$  于点  $F$ ,

得  $F(m, -\sqrt{3}m + \sqrt{3})$ ,  $\angle HFP = \angle MFE = 90^\circ - \angle NMO = 30^\circ$ ,

$\therefore PF = 2PH = 2\sqrt{3}$ ,

$\therefore PF = -m^2 + 2m + 3 - (-\sqrt{3}m + \sqrt{3})$ ,

$\therefore -m^2 + 2m + 3 - (-\sqrt{3}m + \sqrt{3}) = 2\sqrt{3}$ ,

解得  $m_1 = \sqrt{3} - 1, m_2 = 3$  (舍去).

即  $E(\sqrt{3} - 1, 0)$ .

(II) 当  $c = -3a$  时,  $y = ax^2 - 2ax - 3a = a(x-1)^2 - 4a$ ,

$\therefore$  点  $C(0, -3a)$ , 顶点  $D(1, -4a)$ , 对称轴为直线  $x=1$ ,

$\therefore$  点  $P$  与点  $C$  关于抛物线的对称轴对称,

$\therefore$  点  $P(2, -3a)$ ,

由 (ii) 可知  $M(1, 0), N(0, \sqrt{3})$ ,

$\therefore a < -1, \therefore -3a > 3$ ,

$\therefore$  点  $C$  在点  $N$  的上方,

$\therefore NC = -3a - \sqrt{3}$ ,

由  $PE \perp x$  轴, 得  $E(2, 0)$ ,

$\therefore OE = 2, ME = OE - OM = 1$ ,

$\therefore \angle FME = \angle NMO = 60^\circ$ ,

$\therefore MF = \frac{ME}{\cos \angle FME} = \frac{1}{\cos 60^\circ} = 2$ ,

$\therefore 2NC + \sqrt{3}MF = 7\sqrt{3}$ ,

$\therefore 2(-3a - \sqrt{3}) + 2\sqrt{3} = 7\sqrt{3}$ , 解得  $a = -\frac{7\sqrt{3}}{6}$ ,

$\therefore$  顶点  $D$  的坐标为  $(1, \frac{14\sqrt{3}}{3})$ .

## 2024 河东区初中学业水平考试模拟(二)

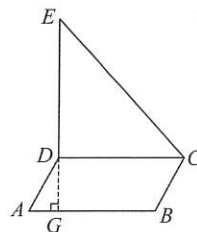
1. B 2. D 3. C 4. D 5. B 6. C 7. B 8. C 9. A 10. D

11. A 12. B

13.  $\frac{4}{9}$  14. 2 15.  $-2b^2$  16. -7

17. (I) 6 (II)  $\sqrt{91}$

(I) 如图, 过点  $D$  作  $DG \perp AB$  于点  $G$ ,



$\therefore \angle DAB = 60^\circ$ ,

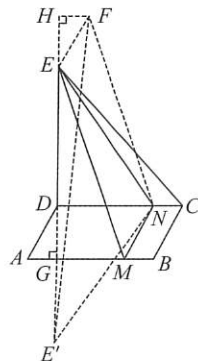
$\therefore DG = AD \cdot \sin \angle DAB = \sqrt{3} \times \sin 60^\circ = \frac{3}{2}$ ,

$\therefore$  四边形  $ABCD$  是平行四边形,

$\therefore AB = DC = 4$ ,

$\therefore S_{\square ABCD} = AB \cdot DG = 4 \times \frac{3}{2} = 6$ ;

(II) 如图, 过点  $E$  作  $EF \parallel MN$ , 且  $EF = MN$ , 连接  $FN$ , 作点  $E$  关于  $DC$  的对称点  $E'$ , 连接  $E'N$ ,



则四边形  $MNFE$  为平行四边形,  $EN = E'N$ ,

$\therefore EM = FN$ ,

$\therefore EM + EN = FN + E'N$ ,

$\therefore$  当满足条件的点  $N$  落在直线  $FE'$  上时,  $EM + EN$  取得最小值, 此时  $EM + EN = FE'$ ,

由对称可知  $DE' = DE = 4$ , 则  $EE' = 8$ ,

$\because MN \parallel BC$ , 四边形  $ABCD$  为平行四边形,

$$\therefore MN = BC = AD = \sqrt{3},$$

$$\therefore EF = MN = \sqrt{3},$$

过点  $F$  作  $FH \perp E'E$  的延长线与点  $H$ ,

则  $FH \parallel AB \parallel DC$ ,

又  $EF \parallel MN \parallel BC$ ,

$$\therefore \angle HFE = \angle DCB = \angle DAB = 60^\circ,$$

$$\therefore EH = EF \cdot \sin 60^\circ = \frac{3}{2}, FH = EF \cdot \cos 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

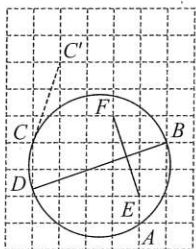
$$\therefore E'H = EE' + EH = 8 + \frac{3}{2} = \frac{19}{2},$$

$$\therefore FE' = \sqrt{FH^2 + E'H^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{19}{2}\right)^2} = \sqrt{91},$$

即  $EM + EN$  的最小值为  $\sqrt{91}$ .

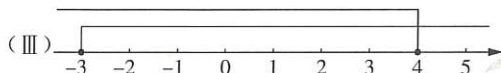
18. (I)  $\frac{15}{2}$ ;

(II) 如图, 取格点  $C'$ , 连接  $CC'$ , 则  $CC'$  即为所求.



19. 解: (I)  $x \geq -3$ ;

(II)  $x \leq 4$ ;



(IV)  $-3 \leq x \leq 4$ .

20. 解: (I) 50 24.

(II) 观察条形统计图,

$$\therefore \bar{x} = \frac{61 \times 9 + 62 \times 10 + 63 \times 5 + 64 \times 14 + 65 \times 12}{50} = 63.2,$$

$\therefore$  这组数据的平均数是 63.2.

$\therefore$  在这组数据中, 64 出现了 14 次, 出现的次数最多,

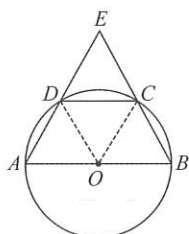
$\therefore$  这组数据的众数是 64.

$\therefore$  将这组数据按从小到大的顺序排列, 其中处于中间位置的

两个数都是 64, 有  $\frac{64+64}{2} = 64$ ,

$\therefore$  这组数据的中位数是 64.

21. 解: (I) 如图, 连接  $OC, OD$ ,



$\because C$  是弧  $BD$  的中点,

$$\therefore \widehat{BC} = \widehat{CD},$$

$$\therefore \angle BOC = \angle COD,$$

$$\because CD \parallel AB,$$

$$\therefore \angle BOC = \angle OCD,$$

$$\therefore \angle OCD = \angle COD,$$

$$\therefore OD = CD,$$

$$\therefore OC = OD = CD,$$

$$\therefore \triangle OCD \text{ 为等边三角形},$$

$$\therefore \angle COD = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle BOC = \angle AOD = 60^\circ,$$

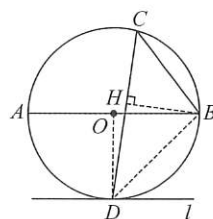
$$\text{又 } OA = OD, OB = OC,$$

$$\therefore \triangle OAD, \triangle OBC \text{ 都是等边三角形},$$

$$\therefore \angle A = \angle B = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle E = 60^\circ.$$

(II) 如图, 连接  $OD, BD$ , 过  $B$  点作  $BH \perp CD$  于点  $H$ ,



$\because$  直线  $l$  为  $\odot O$  的切线,

$$\therefore OD \perp l,$$

$$\because l \parallel AB,$$

$$\therefore OD \perp AB,$$

$$\therefore \angle BOD = 90^\circ,$$

$$\because OB = OD = \frac{1}{2} AB = 5,$$

$$\therefore BD = \sqrt{OB^2 + OD^2} = 5\sqrt{2},$$

$$\because \angle BCD = \frac{1}{2} \angle BOD = 45^\circ,$$

$$\therefore \triangle BCH \text{ 为等腰直角三角形},$$

$$\therefore CH = BH = \frac{\sqrt{2}}{2} BC = \frac{\sqrt{2}}{2} \times 6 = 3\sqrt{2},$$

$$\text{在 Rt} \triangle BDH \text{ 中}, DH = \sqrt{BD^2 - BH^2} = \sqrt{(5\sqrt{2})^2 - (3\sqrt{2})^2} = 4\sqrt{2},$$

$$\therefore CD = CH + DH = 3\sqrt{2} + 4\sqrt{2} = 7\sqrt{2}.$$

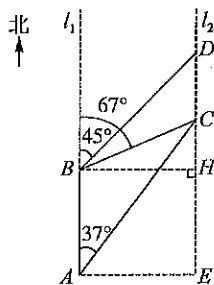
22. 解: (I) 由题意得  $AB = 1500 \text{ m}$ ,  $\angle CBD = 67^\circ - 45^\circ = 22^\circ$ .

(II) (i) 由题意得  $AE \perp EC$ ,  $\angle ACE = \angle BAC = \alpha$ ,

在  $\text{Rt} \triangle AEC$  中,  $\tan \angle ACE = \frac{AE}{EC}$ ,  $AE = x$ ,

$$\therefore EC = \frac{AE}{\tan \angle ACE} = \frac{x}{\tan \alpha}, \text{ 即线段 } EC \text{ 的长为 } \frac{x}{\tan \alpha} \text{ m}.$$

(Ⅱ)如图,过点B作 $BH \perp l_2$ 于H.



则四边形BAEH为矩形,

$$\therefore BH=AE=x, EH=AB=1500,$$

在 $Rt\triangle BHC$ 中, $\angle BCH=67^\circ$ ,  $\tan \angle BCH = \frac{BH}{CH}$ ,

$$\therefore CH = \frac{BH}{\tan 67^\circ} = \frac{x}{\tan 67^\circ},$$

$$\therefore EC - CH = EH,$$

$$\therefore \frac{x}{\tan 37^\circ} - \frac{x}{\tan 67^\circ} = 1500, \text{ 即 } x = \frac{1500 \tan 37^\circ \tan 67^\circ}{\tan 67^\circ - \tan 37^\circ},$$

在 $Rt\triangle BHD$ 中, $\angle BDH=45^\circ$ ,

$$\therefore DH=BH=x,$$

$$\therefore CD=DH-CH=x - \frac{x}{\tan 67^\circ} = \frac{1500 \tan 37^\circ (\tan 67^\circ - 1)}{\tan 67^\circ - \tan 37^\circ} \approx$$

$$\frac{1500 \times 0.75 \times (2.36 - 1)}{2.36 - 0.75} \approx 950(\text{m}).$$

答:大桥CD的长度约为950 m.

23. 解:(Ⅰ)(Ⅰ)200 360 120;(Ⅱ)20;

(Ⅲ)当 $48 \leq x \leq 58$ 时, $y = -30x + 1860$ ;

当 $58 < x \leq 78$ 时, $y = -6x + 468$ .

(Ⅱ)400 km.

24. 解:(Ⅰ) $60^\circ$  ( $\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}$ ).

(Ⅱ) $\because$ 点A(3,0),  $\therefore OA=3$ .

$$\therefore OQ=t, \therefore QA=3-t.$$

根据折叠,知 $O'Q=OQ=t$ ,  $\angle O' = \angle COQ = 90^\circ$ ,

由(Ⅰ)知 $\angle O'QA = 60^\circ$ ,

$$\therefore \angle QDA = 30^\circ.$$

$$\therefore QD = 2QA = 2(3-t) = 6-2t,$$

$$\therefore O'D = O'Q - QD = 3t-6.$$

在 $Rt\triangle O'ED$ 中, $\angle EDO' = \angle QDA = 30^\circ$ ,

$$\therefore O'E = O'D \cdot \tan \angle EDO' = (3t-6) \cdot \tan 30^\circ = \sqrt{3}t - 2\sqrt{3},$$

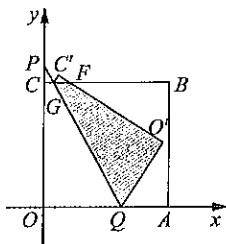
其中t的取值范围是 $2 < t < \sqrt{3} + 1$ .

$$(Ⅲ) 9 - 3\sqrt{3}, t = \frac{\sqrt{3}+3}{2}.$$

设折叠后重合部分的面积为S.

①当 $0 < t < \sqrt{3}$ 时,重合部分为 $\triangle O'PQ$ ,显然此时S不是最大值;

②当 $\sqrt{3} < t \leq 2$ 时,重合部分为四边形 $FO'QG$ ,如图所示,



$$\therefore OP = \sqrt{3}OQ = \sqrt{3}t,$$

$$\therefore PC = OP - OC = \sqrt{3}t - 3, C'G = CG = PC \cdot \tan 30^\circ = t - \sqrt{3},$$

由折叠可知 $\angle PGC' = \angle PGC = 90^\circ - \angle OPQ = 60^\circ$ ,

$$\therefore \angle FGC' = 60^\circ, C'F = C'G \cdot \tan 60^\circ = \sqrt{3}(t - \sqrt{3}),$$

$$\therefore S_{\triangle FGC'} = \frac{\sqrt{3}}{2}(t - \sqrt{3})^2,$$

$$\therefore S_{\text{梯形}O'CGQ} = \frac{1}{2}(t - \sqrt{3} + t) \times 3 = 3t - \frac{3\sqrt{3}}{2},$$

$$\therefore S = S_{\text{梯形}O'CGQ} - S_{\triangle FGC'} = -\frac{\sqrt{3}}{2}t^2 + 6t - 3\sqrt{3},$$

$\therefore$ 对称轴为 $x = 2\sqrt{3}$ ,

$\therefore$ 当 $t=2$ 时,S取得最大值为 $12 - 5\sqrt{3}$ ;

③当 $2 < t < \sqrt{3} + 1$ 时,设PQ与边BC交于点G,

由(Ⅱ)可知重合部分为五边形 $FGQDE$ ,  $O'D = 3t - 6$ ,

$$O'E = \sqrt{3}t - 2\sqrt{3},$$

$$\therefore S_{\triangle DEO'} = \frac{\sqrt{3}}{2}(t - 2)^2,$$

$$\therefore S = S_{\text{梯形}O'CGQ} - S_{\triangle FGC'} - S_{\triangle DEO'} = -2\sqrt{3}t^2 + (6 + 6\sqrt{3})t -$$

$$9\sqrt{3} = -2\sqrt{3}(t - \frac{\sqrt{3}+3}{2})^2 + 9 - 3\sqrt{3},$$

$\therefore$ 当 $t = \frac{\sqrt{3}+3}{2}$ 时,S取得最大值为 $9 - 3\sqrt{3}$ ;

④当 $\sqrt{3} + 1 \leq t \leq 3$ 时,重合部分的面积逐渐减小,此时S不是最大值.

综上所述,当 $t = \frac{\sqrt{3}+3}{2}$ 时,S取得最大值为 $9 - 3\sqrt{3}$ .

25. 解:(Ⅰ)(Ⅰ) $\because x=2$ 是抛物线的对称轴,且 $a=1$ ,

$$\therefore -\frac{b}{2a} = -\frac{b}{2} = 2,$$

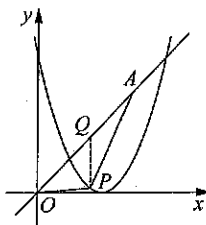
$$\therefore b = -4,$$

$$\therefore \text{抛物线的解析式为 } y = x^2 - 4x + 4,$$

当 $y=0$ 时,由 $x^2 - 4x + 4 = 0$ ,解得 $x_1 = x_2 = 2$ ,

$\therefore$ 抛物线与x轴的交点坐标为(2,0).

(Ⅱ)如图,过点P作 $PQ \parallel y$ 轴,交OA于点Q,



设  $P(m, m^2 - 4m + 4)$ ,

由点  $O(0, 0)$ , 点  $A(3, 3)$ , 可得直线  $OA$  的解析式为  $y = x$ ,

$\therefore Q(m, m)$ ,

$\therefore PQ = m - (m^2 - 4m + 4) = -m^2 + 5m - 4$ ,

$\therefore S_{\triangle OPA} = S_{\triangle OPQ} + S_{\triangle APQ} = -\frac{3}{2}(m^2 - 5m + 4) = -\frac{3}{2}(m -$

$\frac{5}{2})^2 + \frac{27}{8}$ ,

$\therefore$  当  $m = \frac{5}{2}$  时,  $\triangle OPA$  面积最大,

此时点  $P$  坐标为  $(\frac{5}{2}, \frac{1}{4})$ .

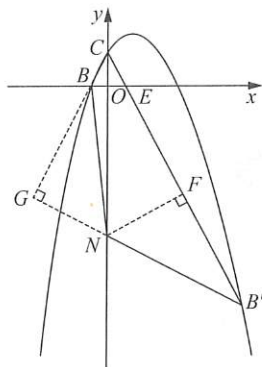
(II)  $\because$  抛物线过点  $B(-2, 0)$ , 得  $4a - 2b + 4 = 0$ ,

又  $b = -6a$ , 解得  $a = -\frac{1}{4}$ ,  $b = \frac{3}{2}$ ,

$\therefore$  抛物线的解析式为  $y = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + 4$ ,

当  $x = 0$  时,  $y = 4$ ,  $\therefore C(0, 4)$ ,

如图, 过点  $N$  作  $NF \perp B'C$  交  $B'C$  于点  $F$ , 过点  $N$  作  $NG \perp BC$  交  $CB$  延长线于点  $G$ , 设  $B'C$  与  $x$  轴交于  $E$ ,



则  $\angle G = \angle CFN = 90^\circ$ ,

$\therefore \angle FCG + \angle GNF = 180^\circ$ ,

$\because \angle BNB' + \angle BCB' = 180^\circ$ ,

$\therefore \angle BNB' = \angle GNF$ ,

$\therefore \angle BNG = \angle B'NF$ ,

由旋转可得  $BN = B'N$ ,

又  $\angle G = \angle B'FN = 90^\circ$ ,

$\therefore \triangle NGB \cong \triangle NFB'$  (AAS),

$\therefore NG = NF$ ,

$\therefore NC$  平分  $\angle BCB'$ ,

$\because OC \perp BE$ ,

$\therefore OE = OB = 2$ ,

$\therefore E(2, 0)$ ,

$\therefore$  直线  $CE$  的解析式为  $y = -2x + 4$ ,

由  $-2x + 4 = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + 4$ , 解得  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 14$ ,

$\therefore B'(14, -24)$ ,

$\because BN = B'N$ ,  $N(0, n)$ ,

$\therefore (-2)^2 + n^2 = 14^2 + (n + 24)^2$ , 解得  $n = -16$ .

## 23 2024 红桥区初中学业水平考试模拟(二)

1. C 2. B 3. B 4. D 5. A 6. C 7. C 8. A 9. B 10. C

11. A

12. D 设  $AE = AF = CG = CH = x$ , 铺设草坪的面积为  $y_1$ ,

则  $DE = BG = 20 - x$ ,  $DH = BF = 40 - x$ ,

$\therefore y_1 = \frac{1}{2}x^2 \times 2 + \frac{1}{2}(40 - x)(20 - x) \times 2 = 2x^2 - 60x + 800$ ,

当  $y_1 = 360$  时,  $2x^2 - 60x + 800 = 360$ , 即  $x^2 - 30x + 220 = 0$ ,

$\therefore \Delta = (-30)^2 - 4 \times 1 \times 220 = 20 > 0$ ,

$\therefore$  铺设草坪的面积可以是  $360 \text{ m}^2$ , 故①正确;

设种花的面积为  $y_2$ ,

则  $y_2 = 40 \times 20 - y_1 = -2x^2 + 60x = -2(x - 15)^2 + 450$ ,

$\therefore$  种花的面积的最大值为  $450 \text{ m}^2$ , 故②正确;

当  $y_2 = 432$  时,  $-2(x - 15)^2 + 450 = 432$ , 即  $(x - 15)^2 = 9$ ,

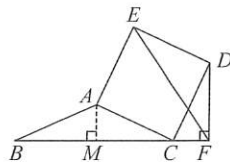
解得  $x_1 = 12$ ,  $x_2 = 18$ ,

$\therefore AF$  的长有两个不同的值满足种花的面积为  $432 \text{ m}^2$ , 故③正确.

13.  $\frac{2}{9}$  14. 5 15. 4 16.  $\sqrt{2}$

17. (I) 2 (II)  $\sqrt{13}$

(I) 如图, 过点  $A$  作  $AM \perp BC$  于点  $M$ ,



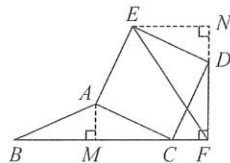
$\because AB = AC = \sqrt{5}$ ,  $BC = 4$ ,

$\therefore BM = CM = \frac{1}{2}BC = 2$ ,

在  $\text{Rt}\triangle ABM$  中,  $AM = \sqrt{AB^2 - BM^2} = 1$ ,

$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}BC \cdot AM = \frac{1}{2} \times 4 \times 1 = 2$ ;

(II) 如图, 过点  $E$  作  $EN \perp DF$  交  $FD$  的延长线于点  $N$ ,



$\because$  四边形  $ACDE$  是正方形,

$\therefore AC = CD = ED$ ,  $\angle ACD = \angle CDE = 90^\circ$ ,

$\therefore \angle ACM + \angle DCF = 90^\circ$ ,  $\angle CDF + \angle DCF = 90^\circ$ ,

$$\therefore \angle ACM = \angle CDF,$$

$$\text{又 } \angle AMC = \angle CFD = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle AMC \cong \triangle CFD (\text{AAS}),$$

$$\therefore CF = AM = 1, DF = CM = 2,$$

同理可得  $\triangle CFD \cong \triangle DNE (\text{AAS}),$

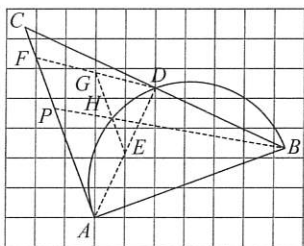
$$\therefore EN = DF = 2, DN = CF = 1,$$

$$\therefore NF = DN + DF = 1 + 2 = 3,$$

$$\text{在 Rt}\triangle NEF \text{ 中, } EF = \sqrt{EN^2 + NF^2} = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}.$$

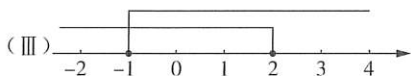
18. (I) 1;

(II) 如图, 连接  $AD$  与网格线交于点  $E$ , 取  $AC$  与网格线的交点  $F$ , 连接  $DF$  与网格线交于点  $G$ ; 连接  $GE$  与半圆相交于点  $H$ ; 连接  $BH$  并延长, 与  $AC$  相交于点  $P$ , 则点  $P$  即为所求.



19. 解: (I)  $x \geq -1$ ;

(II)  $x \leq 2$ ;



(IV)  $-1 \leq x \leq 2$ .

20. 解: (I) 40 25.

(II) 观察条形统计图,

$$\therefore \bar{x} = \frac{3 \times 5 + 4 \times 10 + 5 \times 11 + 6 \times 8 + 7 \times 6}{40} = 5,$$

$\therefore$  这组数据的平均数是 5.

$\therefore$  在这组数据中, 5 出现了 11 次, 出现的次数最多,

$\therefore$  这组数据的众数是 5.

$\therefore$  将这组数据按从小到大的顺序排列, 其中处在中间位置的

两个数都是 5, 有  $\frac{5+5}{2} = 5$ ,

$\therefore$  这组数据的中位数是 5.

21. 解: (I)  $\because AB$  为  $\odot O$  的直径,

$$\therefore \angle AEB = \angle ADB = 90^\circ, \text{ 得 } \angle AEC = 90^\circ,$$

$$\because \angle C = 64^\circ,$$

$$\therefore \angle CAE = 90^\circ - \angle C = 26^\circ,$$

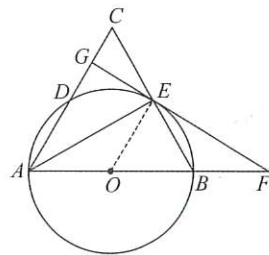
$$\because AE \text{ 平分 } \angle CAB,$$

$$\therefore \angle CAE = \angle BAE,$$

$$\therefore \angle DAB = 2\angle CAE = 52^\circ,$$

$$\therefore \angle DBA = 90^\circ - \angle DAB = 38^\circ.$$

(II) 如图, 连接  $OE$ ,



$\because GF$  与  $\odot O$  相切,  $E$  为切点,

$$\therefore OE \perp GF, \text{ 得 } \angle OEF = 90^\circ,$$

$$\because OE = OA,$$

$$\therefore \angle OAE = \angle OEA,$$

$$\therefore \angle OEA = \angle CAE,$$

$$\therefore OE \parallel AC,$$

$$\therefore \angle AGF = \angle OEF = 90^\circ, \text{ 得 } \angle CGE = 90^\circ,$$

$$\because \angle F = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle EOF = 90^\circ - \angle F = 60^\circ,$$

$$\because OE = OB,$$

$$\therefore \angle OBE = \angle OEB = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle C = \angle OEB = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle CEG = 90^\circ - \angle C = 30^\circ,$$

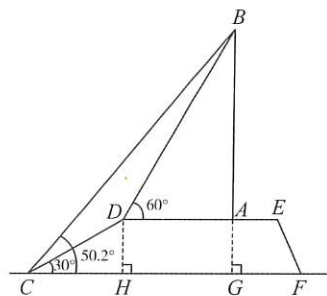
$$\because CG = 1,$$

$$\therefore CE = 2CG = 2,$$

由 (I) 知  $\angle AEC = 90^\circ$ ,

$$\therefore AE = CE \cdot \tan C = 2 \times \tan 60^\circ = 2\sqrt{3}.$$

22. 解: (I) 如图, 过点  $D$  作  $DH \perp CF$  于点  $H$ ,



在  $\text{Rt}\triangle DCH$  中,  $\angle DCH = 30^\circ, CD = 6$ ,

$$\therefore DH = \frac{1}{2} CD = 3,$$

根据题意,  $\angle DHG = \angle HGA = \angle GAD = 90^\circ$ ,

$\therefore$  四边形  $ADHG$  是矩形,

$\therefore AG = DH = 3$ , 即  $AG$  的长为 3 m.

$$(II) (i) \text{ 在 } \text{Rt}\triangle DCH \text{ 中, } \cos \angle DCH = \frac{CH}{CD},$$

$$\therefore CH = CD \cdot \cos 30^\circ = 3\sqrt{3},$$

在  $\text{Rt}\triangle BDA$  中,  $\tan \angle ADB = \frac{AB}{AD}, \angle ADB = 60^\circ, AB = h$ ,

$$\therefore AD = \frac{h}{\tan 60^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{3}h,$$

$\therefore$  四边形 ADHG 是矩形,

$$\therefore GH = AD = \frac{\sqrt{3}}{3}h,$$

$$\therefore CG = CH + GH = 3\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}h,$$

即线段 CG 的长为  $(3\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}h)$  m.

(II) 在  $\text{Rt}\triangle BCG$  中,  $\tan \angle BCG = \frac{BG}{CG}$ ,  $\angle BCG = 50.2^\circ$ ,

$$\therefore BG = CG \cdot \tan 50.2^\circ,$$

$$\text{又 } BG = AB + AG = h + 3,$$

$$\therefore h + 3 = (3\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}h) \cdot \tan 50.2^\circ,$$

$$\text{即 } h = \frac{3\sqrt{3} \tan 50.2^\circ - 3}{1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \tan 50.2^\circ} \approx \frac{3 \times 1.7 \times 1.2 - 3}{1 - \frac{1.7}{3} \times 1.2} \approx 10(\text{m}).$$

答: 古塔 AB 的高度约为 10 m.

23. 解: (I)  $(1, 2)$ ; (II) 0.08;

(III) 当  $70 \leq x \leq 80$  时,  $y = 1.2$ ;

当  $80 < x \leq 85$  时,  $y = -0.24x + 20.4$ .

(II) 0.6 km 或 1.2 km.

24. 解: (I)  $(4, 3\sqrt{3})$ ,  $(-3, 3\sqrt{3})$ .

(II) (I)  $\therefore$  四边形 OABC 是矩形,  $A(4, 0)$ ,  $C(0, 3\sqrt{3})$ ,  $E(-6, 0)$ ,

$$\therefore OA = CB = 4, AB = OC = 3\sqrt{3}, OE = 6,$$

$\therefore \triangle ODE$  是等边三角形,

$$\therefore \angle DEO = \angle DOE = 60^\circ,$$

由平移知  $\angle D'E'O' = \angle D'O'E' = 60^\circ$ ,  $O'E' = 6$ ,

$$\therefore S_{\triangle O'D'E'} = \frac{1}{2} O'E' \cdot OC = 9\sqrt{3},$$

$$\therefore OO' = t,$$

$$\therefore OE' = O'E' - OO' = 6 - t, O'A = OO' - OA = t - 4,$$

$$\therefore OG = OE' \cdot \tan \angle GE'O = \sqrt{3} OE' = \sqrt{3}(6 - t),$$

$$AF = O'A \cdot \tan \angle FO'A = \sqrt{3} O'A = \sqrt{3}(t - 4),$$

$$\therefore S_{\triangle GOE'} = \frac{1}{2} OE' \cdot OG = \frac{\sqrt{3}}{2} (6 - t)^2,$$

$$S_{\triangle FAO'} = \frac{1}{2} O'A \cdot AF = \frac{\sqrt{3}}{2} (t - 4)^2,$$

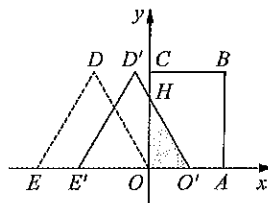
$$\text{又 } S = S_{\triangle O'D'E'} - S_{\triangle GOE'} - S_{\triangle FAO'},$$

$$\therefore S = 9\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} (6 - t)^2 - \frac{\sqrt{3}}{2} (t - 4)^2 = -\sqrt{3} t^2 + 10\sqrt{3} t - 17\sqrt{3},$$

其中  $t$  的取值范围是  $4 < t < 6$ .

$$(II) \frac{\sqrt{3}}{2} \leq S \leq 8\sqrt{3}.$$

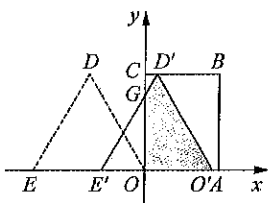
① 当  $1 \leq t \leq 3$  时, 如图所示, 重叠部分为  $\triangle OO'H$ ,



$$\text{则 } OH = \sqrt{3} OO' = \sqrt{3} t, S = S_{\triangle OO'H} = \frac{1}{2} t \times \sqrt{3} t = \frac{\sqrt{3}}{2} t^2,$$

$$\therefore \frac{\sqrt{3}}{2} \leq S \leq \frac{9\sqrt{3}}{2};$$

② 当  $3 < t \leq 4$  时, 如图所示, 重叠部分为四边形  $OO'D'G$ ,



$$\text{同 (I) 可得 } S_{\triangle GOE'} = \frac{\sqrt{3}}{2} (6 - t)^2,$$

$$\text{则 } S = S_{\text{四边形 } OO'D'G} = 9\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} (6 - t)^2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} (t - 6)^2 + 9\sqrt{3},$$

$$\therefore \frac{9\sqrt{3}}{2} \leq S \leq 7\sqrt{3};$$

$$\text{③ 当 } 4 < t < 6 \text{ 时, 由 (I) 可得 } S = -\sqrt{3} t^2 + 10\sqrt{3} t - 17\sqrt{3} = -\sqrt{3} (t - 5)^2 + 8\sqrt{3},$$

$$\therefore 7\sqrt{3} < S \leq 8\sqrt{3};$$

$$\text{④ 当 } t = 6 \text{ 时, } S = 9\sqrt{3} - \frac{1}{2} \times 2 \times 2\sqrt{3} = 7\sqrt{3}.$$

综上所述,  $\frac{\sqrt{3}}{2} \leq S \leq 8\sqrt{3}$ .

$$25. \text{ 解: (I) 由题意得 } \begin{cases} a + b + 4 = 0 \\ 16a + 4b + 4 = 0 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} a = 1 \\ b = -5 \end{cases}.$$

$\therefore$  该抛物线的解析式为  $y = x^2 - 5x + 4$ .

(II) 当  $x = 0$  时,  $y = 4$ ,

$\therefore$  点  $C(0, 4)$ , 得  $OC = 4$ ,

设直线 BC 的解析式为  $y = kx + b'$ ,

$$\text{有 } \begin{cases} 0 = 4k + b' \\ 4 = b' \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} k = -1 \\ b' = 4 \end{cases},$$

$\therefore$  直线 BC 的解析式为  $y = -x + 4$ ,

$\therefore M$  为抛物线上横坐标为  $m$  的点,

$\therefore M(m, m^2 - 5m + 4)$ , 则点  $N(m, -m + 4)$ ,

$$\therefore MN = -m + 4 - (m^2 - 5m + 4) = -m^2 + 4m.$$

$\therefore MN = OC$ ,

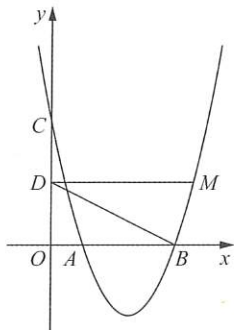
$$\therefore -m^2 + 4m = 4, \text{ 解得 } m = 2.$$

$\therefore$  点  $M$  的坐标为  $(2, -2)$ .

(Ⅲ)  $\because D$  为线段  $OC$  的中点,  $C(0, 4)$ ,

$\therefore D(0, 2)$ .

① 当点  $M$  在  $DB$  上方时, 如图,



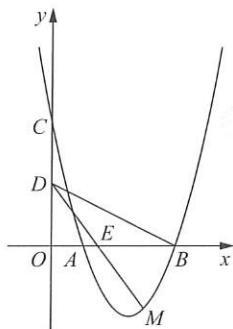
$$\because \angle MDB = \angle DBO,$$

$\therefore DM \parallel OB$ , 得点  $M$  的纵坐标为 2,

$$\text{由 } m^2 - 5m + 4 = 2, \text{ 解得 } m = \frac{5 \pm \sqrt{17}}{2},$$

$\therefore$  点  $M$  的坐标为  $(\frac{5 + \sqrt{17}}{2}, 2)$  或  $(\frac{5 - \sqrt{17}}{2}, 2)$ ;

② 当点  $M$  在  $DB$  下方时, 如图, 设  $DM$  与  $x$  轴交于点  $E$ ,



$$\because \angle MDB = \angle DBO,$$

$$\therefore DE = BE,$$

设  $E(t, 0)$ , 则  $BE = 4 - t$ ,

在  $Rt\triangle OED$  中,  $DE^2 = OE^2 + OD^2$ ,

$$\text{即 } (4 - t)^2 = t^2 + 4, \text{ 解得 } t = \frac{3}{2},$$

$\therefore E(\frac{3}{2}, 0)$ ,

设直线  $DE$  的解析式为  $y = k_1x + b_1$ ,

$$\text{有 } \begin{cases} \frac{3}{2}k_1 + b_1 = 0 \\ b_1 = 2 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} k_1 = -\frac{4}{3} \\ b_1 = 2 \end{cases},$$

$\therefore$  直线  $DE$  的解析式为  $y = -\frac{4}{3}x + 2$ ,

$$\text{由 } -\frac{4}{3}m + 2 = m^2 - 5m + 4, \text{ 解得 } m = 3 \text{ 或 } m = \frac{2}{3},$$

$\therefore$  点  $M$  的坐标为  $(3, -2)$  或  $(\frac{2}{3}, \frac{10}{9})$ .

综上所述, 点  $M$  的坐标为  $(\frac{5 + \sqrt{17}}{2}, 2)$  或  $(\frac{5 - \sqrt{17}}{2}, 2)$  或  $(3, -2)$  或  $(\frac{2}{3}, \frac{10}{9})$ .

## ② 2024 西青区初中学业水平考试模拟(二)

1. A 2. A 3. B 4. C 5. A 6. C 7. B 8. A 9. B 10. D

11. C

12. D  $\because$  点  $D$  在  $x$  轴下方且横坐标小于 3,

$\therefore$  当  $x = 3$  时,  $y < 0$ ,

$\because$  抛物线的对称轴为直线  $x = 1$ ,

$\therefore$  由对称可知当  $x = -1$  时,  $y < 0$ , 即  $a - b + c < 0$ , 故①正确;

$\because$  抛物线的对称轴为直线  $x = 1$ ,

$$\therefore -\frac{b}{2a} = 1, \text{ 即 } b = -2a,$$

$\because$  抛物线与  $y$  轴正半轴交于点  $C$ ,

$\therefore c > 0$ ,

$\therefore 2a + b + c = 2a - 2a + c = c > 0$ , 故②正确;

$\because$  直线  $y = -x + c$  与抛物线  $y = ax^2 + bx + c$  交于  $C, D$  两点, 点  $D$  在  $x$  轴下方且横坐标小于 3,

$\therefore$  当  $x = 3$  时, 二次函数值小于一次函数值,

$$\therefore 9a + 3b + c < -3 + c,$$

又  $b = -2a$ ,  $\therefore 9a - 6a < -3$ , 解得  $a < -1$ , 故③正确.

13.  $\frac{5}{12}$  14.  $6a^3$  15. 10 16. 0 (答案不唯一, 满足  $b < 1$  即可)

17. (I) 90 (II)  $3\sqrt{2}$

(I)  $\because$  四边形  $ABCD$  是正方形,

$\therefore AC \perp BD, OB = OD$ ,

$\because EF = BE$ ,

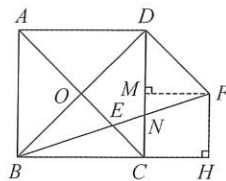
$\therefore OE$  是  $\triangle BDF$  的中位线,

$\therefore OE \parallel DF$ ,

$\therefore DF \perp BD$ ,

$\therefore \angle BDF = 90^\circ$ ;

(II) 如图, 过点  $F$  作  $FM \perp CD$  于点  $M$ , 设  $BF$  与  $CD$  交于点  $N$ ,



$\because$  四边形  $ABCD$  是正方形,

$\therefore \angle BCD = \angle MCH = 90^\circ$ ,

$\because FM \perp CD, FH \perp BC$ ,

$\therefore \angle FMC = \angle FHC = 90^\circ$ ,

∴ 四边形 MCHF 是矩形,

∴  $MC = FH = 3, MF = CH$ .

设  $CH = x$ , 则  $BC = CD = 2x, MF = x$ ,

∵  $BD$  是正方形  $ABCD$  的对角线,

∴  $\angle BDC = 45^\circ$ ,

∴  $\angle BDF = 90^\circ$ ,

∴  $\angle FDM = \angle BDF - \angle BDC = 45^\circ$ ,

∴  $\angle DFM = 45^\circ$ , 得  $MD = MF = x$ ,

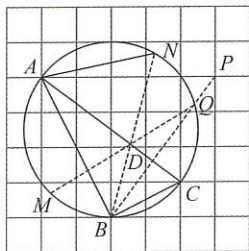
∴  $CD = MC + MD$ ,

∴  $2x = 3 + x$ , 解得  $x = 3$ ,

∴  $DF = \sqrt{MD^2 + MF^2} = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$ .

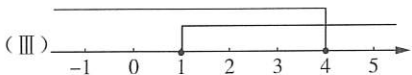
18. (I) 5;

(II) 如图, 取格点  $P$ , 连接  $BP$  与圆相交于点  $Q$ , 连接  $BN$  与  $AC$  相交于点  $D$ , 连接  $QD$  并延长与圆相交于点  $M$ , 点  $M$  即为所求.



19. 解: (I)  $x \leq 4$ ;

(II)  $x \geq 1$ ;



(IV)  $1 \leq x \leq 4$ .

20. 解: (I) 50 28.

(II) 观察条形统计图,

$$\therefore \bar{x} = \frac{1 \times 4 + 2 \times 5 + 3 \times 14 + 4 \times 16 + 5 \times 11}{50} = 3.5,$$

∴ 统计的这部分学生所评分数的平均数是 3.5.

∵ 在这组数据中, 4 出现了 16 次, 出现的次数最多,

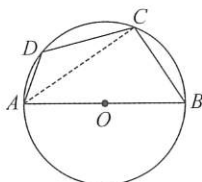
∴ 统计的这部分学生所评分数的众数是 4.

∵ 将这组数据按照从小到大的顺序排列, 其中处于中间位置

的两个数都是 4, 有  $\frac{4+4}{2} = 4$ ,

∴ 统计的这部分学生所评分数的中位数是 4.

21. 解: (I) 如图, 连接  $AC$ .



∵  $\angle BCD = 110^\circ$ ,

∴  $\angle BAD = 180^\circ - \angle BCD = 70^\circ$ .

∵  $C$  是  $\widehat{BD}$  的中点,

∴  $\widehat{BC} = \widehat{DC}$ .

∴  $\angle BAC = \angle DAC = \frac{1}{2} \angle BAD = 35^\circ$ .

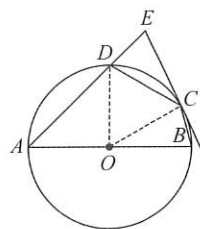
∵  $AB$  是  $\odot O$  的直径,

∴  $\angle ACB = 90^\circ$ .

∴  $\angle ABC = 90^\circ - \angle BAC = 55^\circ$ .

∴  $\angle ADC = 180^\circ - \angle ABC = 125^\circ$ .

(II) 如图, 连接  $OC, OD$ .



∵  $D$  是半圆的中点,

∴  $\widehat{AD} = \widehat{BD}$ .

∴  $\angle AOD = \angle BOD$ .

∵  $\angle AOD + \angle BOD = 180^\circ$ ,

∴  $\angle AOD = \angle BOD = 90^\circ$ .

∵  $OA = OD$ ,

∴  $\angle A = \angle ADO = 45^\circ$ .

∵  $CD = OA, OC = OD = OA$ ,

∴  $OC = OD = CD$ .

∴  $\triangle COD$  是等边三角形.

∴  $\angle ODC = \angle OCD = 60^\circ$ .

∴  $\angle CDE = 180^\circ - \angle ADO - \angle ODC = 75^\circ$ .

∵  $EC$  切  $\odot O$  于点  $C$ ,

∴  $OC \perp EC$ . 即  $\angle OCE = 90^\circ$ .

∴  $\angle DCE = 90^\circ - \angle OCD = 30^\circ$ .

∴  $\angle E = 180^\circ - \angle CDE - \angle DCE = 75^\circ$ .

∴  $\angle CDE = \angle E$ .

∴  $CD = CE = 4$ .

∴  $OA = OD = CD = 4$ .

在  $Rt\triangle AOD$  中,  $AD = \sqrt{OA^2 + OD^2} = 4\sqrt{2}$ .

22. 解: (I) 根据题意,  $\angle ABE = 58^\circ, \angle AEB = 90^\circ, AE = 32$ .

在  $Rt\triangle ABE$  中,  $\tan \angle ABE = \frac{AE}{BE}$ ,

$$\therefore BE = \frac{AE}{\tan \angle ABE} = \frac{32}{\tan 58^\circ} \approx \frac{32}{1.6} = 20(\text{m}).$$

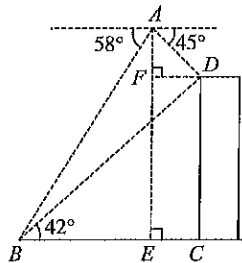
答: 操控者所在位置与无人机所在位置的水平距离  $BE$  的长约为 20 m.

(II)(I) 根据题意,  $\angle DBC = 42^\circ$ ,  $\angle DCB = 90^\circ$ ,  $CD = h$ .

在  $\text{Rt}\triangle DBC$  中,  $\tan \angle DBC = \frac{CD}{BC}$ ,

$$\therefore BC = \frac{CD}{\tan \angle DBC} = \frac{h}{\tan 42^\circ}, \text{即线段 } BC \text{ 的长为 } \frac{h}{\tan 42^\circ} \text{ m.}$$

(II) 如图, 过点  $D$  作  $DF \perp AE$ , 垂足为  $F$ ,



则  $\angle AFD = \angle DFE = 90^\circ$ .

$\therefore \angle DFE = \angle AEC = \angle DCB = 90^\circ$ .

$\therefore$  四边形  $DCEF$  是矩形.

$\therefore EC = FD, FE = CD = h$ .

$\therefore AF = AE - FE = 32 - h$ .

根据题意,  $\angle ADF = 45^\circ$ ,

$\therefore \angle DAF = \angle ADF = 45^\circ$ .

$\therefore FD = AF = 32 - h$ .

$\therefore EC = FD = 32 - h$ .

由(I)知  $BE = 20$ ,

$\therefore BC = BE + EC = 52 - h$ ,

由(I)知  $BC = \frac{h}{\tan 42^\circ}$ ,

$$\therefore \frac{h}{\tan 42^\circ} = 52 - h.$$

$$\therefore h = \frac{52 \times \tan 42^\circ}{1 + \tan 42^\circ} \approx \frac{52 \times 0.9}{1 + 0.9} \approx 25(\text{m}).$$

答: 建筑物  $CD$  的高度约为 25 m.

23. 解: (I)(I) 40 5; (II) 7.5; (III) 0.2.

(II) 当  $0 \leq x \leq 20$  时,  $y = 0.25x$ ;

当  $20 < x \leq 40$  时,  $y = 5$ ;

当  $40 < x \leq 80$  时,  $y = 0.25x - 5$ .

(III) 32.5 min 或 70 min.

24. 解: (I) (8, 0) (2,  $2\sqrt{3}$ ).

(II)(I)  $\because \angle OPQ = 60^\circ, \angle BOA = 60^\circ$ ,

$\therefore \angle OQP = 180^\circ - \angle OPQ - \angle BOA = 60^\circ$ ,

$\therefore \triangle OPQ$  是等边三角形,

由翻折可得  $\triangle CPQ \cong \triangle OPQ$ ,

$\therefore \triangle CPQ$  是等边三角形.

$\therefore \angle CPQ = \angle C = 60^\circ, CP = OP = m$ ,

$\therefore \angle CPA = 180^\circ - \angle OPQ - \angle CPQ = 60^\circ$ .

$\therefore \angle OBA = 90^\circ, \angle BOA = 60^\circ$ ,

$\therefore \angle OAB = 90^\circ - \angle BOA = 30^\circ$ ,

$\therefore \angle PFA = 180^\circ - \angle OAB - \angle CPA = 90^\circ$ .

$\therefore OA = 8, OP = m$ ,

$\therefore PA = OA - OP = 8 - m$ .

$$\therefore PF = \frac{1}{2} PA = \frac{8-m}{2}.$$

$$\therefore CF = CP - PF = \frac{3m-8}{2}.$$

在  $\text{Rt}\triangle EFC$  中,  $\tan C = \frac{EF}{CF}, \angle C = 60^\circ$ ,

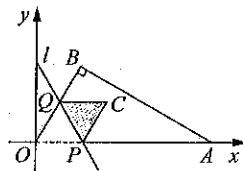
$$\therefore EF = CF \cdot \tan C = \frac{\sqrt{3}(3m-8)}{2},$$

$$\therefore S = S_{\triangle CPQ} - S_{\triangle CEF} = \frac{\sqrt{3}}{4} m^2 - \frac{\sqrt{3}}{8} (3m-8)^2 = -\frac{7\sqrt{3}}{8} m^2 +$$

$6\sqrt{3}m - 8\sqrt{3}$ , 其中  $m$  的取值范围为  $\frac{8}{3} < m < 4$ .

(II)  $\sqrt{2} \leq m \leq 6$ .

① 当  $0 < m \leq \frac{8}{3}$  时, 折叠后重合部分为  $\triangle CPQ$ , 如图,



$$\text{此时, } S = \frac{\sqrt{3}}{4} m^2, 0 < S \leq \frac{16\sqrt{3}}{9},$$

② 当  $S = \frac{\sqrt{3}}{2}$  时,  $\frac{\sqrt{3}}{4} m^2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ , 解得  $m = \sqrt{2}$  (负值舍去);

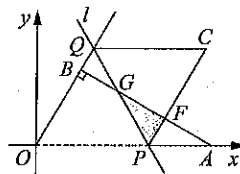
③ 当  $\frac{8}{3} < m < 4$  时, 由(I)知  $S = -\frac{7\sqrt{3}}{8} m^2 + 6\sqrt{3}m - 8\sqrt{3} =$

$$-\frac{7\sqrt{3}}{8} (m - \frac{24}{7})^2 + \frac{16\sqrt{3}}{7},$$

$$\therefore \frac{16\sqrt{3}}{9} < S \leq \frac{16\sqrt{3}}{7},$$

$$\therefore \text{当 } S = \frac{16\sqrt{3}}{7} \text{ 时, } m = \frac{24}{7};$$

③ 当  $4 \leq m < 8$  时, 折叠后重合部分为  $\triangle PFG$ , 如图,



由(I)知  $PF = \frac{8-m}{2}$ , 则  $FG = \sqrt{3} PF = \frac{\sqrt{3}(8-m)}{2}$ ,

$$\therefore S = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}(8-m)}{2} \times \frac{8-m}{2} = \frac{\sqrt{3}}{8} (m-8)^2,$$

$$\therefore 0 < S \leq 2\sqrt{3},$$

$\therefore \text{当 } S = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ 时, } \frac{\sqrt{3}}{8} (m-8)^2 = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{解得 } m_1 = 6, m_2 = 10 \text{ (舍去).}$

综上所述,  $\sqrt{2} \leq m \leq 6$ .

25. 解: (I) 把点  $A(2,0)$ , 点  $C(0,4)$  代入  $y=ax^2-3x+c$ ,

$$\begin{cases} 4a-6+c=0 \\ c=4 \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} a=\frac{1}{2} \\ c=4 \end{cases}.$$

$\therefore$  抛物线的解析式为  $y=\frac{1}{2}x^2-3x+4$ ,

当  $y=0$  时, 有  $\frac{1}{2}x^2-3x+4=0$ , 解得  $x_1=2, x_2=4$ .

$\therefore$  点  $B$  的坐标是  $(4,0)$ .

$$\because y=\frac{1}{2}x^2-3x+4=\frac{1}{2}(x-3)^2-\frac{1}{2},$$

$\therefore$  顶点  $D$  的坐标是  $(3, -\frac{1}{2})$ .

(II) 由点  $A(2,0)$ , 点  $B(4,0)$ , 点  $C(0,4)$ ,

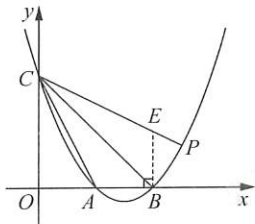
得  $OA=2, OB=OC=4$ ,

故  $AB=2$ .

$\because \angle BOC=90^\circ$ ,

$\therefore \angle OBC=\angle OCB=45^\circ$ .

如图, 过点  $B$  作  $BE \perp x$  轴, 交  $CP$  于点  $E$ ,



则  $\angle ABE=90^\circ$ .

$\therefore \angle CBE=\angle OBC=45^\circ$ .

又  $\angle PCB=\angle ACB, CB=CB$ ,

$\therefore \triangle ABC \cong \triangle EBC(ASA)$ .

$\therefore EB=AB=2$ .

$\therefore$  点  $E$  的坐标为  $(4,2)$ .

设直线  $CE$  的解析式为  $y=kx+b$ .

$$\begin{cases} 4k+b=2 \\ b=4 \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} k=-\frac{1}{2} \\ b=4 \end{cases},$$

$\therefore$  直线  $CE$  的解析式为  $y=-\frac{1}{2}x+4$ .

由  $\frac{1}{2}x^2-3x+4=-\frac{1}{2}x+4$ , 解得  $x_1=0$  (舍),  $x_2=5$ ,

$\therefore$  点  $P$  的坐标为  $(5, \frac{3}{2})$ .

(III)  $\because$  点  $M$  与点  $C$  关于抛物线的对称轴对称, 点  $C(0,4)$ ,

$\therefore$  点  $M$  的坐标为  $(6,4)$ ,

$\therefore$  点  $N$  的坐标是  $(6, -\frac{1}{2})$ ,  $MN=4-(-\frac{1}{2})=\frac{9}{2}$ ,

$\therefore$  点  $Q$  在抛物线上, 其横坐标为  $t$ ,

$\therefore$  点  $Q$  的坐标为  $(t, \frac{1}{2}t^2-3t+4)$ , 且  $3 < t < 6$ ,

易得直线  $MQ$  的解析式为  $y=\frac{t}{2}x+(4-3t)$ ,

根据题意,  $y_H=-\frac{1}{2}$ , 则  $x_H=6-\frac{9}{t}$ ,

$$\therefore HN=6-(6-\frac{9}{t})=\frac{9}{t},$$

易得直线  $DQ$  的解析式为  $y=\frac{t-3}{2}x+(4-\frac{3}{2}t)$ ,

根据题意,  $x_G=6$ , 则  $y_G=\frac{3}{2}t-5$ ,

$$\therefore GN=(\frac{3}{2}t-5)-(-\frac{1}{2})=\frac{3}{2}t-\frac{9}{2}.$$

$$\therefore HN(MN+GN)=\frac{9}{t}[\frac{9}{2}+(\frac{3}{2}t-\frac{9}{2})]=\frac{27}{2}.$$

## ⑤2024 部分区初中学业水平考试模拟(二)

1. A 2. B 3. D 4. A 5. B 6. C 7. D 8. A 9. D 10. C

11. B

12. C 由题意得当  $t=4$  时,  $h=0$ ,

$\therefore a \times 4^2 + 20 \times 4 = 0$ , 解得  $a=-5$ , 故①正确;

故  $h=-5t^2+20t=-5(t-2)^2+20$ ,

$\therefore -5 < 0$ ,

$\therefore$  小球的飞行高度最高可达到 20 m, 故②错误;

当  $h=15$  时,  $-5(t-2)^2+20=15$ ,

解得  $t=3$  或  $t=1$ ,

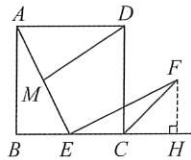
$\therefore$  小球有两个飞行的时间使小球的高度刚好达到 15 m, 故③

正确.

13.  $\frac{6}{13}$  14.  $-x^6y^3$  15. 3 16. 1

17. (I) 2 (II)  $\sqrt{13}$

(I) 如图, 过点  $F$  作  $FH \perp BC$  交  $BC$  的延长线于点  $H$ ,



$\because$  四边形  $ABCD$  是正方形,

$\therefore AB=BC=4, \angle B=90^\circ, \angle BCD=\angle DCH=90^\circ$ ,

$\therefore E$  为  $BC$  的中点,

$$\therefore BE=CE=\frac{1}{2}BC=2,$$

$\because CF$  平分  $\angle DCH$ ,

$$\therefore \angle FCH=\frac{1}{2}\angle DCH=45^\circ,$$

$\therefore FH=CH$ ,

$\because \angle AEF=90^\circ$ ,

$$\therefore \angle AEB + \angle HEF = 90^\circ,$$

$$\text{又 } \angle AEB + \angle BAE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BAE = \angle HEF,$$

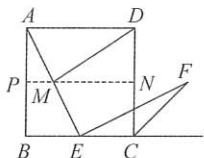
$$\therefore \angle EHF = \angle B = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle ABE \sim \triangle EHF,$$

$$\therefore \frac{AB}{EH} = \frac{EB}{FH}, \text{ 即 } \frac{4}{2+FH} = \frac{2}{FH}, \text{ 解得 } FH=2,$$

$$\therefore S_{\triangle ECF} = \frac{1}{2} CE \cdot FH = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 2;$$

(II) 如图, 取  $AB$  的中点  $P$ , 连接  $PM$  并延长交  $CD$  于点  $N$ ,



$\therefore M$  是  $AE$  的中点,

$$\therefore PM \parallel BE, PM = \frac{1}{2} BE = 1,$$

$$\therefore \angle APM = \angle B = 90^\circ, \angle MND = \angle BCD = 90^\circ,$$

$\therefore$  四边形  $ABCD$  是正方形,

$$\therefore \angle PAD = \angle ADN = 90^\circ,$$

$\therefore$  四边形  $APND$  是矩形,

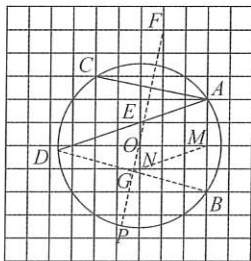
$$\therefore PN = AD = 4, DN = AP = \frac{1}{2} AB = 2,$$

$$\therefore MN = PN - PM = 3,$$

$$\text{在 Rt}\triangle DMN \text{ 中}, DM = \sqrt{MN^2 + DN^2} = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}.$$

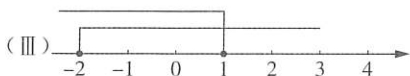
18. (I)  $\sqrt{10}$ ;

(II) 如图, 取格点  $O, F$ , 连接  $OF$ , 则点  $O$  即为圆心; 连接  $DB$ , 取格点  $M, N$ , 连接  $MN$  并延长交  $DB$  于点  $G$ ; 连接  $OG$  并延长交圆于点  $P$ , 则点  $P$  即为所求.



19. 解: (I)  $x \geq -2$ ;

(II)  $x \leq 1$ ;



(IV)  $-2 \leq x \leq 1$ .

20. 解: (I) 40 20.

(II) 观察条形统计图,

$$\therefore \bar{x} = \frac{6 \times 6 + 7 \times 8 + 8 \times 10 + 9 \times 16}{40} = 7.9,$$

$\therefore$  这组数据的平均数是 7.9.

$\therefore$  在这组数据中, 9 出现了 16 次, 出现的次数最多,

$\therefore$  这组数据的众数是 9.

$\therefore$  将这组数据按从小到大的顺序排列, 其中处于中间的两个

数都是 8, 有  $\frac{8+8}{2} = 8$ ,

$\therefore$  这组数据的中位数是 8.

21. 解: (I)  $\therefore AB$  是  $\odot O$  的直径,

$$\therefore \angle ADB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DAB = 28^\circ,$$

$$\therefore \angle ABD = 90^\circ - \angle DAB = 62^\circ,$$

$\therefore E$  为  $\widehat{AB}$  的中点,

$$\therefore \widehat{AE} = \widehat{EB},$$

$$\therefore \angle ADE = \angle EDB = \frac{1}{2} \angle ADB = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle EAB = \angle EDB = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle DAE = \angle DAB + \angle EAB = 73^\circ.$$

(II)  $\therefore CD$  是  $\odot O$  的切线,  $DE$  是  $\odot O$  的直径,

$$\therefore \angle EDC = 90^\circ,$$

$$\therefore AD = CD,$$

$$\therefore \angle A = \angle DCA,$$

$$\therefore \angle DOC = 2\angle A,$$

$$\therefore \angle DOC = 2\angle DCA,$$

$$\therefore \angle DOC + \angle DCA = 3\angle DCA = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DCA = 30^\circ,$$

$$\therefore OD = \frac{1}{2} OC,$$

$$\therefore OD = OB,$$

$$\therefore OB = \frac{1}{2} OC,$$

$$\therefore OB = CB = 2,$$

$$\therefore OD = 2, OC = 4,$$

$$\therefore CD = \sqrt{OC^2 - OD^2} = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore DE = 2OD = 4, \angle EDC = 90^\circ,$$

$$\therefore CE = \sqrt{DE^2 + CD^2} = \sqrt{4^2 + (2\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{7}.$$

22. 解: (I)  $\therefore AB = 3, BH = h$ ,

$$\therefore AH = AB + BH = 3 + h,$$

在  $\text{Rt}\triangle ADH$  中,  $\tan \angle ADH = \frac{AH}{DH}$ ,  $\angle ADH = 45^\circ$ ,

$$\therefore DH = \frac{AH}{\tan 45^\circ} = AH = 3 + h,$$

即线段  $DH$  的长为  $(3+h)$  m.

$$(II) \therefore DH = 3 + h,$$

$$\therefore CH = CD + DH = 15 + 3 + h = 18 + h,$$

在  $\text{Rt}\triangle BCH$  中,  $\tan\angle BCH = \frac{BH}{CH}$ ,  $\angle BCH = 22^\circ$ ,

$$\therefore \tan 22^\circ = \frac{h}{18+h},$$

$$\therefore h = \frac{18 \tan 22^\circ}{1 - \tan 22^\circ} \approx \frac{18 \times 0.4}{1 - 0.4} = 12(\text{m}).$$

答: B 点到地面的距离  $BH$  约为 12 m.

23. 解: (I) (1) 1.5 3 1.6; (II) 1.4;

(III) 当  $85 \leq x \leq 105$  时,  $y = 1.6$ ;

当  $105 < x \leq 125$  时,  $y = -0.08x + 10$ .

(II)  $\frac{14}{9}$  km.

24. 解: (I)  $\because A(0, 3), B(4, 0)$ ,

$\therefore OA = 3, OB = 4$ ,

由折叠可知  $\triangle CDB \cong \triangle CDE$ ,

$$\therefore BC = OC = \frac{1}{2}OB = 2,$$

$\because CD \perp OB, OA \perp OB$ ,

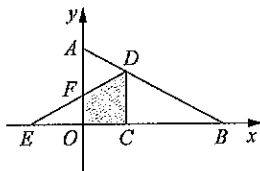
$\therefore CD \parallel OA$ ,

$\because OC = BC$ ,

$$\therefore CD = \frac{1}{2}OA = \frac{3}{2},$$

$\therefore$  点 D 的坐标为  $(2, \frac{3}{2})$ .

(II) (1) 如图, 设 DE 交 OA 于点 F,



由折叠可知  $\triangle CDB \cong \triangle CDE$ ,

$\therefore EC = BC = t, \angle DBC = \angle DEC$ ,

$\because OB = 4$ ,

$\therefore OC = OB - BC = 4 - t$ ,

$\therefore OE = EC - OC = 2t - 4$ ,

在  $\text{Rt}\triangle AOB$  中,  $\tan\angle ABO = \frac{OA}{OB} = \frac{3}{4}$ ,

$\therefore$  在  $\text{Rt}\triangle CDB$  中,  $\tan\angle DBC = \frac{CD}{BC} = \frac{3}{4}$ ,

$$\text{得 } CD = \frac{3}{4}BC = \frac{3}{4}t,$$

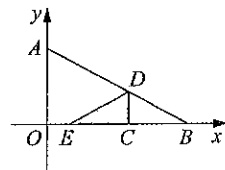
同理, 得  $OF = \frac{3}{4}OE = \frac{3}{4}(2t - 4) = \frac{3}{2}t - 3$ ,

$$\therefore S = \frac{1}{2}(OF + CD) \cdot OC = \frac{1}{2}(\frac{3}{2}t - 3 + \frac{3}{4}t)(4 - t),$$

即  $S = -\frac{9}{8}t^2 + 6t - 6$ , 其中  $t$  的取值范围是  $2 < t < 4$ .

$$(\text{II}) \sqrt{3} \leq t \leq \frac{7}{3} \text{ 或 } 3 \leq t \leq \frac{8+\sqrt{7}}{3}.$$

① 当  $0 < t \leq 2$  时, 重叠部分是  $\triangle CDE$ , 如图,



此时,  $S = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4}t \times t = \frac{3}{8}t^2$ , 则  $0 < S \leq \frac{3}{2}$ ,

$\therefore$  当  $S = \frac{9}{8}$  时,  $\frac{3}{8}t^2 = \frac{9}{8}$ , 解得  $t_1 = \sqrt{3}, t_2 = -\sqrt{3}$  (舍),

$\therefore \sqrt{3} \leq t \leq 2$ ;

② 当  $2 < t < 4$  时, 由 (I) 知  $S = -\frac{9}{8}t^2 + 6t - 6 = -\frac{9}{8}(t - \frac{8}{3})^2 + 2$ ,

则  $0 < S \leq 2$ ,

$\therefore$  当  $S = \frac{9}{8}$  时,  $-\frac{9}{8}(t - \frac{8}{3})^2 + 2 = \frac{9}{8}$ ,

解得  $t_1 = \frac{8+\sqrt{7}}{3}, t_2 = \frac{8-\sqrt{7}}{3}$  (舍);

当  $S = \frac{15}{8}$  时,  $-\frac{9}{8}(t - \frac{8}{3})^2 + 2 = \frac{15}{8}$ , 解得  $t_1 = 3, t_2 = \frac{7}{3}$ ,

$\therefore 2 < t \leq \frac{7}{3}$  或  $3 \leq t \leq \frac{8+\sqrt{7}}{3}$ .

综上所述, 当  $\frac{9}{8} \leq S \leq \frac{15}{8}$  时,  $\sqrt{3} \leq t \leq \frac{7}{3}$  或  $3 \leq t \leq \frac{8+\sqrt{7}}{3}$ .

25. 解: (I) 将点  $B(3, 0)$ , 点  $C(0, -3)$  代入  $y = ax^2 - 2x + c$ ,

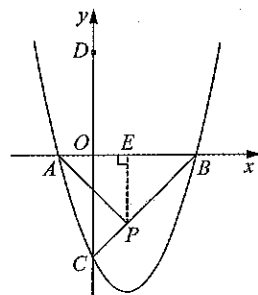
$$\text{得 } \begin{cases} 9a - 6 + c = 0 \\ c = -3 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} a = 1 \\ c = -3 \end{cases},$$

$\therefore$  抛物线的解析式为  $y = x^2 - 2x - 3$ ,

$\because y = x^2 - 2x - 3 = (x - 1)^2 - 4$ ,

$\therefore$  抛物线顶点坐标为  $(1, -4)$ .

(II) (1) 如图, 当  $AP \perp BC$  时,  $AP$  最短, 过点  $P$  作  $PE \perp AB$  于  $E$ ,



令  $y = 0$ , 则  $x^2 - 2x - 3 = 0$ , 解得  $x_1 = -1, x_2 = 3$ ,

$\therefore A(-1, 0)$ ,

$\because B(3, 0), C(0, -3)$ ,

$$\therefore OB=OC=3, AB=4,$$

$$\therefore \angle BOC=90^\circ,$$

$$\therefore \angle OBC=\angle OCB=45^\circ,$$

由  $AP \perp BC$ , 得  $\angle APB=90^\circ$ ,

$$\therefore AP=BP,$$

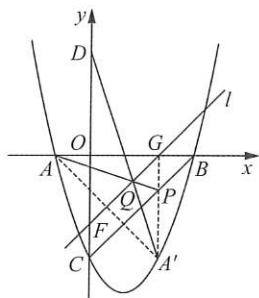
$$\therefore PE \perp AB,$$

$$\therefore PE=AE=BE=\frac{1}{2}AB=2,$$

$$\therefore OE=OB-BE=1,$$

$$\therefore P(1, -2).$$

(ii) 如图, 过点  $Q$  作直线  $l \parallel BC$  交  $x$  轴于点  $G$ , 交  $y$  轴于点  $F$ ,



$$\therefore AQ=3PQ,$$

$$\therefore \frac{AG}{BG} = \frac{AQ}{PQ} = 3,$$

由  $AB=4$ , 得  $AG=3$ ,

$$\therefore OG=AG-OA=2, \text{ 得 } G(2, 0),$$

$\therefore$  直线  $l \parallel BC$ ,

$$\therefore \angle OGF = \angle OBC = 45^\circ,$$

$$\therefore OF=OG=2, \text{ 得 } F(0, -2),$$

由  $G(2, 0), F(0, -2)$ , 可得直线  $l$  的解析式为  $y=x-2$ ,

$$\therefore 3AP+4DQ=4\left(\frac{3}{4}AP+DQ\right)=4(AQ+DQ),$$

$\therefore$  作点  $A$  关于直线  $l$  的对称点  $A'$ , 连接  $A'G$ ,

则  $AQ=A'Q$ ,

$$\therefore 3AP+4DQ=4(A'Q+DQ),$$

$\therefore$  当点  $A', Q, D$  在同一条直线上时,  $3AP+4DQ$  的值最小.

由对称可知  $A'G=AG=3, \angle A'GF=\angle OGF=45^\circ$ ,

$$\therefore \angle A'GA=90^\circ, \text{ 即 } A'G \perp x \text{ 轴},$$

$$\therefore A'(2, -3),$$

$$\text{由 } A'(2, -3), D(0, 3),$$

可得直线  $A'D$  的解析式为  $y=-3x+3$ ,

$$\text{由 } -3x+3=x-2, \text{ 解得 } x=\frac{5}{4},$$

$$\therefore Q\left(\frac{5}{4}, -\frac{3}{4}\right),$$

$$\therefore DQ=\sqrt{\left(\frac{5}{4}\right)^2+\left(3+\frac{3}{4}\right)^2}=\frac{5\sqrt{10}}{4}.$$

## ②6 2024 滨海新区初中学业水平考试模拟(二)

1. D 2. B 3. A 4. B 5. C 6. B 7. C 8. D 9. A 10. A

11. D

12. C 当  $h=0$  时,  $20t-5t^2=0$ ,

解得  $t=0$  或  $t=4$ ,

$\therefore$  小球从飞出到落地用时为 4 s, 故①正确;

$$\therefore h=20t-5t^2=-5(t-2)^2+20,$$

$\therefore$  小球飞行的最大高度为 20 m, 故②正确;

$$\text{当 } h=15 \text{ 时, } 20t-5t^2=15,$$

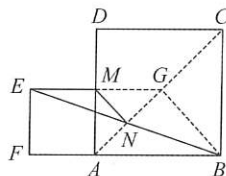
解得  $t=1$  或  $t=3$ ,

$\therefore$  当小球的飞行高度为 15 m 时, 小球飞行的时间是 1 s 或 3 s,

故③错误.

13.  $9a^2$  14. 7 15.  $\frac{7}{9}$  16. 1

17.  $\frac{3\sqrt{2}}{2}$  如图, 连接  $AC$ , 延长  $EM$  交  $AC$  于点  $G$ , 连接  $BG$ ,



$\therefore$  四边形  $AMEF$  是正方形,

$$\therefore \angle AMG = \angle AME = 90^\circ, AM=EM,$$

$\therefore$  四边形  $ABCD$  是正方形,

$$\therefore \angle DAC=45^\circ,$$

$$\therefore \angle AGM=90^\circ-\angle DAC=45^\circ,$$

$$\therefore AM=GM,$$

$$\therefore EM=GM,$$

$\therefore M$  为  $EG$  的中点,

$\therefore N$  为  $BE$  的中点,

$$\therefore MN=\frac{1}{2}BG,$$

$\therefore$  当  $BG$  取最小值时,  $MN$  取最小值,

$$\therefore \angle AGM=45^\circ,$$

$\therefore$  点  $G$  在线段  $AC$  上运动,

$\therefore$  当  $BG \perp AC$  时,  $BG$  的值最小, 此时,  $\angle BGC=90^\circ$ ,

$$\therefore \angle ACB=45^\circ, BC=6,$$

$$\therefore BG=\frac{\sqrt{2}}{2}BC=\frac{\sqrt{2}}{2} \times 6=3\sqrt{2},$$

$$\therefore MN=\frac{1}{2}BG=\frac{3\sqrt{2}}{2}, \text{ 即线段 } MN \text{ 的最小值为 } \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

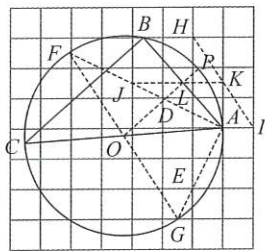
18. (I)  $90^\circ$ ;

(II) 如图, 取格点  $D, E$ , 连接  $AD, AE$  并延长分别交圆于点  $F$ ,

$G$ , 连接  $FG$  交  $AC$  于点  $O$ ; 取  $AF$  与格线的交点  $J$ , 取格点  $H$ ,

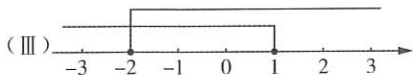
$I$ , 连接  $HI$  交格线于点  $K$ , 连接  $JK$  交  $AB$  于点  $L$ ; 连接  $OL$  并

延长交圆于点  $P$ , 则点  $P$  即为所求.



19. 解: (I)  $x \geq -2$ ;

(II)  $x \leq 1$ ;



(III)  $-2 \leq x \leq 1$ .

20. 解: (I) 40 20.

(II) 观察条形统计图,

$$\therefore \bar{x} = \frac{4 \times 6 + 5 \times 8 + 6 \times 12 + 7 \times 4 + 8 \times 10}{40} = 6.1,$$

$\therefore$  这组数据的平均数是 6.1.

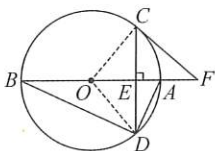
$\therefore$  在这组数据中, 6 出现了 12 次, 出现的次数最多,

$\therefore$  这组数据的众数是 6.

$\therefore$  将这组数据按从小到大的顺序排列, 其中处于中间的两个数都是 6, 有  $\frac{6+6}{2} = 6$ ,

$\therefore$  这组数据的中位数是 6.

21. 解: (I) 如图, 连接  $OC, OD$ ,



$\therefore AB$  是  $\odot O$  的直径,  $AB \perp CD$ ,

$\therefore \widehat{AC} = \widehat{AD}$ , 得  $\angle AOC = \angle AOD$ ,

$\therefore \angle B = 25^\circ$ ,

$\therefore \angle AOD = 2\angle B = 50^\circ$ ,

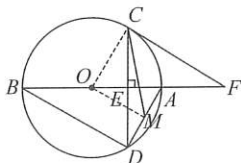
$\therefore \angle AOC = 50^\circ$ ,

$\therefore CF$  是  $\odot O$  的切线,

$\therefore OC \perp CF$ , 得  $\angle OCF = 90^\circ$ ,

$\therefore \angle F = 90^\circ - \angle AOC = 40^\circ$ .

(II) 如图, 连接  $OC, OM$ ,



$\therefore O, M$  分别是  $AB, AD$  的中点,

$\therefore OM \parallel BD, OM = \frac{1}{2}BD$ ,

$\therefore \angle AOM = \angle B = 30^\circ$ ,

由 (I) 得  $\angle AOC = 2\angle B = 60^\circ$ ,

$\therefore \angle COM = \angle AOC + \angle AOM = 90^\circ$ ,

$\therefore AB$  是  $\odot O$  的直径,

$\therefore \angle ADB = 90^\circ$ ,

$\therefore AD = \frac{1}{2}AB = 2, BD = \sqrt{AB^2 - AD^2} = 2\sqrt{3}$ ,

$\therefore OM = \frac{1}{2}BD = \sqrt{3}$ ,

又  $OC = \frac{1}{2}AB = 2$ ,

$\therefore CM = \sqrt{OC^2 + OM^2} = \sqrt{7}$ .

22. 解: 由题意得  $\angle ADB = 28^\circ, \angle ACB = 60^\circ, CD = 36$ ,

在  $\text{Rt}\triangle ABC$  中,  $\tan \angle ACB = \frac{AB}{BC}$ ,

$\therefore BC = \frac{AB}{\tan 60^\circ} = \frac{AB}{\sqrt{3}}$ ,

在  $\text{Rt}\triangle ABD$  中,  $\tan \angle ADB = \frac{AB}{BD}$ ,

$\therefore BD = \frac{AB}{\tan 28^\circ}$ ,

$\therefore BD - BC = CD$ ,

$\therefore \frac{AB}{\tan 28^\circ} - \frac{AB}{\sqrt{3}} = 36$ ,

$\therefore AB = \frac{36 \times \sqrt{3} \times \tan 28^\circ}{\sqrt{3} - \tan 28^\circ} \approx \frac{36 \times 1.73 \times 0.53}{1.73 - 0.53} \approx 27.5 (\text{m})$ .

答: 建筑物  $AB$  的高度约为 27.5 m.

23. 解: (I) (i) 0.24 2.4 4; (ii) 0.16;

(iii) 当  $60 \leq x \leq 90$  时,  $y = 4$ ;

当  $90 < x \leq 110$  时,  $y = -0.2x + 22$ .

(II) 2 km.

24. 解: (I)  $\therefore$  矩形  $OABC$  的顶点  $B(4, 2)$ ,

$\therefore OC = AB = 2, OA = CB = 4$ ,

$\therefore \triangle DOE$  是等腰直角三角形,  $\angle DOE = 90^\circ, E(0, 3)$ ,

$\therefore OD = OE = 3, \angle ODE = 45^\circ$ ,

由平移可得  $\triangle DOE \cong \triangle D'O'E'$ ,

$\therefore \angle O'D'E' = \angle ODE = 45^\circ, \angle D'O'E' = \angle DOE = 90^\circ$ ,

$O'D' = O'E' = 3$ ,

$\therefore \angle COD' = 90^\circ$ ,

$\therefore \triangle D'OC$  是等腰直角三角形,

$\therefore OD' = OC = 2$ ,

$\therefore OO' = O'D' - OD' = 1$ ,

$\therefore$  点  $E'$  的坐标为  $(1, 3)$ .

(II) (i)  $\therefore \angle OCB = \angle AOC = \angle D'O'E' = 90^\circ$ ,

$\therefore$  四边形  $OO'NC$  是矩形,

$\therefore S_{\text{矩形} OO'NC} = OO' \cdot OC = 2t$ ,

$\therefore O'D' = 3, \angle O'D'E' = 45^\circ$ ,

$$\therefore OP = OD' = O'D' - OO' = 3 - t,$$

$$\because \angle CPM = \angle OPD' = 90^\circ - \angle O'D'E' = 45^\circ,$$

$\therefore \triangle PCM$  是等腰直角三角形,

$$\therefore CM = CP = OC - OP = t - 1,$$

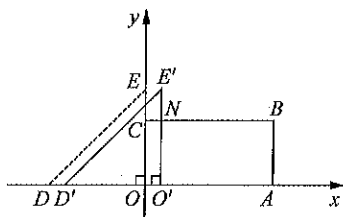
$$\therefore S_{\triangle PCM} = \frac{1}{2} CP \cdot CM = \frac{1}{2} (t-1)^2,$$

$$\therefore S = S_{\text{矩形}OO'NC} - S_{\triangle PCM} = 2t - \frac{1}{2} (t-1)^2,$$

$$\text{即 } S = -\frac{1}{2} t^2 + 3t - \frac{1}{2}, \text{ 其中 } t \text{ 的取值范围是 } 1 < t < 3.$$

$$(\text{II}) \frac{5}{2} \text{ 或 } \frac{65}{16}.$$

①当  $0 < t \leq 1$  时, 重叠部分为矩形  $OO'NC$ , 如图,

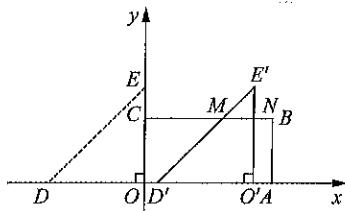


此时  $S = 2t$ , 则当  $t = 1$  时,  $S$  有最大值为  $2 < \frac{31}{8}$ ;

②当  $1 < t < 3$  时, 由 (I) 可知  $S = -\frac{1}{2} t^2 + 3t - \frac{1}{2}$ ,

$$\text{令 } S = \frac{31}{8}, \text{ 即 } -\frac{1}{2} t^2 + 3t - \frac{1}{2} = \frac{31}{8}, \text{ 解得 } t = \frac{5}{2} \text{ 或 } t = \frac{7}{2} \text{ (舍)};$$

③当  $3 \leq t \leq 4$  时, 重叠部分为直角梯形  $MD'O'N$ , 如图,



由 (I) 可知四边形  $OO'NC$  是矩形,

$$\therefore O'N = OC = 2,$$

$$\because OA \parallel BC,$$

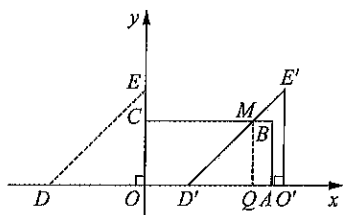
$$\therefore \angle E'MN = \angle O'D'E' = 45^\circ, \angle E'NM = \angle D'O'E' = 90^\circ,$$

$\therefore \triangle MNE'$  为等腰直角三角形,

$$\therefore MN = E'N = O'E' - O'N = 1,$$

$$\therefore S = \frac{(1+3) \times 2}{2} = 4 > \frac{31}{8};$$

④当  $4 < t < 5$  时, 重叠部分为直角梯形  $MD'AB$ , 如图, 过点  $M$  作  $MQ \perp x$  轴于点  $Q$ ,



同理  $D'Q = MQ = OC = 2$ ,

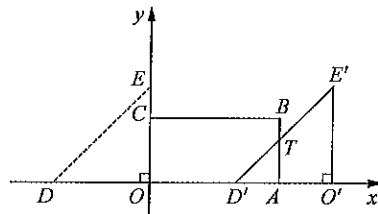
$$\because OD' = OO' - O'D' = t - 3,$$

$$\therefore AQ = OA - OD' - D'Q = 4 - (t-3) - 2 = 5 - t,$$

$$\therefore S = S_{\triangle QMD'} + S_{\text{矩形}ABMQ} = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 + 2(5-t) = -2t + 12,$$

$$\text{令 } S = \frac{31}{8}, \text{ 即 } -2t + 12 = \frac{31}{8}, \text{ 解得 } t = \frac{65}{16};$$

⑤当  $5 \leq t < 7$  时, 重叠部分为  $\triangle ATD'$ , 如图,



同理  $\triangle ATD'$  为等腰直角三角形,

$$AD' = AT = OA - OD' = 4 - (t-3) = 7 - t,$$

$$\therefore S = \frac{1}{2} (7-t)^2 = \frac{1}{2} (t-7)^2,$$

当  $t = 5$  时,  $S$  有最大值为  $2 < \frac{31}{8}$ .

综上所述, 当  $S = \frac{31}{8}$  时,  $t = \frac{5}{2}$  或  $t = \frac{65}{16}$ .

25. 解: (I)  $\because$  抛物线与  $x$  轴交于  $A, B(2, 0)$  两点, 对称轴为直线

$x = -1$ , 且  $OB = OC$ ,

$$\therefore A(-4, 0), C(0, -2),$$

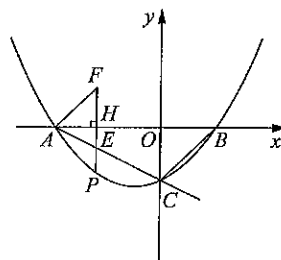
$\therefore$  设抛物线的解析式为  $y = a(x+4)(x-2)$ ,

将点  $C(0, -2)$  代入, 得  $-8a = -2$ , 解得  $a = \frac{1}{4}$ ,

$$\therefore y = \frac{1}{4} (x+4)(x-2),$$

即抛物线的解析式为  $y = \frac{1}{4} x^2 + \frac{1}{2} x - 2$ .

(II) 如图,



设  $P(m, \frac{1}{4} m^2 + \frac{1}{2} m - 2)$ , 其中  $-4 < m < 0$ ,

由  $PH \perp x$  轴于点  $H$ , 得  $H(m, 0)$ ,

$$\because OB = OC, \angle BOC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle OCB = \angle OBC = 45^\circ,$$

$$\because AF \parallel BC,$$

$$\therefore \angle FAH = \angle OBC = 45^\circ,$$

$$\therefore FH = AH = m - (-4) = m + 4,$$

由  $A(-4, 0), C(0, -2)$ ,

可得直线 AC 的解析式为  $y = -\frac{1}{2}x - 2$ ,

$$\therefore E(m, -\frac{1}{2}m - 2),$$

$$\therefore EH = \frac{1}{2}m + 2,$$

$$\therefore EF = EH + FH = \frac{1}{2}m + 2 + m + 4 = \frac{3}{2}m + 6,$$

$$\therefore S_{\triangle AEF} = \frac{1}{2}EF \cdot AH = \frac{1}{2}(\frac{3}{2}m + 6)(m + 4) = \frac{16}{3},$$

$$\text{解得 } m = -\frac{4}{3} \text{ 或 } m = -\frac{20}{3} \text{ (舍)},$$

$$\therefore \text{点 } P \text{ 的坐标为 } (-\frac{4}{3}, -\frac{20}{9}).$$

$$\text{(Ⅲ) 点 } D' \text{ 的坐标为 } (\frac{7}{2}, -\frac{9}{2}) \text{ 或 } (\frac{1+9\sqrt{5}}{8}, -\frac{45+9\sqrt{5}}{16}).$$

$$\therefore y = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x - 2 = \frac{1}{4}(x+1)^2 - \frac{9}{4},$$

$$\therefore D(-1, -\frac{9}{4}),$$

$\therefore$  将抛物线沿着射线 AC 平移, 点 D 的对应点为  $D'$ ,

$\therefore DD' \parallel AC$ ,

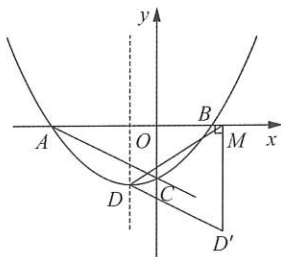
$$\text{设直线 } DD' \text{ 的解析式为 } y = -\frac{1}{2}x + b',$$

$$\text{把 } D(-1, -\frac{9}{4}) \text{ 代入, 得 } -\frac{9}{4} = -\frac{1}{2} \times (-1) + b',$$

$$\text{解得 } b' = -\frac{11}{4},$$

$$\therefore \text{直线 } DD' \text{ 的解析式为 } y = -\frac{1}{2}x - \frac{11}{4},$$

如图,



$$\text{设 } D'(t, -\frac{1}{2}t - \frac{11}{4}), \text{ 其中 } t > -1, \text{ 则 } M(t, 0),$$

① 当  $DD' = DM$  时, 则  $DD'^2 = DM^2$ ,

$$\therefore (t+1)^2 + (-\frac{9}{4} + \frac{1}{2}t + \frac{11}{4})^2 = (t+1)^2 + (\frac{9}{4})^2,$$

$$\text{即 } (t+1)^2 = \frac{81}{4},$$

$$\text{解得 } t = -\frac{11}{2} \text{ (舍)}, \text{ 或 } t = \frac{7}{2},$$

$$\text{此时 } D'(\frac{7}{2}, -\frac{9}{2});$$

② 当  $DD' = MD'$  时, 则  $DD'^2 = MD'^2$ ,

$$\therefore (t+1)^2 + (-\frac{9}{4} + \frac{1}{2}t + \frac{11}{4})^2 = (\frac{1}{2}t + \frac{11}{4})^2,$$

$$\text{即 } 16t^2 - 4t - 101 = 0,$$

$$\text{解得 } t = \frac{1-9\sqrt{5}}{8} \text{ (舍)}, \text{ 或 } t = \frac{1+9\sqrt{5}}{8},$$

$$\text{此时 } D'(\frac{1+9\sqrt{5}}{8}, -\frac{45+9\sqrt{5}}{16}).$$

综上所述, 点  $D'$  的坐标为  $(\frac{7}{2}, -\frac{9}{2})$  或  $(\frac{1+9\sqrt{5}}{8}, -\frac{45+9\sqrt{5}}{16})$ .

## ⑦ 2024 和平区初中学业水平考试模拟(三)

1. B 2. A 3. D 4. C 5. D 6. C 7. C 8. A 9. D 10. B

11. B

12. B 设矩形菜园 AB 的长为  $x$  m, 则 AD 的长为  $(36-2x)$  m,

$\therefore AD \geq AB$ ,

$$\therefore 36-2x \geq x, \text{ 解得 } x \leq 12.$$

$\therefore AB$  的长不可以是 13 m, 故①错误;

设矩形菜园的面积为  $S$ ,

$$\text{则 } S = x(36-2x) = -2x^2 + 36x,$$

$$\text{当 } S = 160 \text{ 时, } -2x^2 + 36x = 160,$$

$$\text{整理得 } x^2 - 18x + 80 = 0, \text{ 解得 } x = 10 \text{ 或 } x = 8,$$

即  $AB = 10$  m 或 8 m 时, 该矩形菜园的面积为  $160 \text{ m}^2$ , 故②正确;

$$\therefore S = -2x^2 + 36x = -2(x-9)^2 + 162,$$

$$\text{又 } -2 < 0, 0 < x \leq 12,$$

$\therefore$  当  $x = 9$  时,  $S$  取得最大值为 162.

即矩形菜园 ABCD 的面积的最大值为  $162 \text{ m}^2$ , 故③正确;

设扇形菜园的半径  $EF = r$  m, 则弧长  $l = (36-r)$  m,

$$\therefore S_{\text{扇形}} = \frac{1}{2}lr = \frac{1}{2}(36-r)r = -\frac{1}{2}r^2 + 18r$$

$$= -\frac{1}{2}(r-18)^2 + 162.$$

$$\therefore -\frac{1}{2} < 0, 0 < r < 36,$$

$\therefore$  当  $r = 18$  时,  $S_{\text{扇形}}$  取得最大值为 162.

$\therefore$  方案二围成扇形菜园的最大面积等于方案一围成矩形菜园的最大面积, 故④错误.

13.  $\frac{5}{12}$  14. 1 15.  $-8x^6$  16. 0

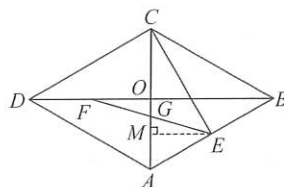
17. (I) 12 (II)  $3\sqrt{5}$

(I)  $\therefore E$  为 AB 的中点,

$$\therefore AE = EB,$$

$$\therefore S_{\triangle ACE} = S_{\triangle BEC} = 12;$$

(II) 如图, 过点 E 作  $EM \perp OA$  于点 M,



∵ 四边形 ABCD 为菱形,

∴  $AC \perp BD, OD = OB, OA = OC$ .

∵  $EM \perp OA$ ,

∴  $EM \parallel OB$ .

∵ E 为 AB 的中点,

∴ M 为 OA 的中点,

∴  $EM = \frac{1}{2}OB, AM = OM = \frac{1}{2}OA$ .

∵ F 为 OD 的中点,

∴  $FO = \frac{1}{2}OD$ .

∴  $EM = FO$ .

∵  $\angle EGM = \angle FGO, \angle MEG = \angle OFG$ ,

∴  $\triangle EMG \cong \triangle FOG (AAS)$ .

∴  $MG = OG = 1$ .

∴  $OM = 2$ .

∴  $OC = OA = 2OM = 4$ .

∴  $AC = 2OA = 8$ .

∵  $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ACE} + S_{\triangle BEC} = \frac{1}{2}AC \cdot OB = 24$ ,

∴  $OB = 6$ .

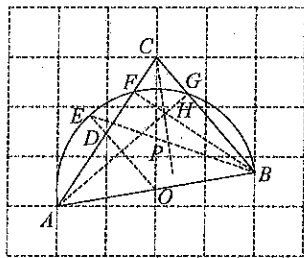
∴  $EM = \frac{1}{2}OB = 3$ .

∵  $CM = OC + OM = 4 + 2 = 6$ ,

∴  $CE = \sqrt{CM^2 + EM^2} = \sqrt{6^2 + 3^2} = 3\sqrt{5}$ .

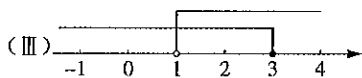
18. (I)  $\sqrt{13}$ ;

(II) 如图, 取 AC 与格线的交点 D, AB 与格线的交点 O, 连接 OD 并延长交半圆于点 E, 连接 BE; 取 AC 与半圆的交点 F, BC 与半圆的交点 G, 连接 BF 和 AG 相交于点 H, 连接 CH 并延长与 BE 相交于点 P, 则点 P 即为所求.



19. 解: (I)  $x > 1$ ;

(II)  $x \leq 3$ ;



(IV)  $1 < x \leq 3$ .

20. 解: (I) 20 25.

(II) 观察条形统计图,

$$\therefore \bar{x} = \frac{1.50 \times 2 + 1.55 \times 4 + 1.60 \times 5 + 1.65 \times 6 + 1.70 \times 3}{20} =$$

1.61,

∴ 这组数据的平均数是 1.61.

∵ 在这组数据中, 1.65 出现了 6 次, 出现的次数最多,

∴ 这组数据的众数是 1.65.

∵ 将这组数据按从小到大的顺序排列, 处于中间的两个数都

是 1.60, 有  $\frac{1.60 + 1.60}{2} = 1.60$ ,

∴ 这组数据的中位数是 1.60.

(III) 能.

21. 解: (I) ∵ BD 平分  $\angle ABC$ ,

∴  $\angle ABD = \angle CBD$ .

∵  $\angle BAC = \angle CDB, \angle BAC = \angle ADB$ ,

∴  $\angle ADB = \angle CDB$ .

又  $BD = BD$ ,

∴  $\triangle BAD \cong \triangle BCD (ASA)$ .

∴  $\angle BAD = \angle BCD$ .

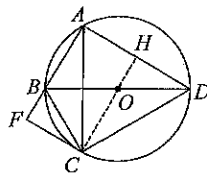
∵ 四边形 ABCD 是圆内接四边形,

∴  $\angle BAD + \angle BCD = 180^\circ$ .

∴  $\angle BAD = \angle BCD = 90^\circ$ .

(II) 由  $\angle BAD = 90^\circ$ , 得 BD 是圆的直径.

如图, 取 BD 的中点 O, 则点 O 即为圆心, 连接 CO 并延长与 AD 相交于点 H.



∵ CF 是  $\odot O$  的切线,

∴  $OC \perp CF$ .

∴  $\angle OCF = 90^\circ$ .

∵  $CF \parallel AD$ ,

∴  $\angle CHD = \angle OCF = 90^\circ$ .

∴  $OH \perp AD$ .

∴  $\widehat{AC} = \widehat{CD}$ .

∴  $AC = CD$ .

由 (I) 知  $\triangle BAD \cong \triangle BCD$ ,

∴  $AD = CD$ . 可得  $AD = CD = AC$ .

∴  $\triangle ADC$  是等边三角形.

∴  $\angle ADC = 60^\circ$ .

∴  $\angle ADB = \angle BDC = 30^\circ$ .

∴ 在  $Rt\triangle OHD$  中,  $OH = \frac{1}{2}OD$ .

∵  $\angle OCF = \angle OHA = \angle BAD = 90^\circ$ ,

∴ 四边形 AFCH 是矩形.

$$\therefore HC=AF=3.$$

$$\because HC=OC+OH=\frac{3}{2}OC=3,$$

$$\therefore OC=2. \text{ 即圆半径的长为 } 2.$$

22. 解: (I) 由题意得  $\angle BAM=90^\circ$ ,  $\angle BMA=45^\circ$ ,  $AM=30$ ,

$$\text{在 Rt}\triangle ABM \text{ 中, } \tan \angle BMA = \frac{AB}{AM},$$

$$\therefore AB=AM \cdot \tan \angle BMA=30 \times \tan 45^\circ=30,$$

即小岛 A, B 之间的距离 AB 为 30 海里.

$$(II) (I) \text{ 在 Rt}\triangle BCD \text{ 中, } \tan \angle CBD = \frac{CD}{BC}, \angle CBD=30^\circ,$$

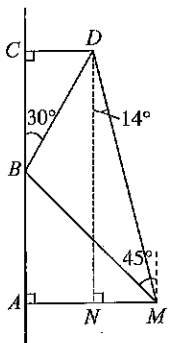
$$CD=h,$$

$$\therefore BC = \frac{CD}{\tan \angle CBD} = \frac{h}{\tan 30^\circ} = \sqrt{3}h.$$

$$\therefore AC=AB+BC=30+\sqrt{3}h,$$

即线段 AC 的长为  $(30+\sqrt{3}h)$  海里.

(II) 如图, 过点 D 作  $DN \perp AM$ , 垂足为 N,



根据题意,  $\angle ACD = \angle CAN = \angle AND = 90^\circ$ ,

$\therefore$  四边形 ACDN 是矩形.

$$\therefore DN=AC=30+\sqrt{3}h, AN=CD=h.$$

$$\therefore MN=AM-AN=30-h.$$

$$\text{在 Rt}\triangle DMN \text{ 中, } \tan \angle MDN = \frac{MN}{DN}, \angle MDN=14^\circ,$$

$$\therefore MN=DN \cdot \tan \angle MDN, \text{ 即 } 30-h=(30+\sqrt{3}h) \times \tan 14^\circ.$$

$$\therefore h = \frac{30-30 \times \tan 14^\circ}{\sqrt{3} \times \tan 14^\circ + 1} \approx \frac{30-30 \times 0.25}{1.73 \times 0.25 + 1} \approx 15.7 \text{ (海里)}.$$

答: 小岛 C, D 之间的距离约为 15.7 海里.

23. 解: (I) (I) 0.3 0.9 1.2;

(II) 0.06;

(III) 当  $0 \leq x \leq 20$  时,  $y=0.03x$ ;

当  $20 < x \leq 30$  时,  $y=0.6$ ;

当  $30 < x \leq 40$  时,  $y=0.06x-1.2$ .

(II) 0.3 km.

24. 解: (I) (I)  $(1, 0)$   $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ .

(II) (I)  $\because A(-1, 0), C(0, \sqrt{3}), D(1, 0)$ ,

$$\therefore OA=1, OC=\sqrt{3}, AD=2.$$

$\because D$  为边 AB 的中点,

$$\therefore BD=AD=2.$$

$\because E, F$  分别为 AC, CD 的中点,

$$\therefore EF = \frac{1}{2}AD = 1.$$

在 Rt $\triangle AOC$  中, 由  $\tan \angle CAO = \frac{OC}{OA} = \sqrt{3}$ , 得  $\angle CAO = 60^\circ$ ,

$$\because \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle CBO = 90^\circ - \angle CAO = 30^\circ.$$

$\because$  在矩形 EFGH 中,  $EF \parallel x$  轴,  $FG \perp x$  轴,

$\therefore$  在矩形  $E'F'G'H'$  中,  $E'F' \parallel x$  轴,  $F'G' \perp x$  轴.

$$\therefore \angle F'MN = \angle CBO = 30^\circ, FM = \frac{1}{2}BD = 1, FG = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\therefore MF' = FF' - FM = t - 1.$$

$$\text{在 Rt}\triangle MF'N \text{ 中, } \tan \angle F'MN = \frac{NF'}{MF'},$$

$$\text{则 } NF' = MF' \cdot \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} MF' = \frac{\sqrt{3}}{3} (t - 1),$$

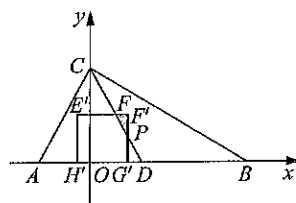
$$\text{由平移可得 } F'G' = FG = \frac{\sqrt{3}}{2}, E'F' = EF = 1,$$

$$\therefore S = S_{\text{矩形 } E'F'G'H'} - S_{\triangle MF'N} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 1 - \frac{1}{2} (t - 1) \times \frac{\sqrt{3}}{3} (t - 1),$$

$$\text{即 } S = -\frac{\sqrt{3}}{6} t^2 + \frac{\sqrt{3}}{3} t + \frac{\sqrt{3}}{3}, \text{ 其中 } t \text{ 的取值范围是 } \frac{3}{2} \leq t < 2.$$

$$(II) \frac{\sqrt{3}}{24} \leq S \leq \frac{15\sqrt{3}}{32}.$$

① 当  $\frac{1}{3} \leq t \leq \frac{1}{2}$  时, 重叠部分为三角形, 边  $F'G'$  与 CD 相交于点 P, 如图,



由  $\tan \angle ODC = \frac{OC}{OD} = \sqrt{3}$ , 得  $\angle ODC = 60^\circ$ ,

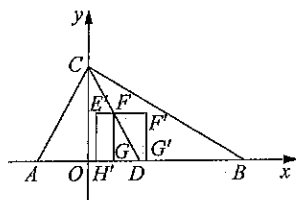
$$\therefore \angle F'FP = 60^\circ, PF' = \sqrt{3} FF' = \sqrt{3} t,$$

$$\therefore S = \frac{1}{2} FF' \cdot PF' = \frac{1}{2} t \cdot \sqrt{3} t = \frac{\sqrt{3}}{2} t^2.$$

$$\because \frac{1}{3} \leq t \leq \frac{1}{2},$$

$$\therefore \frac{\sqrt{3}}{18} \leq S \leq \frac{\sqrt{3}}{8};$$

② 当  $\frac{1}{2} < t \leq 1$  时, 重叠部分为梯形, 如图,



由  $F(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ , 得  $OG = \frac{1}{2}$ , 则  $DG = OD - OG = \frac{1}{2}$ ,

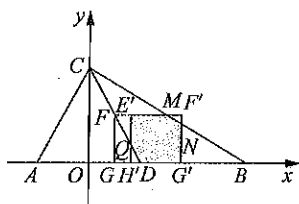
由平移可得  $GG' = FF' = t$ , 则  $DG' = GG' - DG = t - \frac{1}{2}$ ,

$$\therefore S = \frac{1}{2}(t + t - \frac{1}{2}) \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}t - \frac{\sqrt{3}}{8}.$$

$$\therefore \frac{1}{2} < t \leq 1,$$

$$\therefore \frac{\sqrt{3}}{8} < S \leq \frac{3\sqrt{3}}{8},$$

③当  $1 < t < \frac{3}{2}$  时, 重叠部分为六边形, 边  $E'H'$  与  $CD$  相交于点  $Q$ , 如图,



$$\therefore DH' = G'H' - DG' = 1 - (t - \frac{1}{2}) = \frac{3}{2} - t,$$

$$QH' = \sqrt{3}DH' = \sqrt{3}(\frac{3}{2} - t).$$

$$\therefore S = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}(t-1)^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}(\frac{3}{2} - t)^2 = -\frac{2\sqrt{3}}{3}t^2 + \frac{11\sqrt{3}}{6}t - \frac{19\sqrt{3}}{24}.$$

$$= -\frac{2\sqrt{3}}{3}(t - \frac{11}{8})^2 + \frac{15\sqrt{3}}{32},$$

$$\therefore 1 < t < \frac{3}{2},$$

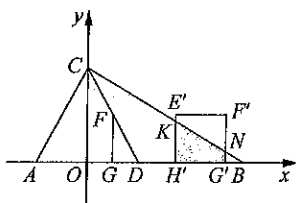
$$\therefore \frac{3\sqrt{3}}{8} < S \leq \frac{15\sqrt{3}}{32},$$

$$\text{④当 } \frac{3}{2} \leq t < 2 \text{ 时, 由 (1) 知 } S = -\frac{\sqrt{3}}{6}t^2 + \frac{\sqrt{3}}{3}t + \frac{\sqrt{3}}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{6}(t-1)^2 + \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\therefore \frac{3}{2} \leq t < 2,$$

$$\therefore \frac{\sqrt{3}}{3} < S \leq \frac{11\sqrt{3}}{24},$$

⑤当  $2 \leq t < \frac{5}{2}$  时, 重叠部分为梯形, 边  $E'H'$  与  $BC$  相交于点  $K$ , 如图,



$$\therefore OB = \sqrt{3}OC = 3,$$

$$\therefore BG' = OB - OG - GG' = \frac{5}{2} - t, NG' = \frac{\sqrt{3}}{3}BG' = \frac{\sqrt{3}}{3}(\frac{5}{2} - t),$$

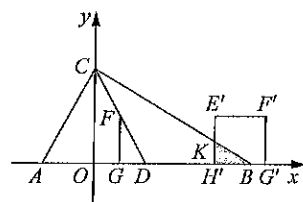
$$BH' = BG' + H'G' = \frac{7}{2} - t, KH' = \frac{\sqrt{3}}{3}BH' = \frac{\sqrt{3}}{3}(\frac{7}{2} - t).$$

$$\therefore S = \frac{1}{2}[\frac{\sqrt{3}}{3}(\frac{5}{2} - t) + \frac{\sqrt{3}}{3}(\frac{7}{2} - t)] \times 1 = -\frac{\sqrt{3}}{3}t + \sqrt{3}.$$

$$\therefore 2 \leq t < \frac{5}{2},$$

$$\therefore \frac{\sqrt{3}}{6} < S \leq \frac{\sqrt{3}}{3},$$

⑥当  $\frac{5}{2} \leq t \leq 3$  时, 重叠部分为三角形, 如图,



$$\therefore BH' = \frac{7}{2} - t, KH' = \frac{\sqrt{3}}{3}(\frac{7}{2} - t),$$

$$\therefore S = \frac{\sqrt{3}}{6}(\frac{7}{2} - t)^2.$$

$$\therefore \frac{5}{2} \leq t \leq 3,$$

$$\therefore \frac{\sqrt{3}}{24} \leq S \leq \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

综上所述, 当  $\frac{1}{2} \leq t \leq 3$  时,  $\frac{\sqrt{3}}{24} \leq S \leq \frac{15\sqrt{3}}{32}$ .

25. 解: (I)  $\because$  抛物线顶点  $P$  的坐标为  $(1, -1)$ ,

$\therefore$  设抛物线解析式为  $y = a(x-1)^2 - 1$ .

$\because$  抛物线经过坐标原点,

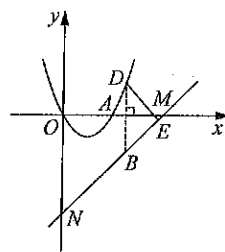
$\therefore$  把  $(0, 0)$  代入, 解得  $a = 1$ .

$\therefore$  抛物线解析式为  $y = x^2 - 2x$ .

当  $y = 0$  时,  $x^2 - 2x = 0$ , 解得  $x_1 = 0, x_2 = 2$ .

$\therefore$  点  $A$  的坐标为  $(2, 0)$ .

(II) 如图, 过点  $D$  作  $DB \perp x$  轴, 与直线  $y = x - 4$  相交于点  $B$ .



设点  $D$  的坐标为  $(t, t^2 - 2t)$ , 则点  $B$  的坐标为  $(t, t - 4)$ .

$$\therefore DB = t^2 - 2t - (t - 4) = t^2 - 3t + 4.$$

将  $y = 0$  代入  $y = x - 4$ , 可得  $x - 4 = 0$ , 解得  $x = 4$ ,

将  $x = 0$  代入  $y = x - 4$ , 可得  $y = -4$ .

$\therefore$  直线  $y = x - 4$  与坐标轴的交点为  $M(4, 0), N(0, -4)$ .

$$\therefore OM = ON = 4.$$

$$\because \angle MON = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle OMN = \angle ONM = 45^\circ.$$

$$\because DB \perp x \text{ 轴}, ON \perp x \text{ 轴},$$

$$\therefore DB \parallel ON.$$

$$\therefore \angle DBE = \angle ONM = 45^\circ.$$

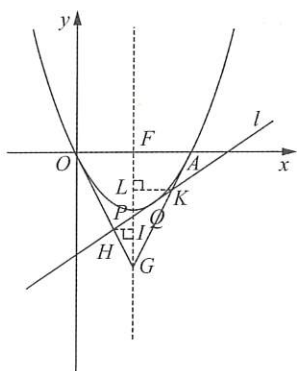
$$\text{在 Rt}\triangle DEB \text{ 中}, \sin \angle DBE = \frac{DE}{DB},$$

$$\therefore DB = \frac{DE}{\sin \angle DBE} = \frac{4\sqrt{2}}{\sin 45^\circ} = 8.$$

$$\therefore t^2 - 3t + 4 = 8, \text{ 解得 } t_1 = -1, t_2 = 4.$$

$$\therefore \text{点 } D \text{ 的坐标为 } (-1, 3) \text{ 或 } (4, 8).$$

(Ⅲ) 如图, 过点  $H$  作  $HI \perp FG$  于点  $I$ , 过点  $K$  作  $KL \perp FG$  于点  $L$ .



$\because$  点  $G$  是点  $F(1, 0)$  关于点  $P(1, -1)$  的对称点,

$\therefore$  点  $G$  的坐标为  $(1, -2)$ .

$$\therefore OF = 1, FG = 2.$$

$$\because \angle OFG = 90^\circ,$$

$$\therefore OG = \sqrt{OF^2 + FG^2} = \sqrt{5}.$$

$$\therefore \text{在 Rt}\triangle OFG \text{ 中}, \sin \angle OGF = \frac{OF}{OG} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

$\because$  点  $O$  和点  $A$  关于对称轴对称,

$$\therefore AG = OG = \sqrt{5}, \angle AGF = \angle OGF.$$

$\because$  直线  $l: y = kx + m (|k| < 2)$  与抛物线只有一个公共点,

$\therefore x^2 - 2x = kx + m$  有两个相等的实数根.

$$\therefore \Delta = 0, \text{ 即 } (-2-k)^2 - 4 \times 1 \times (-m) = 0,$$

$$\text{解得 } m = -\frac{1}{4}(k+2)^2.$$

$$\therefore \text{直线 } l \text{ 的解析式为 } y = kx - \frac{1}{4}(k+2)^2.$$

设直线  $OG$  的解析式为  $y = k_1x$ ,

把  $G(1, -2)$  代入, 解得  $k_1 = -2$ ,

$\therefore$  直线  $OG$  的解析式为  $y = -2x$ .

$$\text{由 } -2x = kx - \frac{1}{4}(k+2)^2, \text{ 解得 } x_H = \frac{1}{4}(k+2).$$

$$\because \text{在 Rt}\triangle HIG \text{ 中}, \sin \angle OGF = \frac{IH}{GH},$$

$$\therefore GH = \frac{IH}{\sin \angle OGF} = \sqrt{5}(1-x_H).$$

设直线  $AG$  的解析式为  $y = k_2x + b_2$ ,

$$\text{把 } G(1, -2), A(2, 0) \text{ 代入, 得 } \begin{cases} k_2 + b_2 = -2 \\ 2k_2 + b_2 = 0 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} k_2 = 2 \\ b_2 = -4 \end{cases},$$

$\therefore$  直线  $AG$  的解析式为  $y = 2x - 4$ .

$$\text{由 } 2x - 4 = kx - \frac{1}{4}(k+2)^2, \text{ 解得 } x_K = \frac{1}{4}(k+6).$$

$$\because \text{在 Rt}\triangle KLG \text{ 中}, \sin \angle AGF = \frac{LK}{GK},$$

$$\therefore GK = \frac{LK}{\sin \angle AGF} = \sqrt{5}(x_K - 1).$$

$$\therefore GH + GK = \sqrt{5}(1-x_H) + \sqrt{5}(x_K - 1) = \sqrt{5}(1-x_H + x_K - 1)$$

$$= \sqrt{5}(-x_H + x_K) = \sqrt{5}\left[-\frac{1}{4}(k+2) + \frac{1}{4}(k+6)\right]$$

$$= \frac{\sqrt{5}}{4}(-k-2+k+6) = \sqrt{5}.$$

### 28 2024 南开区初中学业水平考试模拟(三)

1. D 2. A 3. B 4. C 5. B 6. C 7. C 8. A 9. C

10. D  $\because AB = AC, \angle A = 36^\circ,$

$$\therefore \angle ABC = \angle ACB = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle A) = 72^\circ.$$

由题意, 得  $BC = DE$ ,  $MN$  是线段  $AB$  的垂直平分线,

$$\therefore AD = BD, DN \perp AB.$$

$$\therefore \angle DBA = \angle A = 36^\circ.$$

$$\therefore \angle DBC = \angle ABC - \angle DBA = 36^\circ.$$

$$\therefore \angle CDB = \angle A + \angle DBA = 72^\circ.$$

$$\therefore \angle CDB = \angle ACB.$$

$$\therefore BD = BC.$$

$\therefore AD = BD = BC = DE$ , 故选项 B 正确;

$$\because BD = DE,$$

$$\therefore \angle DBE = \angle DEB = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle CDB) = 54^\circ.$$

$$\therefore \angle EBA = \angle DBA + \angle DBE = 36^\circ + 54^\circ = 90^\circ,$$

即  $EB \perp AB$ ,

又  $DN \perp AB$ ,

$\therefore MN \parallel BE$ , 故选项 A 正确;

$$\because \angle DBC = 36^\circ, \angle DBE = 54^\circ,$$

$$\therefore \angle CBE = \angle DBE - \angle DBC = 54^\circ - 36^\circ = 18^\circ.$$

$$\because \angle AEB = 54^\circ,$$

$\therefore \angle AEB = 3\angle CBE$ , 故选项 C 正确;

$$\because \angle A = 36^\circ, \angle ABE = 90^\circ,$$

$$\therefore AE \neq 2BE.$$

$$\because AB + CE = AC + CE = AE,$$

$\therefore AB + CE \neq 2BE$ , 故选项 D 错误.

11. D  $\because \triangle ABC$  绕点  $C$  顺时针旋转得  $\triangle A_1B_1C$ , 点  $A_1$  落在  $AB$  边上,

$$\therefore \angle ACA_1 = \angle BCB_1, CB = CB_1, CA = CA_1.$$

$$\because \angle ACB = 90^\circ, \angle ABC = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle A = 60^\circ, AB = 2AC = 4\sqrt{2}.$$

$$\therefore \triangle ACA_1 \text{ 是等边三角形.}$$

$$\therefore \angle ACA_1 = \angle BCB_1 = 60^\circ, \triangle BCB_1 \text{ 是等边三角形.}$$

$$\therefore AC = A_1C = AA_1 = 2\sqrt{2}, A_1B = AB - AA_1 = 2\sqrt{2}.$$

$$\therefore CB = \sqrt{AB^2 - AC^2} = 2\sqrt{6}.$$

$$\because \angle CBB_1 = 60^\circ, BB_1 = CB = 2\sqrt{6},$$

$$\therefore \angle ABD = 90^\circ.$$

$$\because BB_1 \text{ 的中点为 } D,$$

$$\therefore BD = \frac{1}{2}BB_1 = \sqrt{6},$$

$$\therefore A_1D = \sqrt{A_1B^2 + BD^2} = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 + (\sqrt{6})^2} = \sqrt{14}.$$

12. C  $\because$  抛物线开口向下,  $\therefore a < 0$ .

$$\because \text{抛物线的对称轴在 } y \text{ 轴的右侧}, \therefore -\frac{b}{2a} > 0, \text{ 即 } b > 0.$$

$$\because \text{抛物线与 } y \text{ 轴的交点在 } x \text{ 轴上方}, \therefore c > 0.$$

$$\therefore abc < 0, \text{ 故 ① 正确;}$$

$$\because \text{抛物线与 } x \text{ 轴有两个交点},$$

$$\therefore b^2 - 4ac > 0.$$

$$\because a < 0,$$

$$\therefore \frac{b^2 - 4ac}{4a} < 0, \text{ 故 ② 错误;}$$

$$\because C(0, c), OA = OC, \therefore A(-c, 0).$$

$$\text{把 } A(-c, 0) \text{ 代入 } y = ax^2 + bx + c, \text{ 得 } ac^2 - bc + c = 0,$$

$$\because c > 0, \therefore ac - b + 1 = 0, \text{ 故 ③ 错误;}$$

$$\text{对于方程 } ax^2 + bx + 2c = 0,$$

$$\because a < 0, c > 0,$$

$$\therefore \Delta = b^2 - 4 \times a \times (2c) = b^2 - 8ac > 0.$$

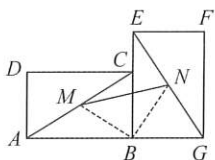
$$\therefore \text{方程 } ax^2 + bx + 2c = 0 \text{ 有两个不相等的实数根, 故 ④ 正确.}$$

13.  $\frac{1}{2}$  14. 3 15.  $-4a$  16.  $(-2, 0)$

17. (I) 5 (II)  $\frac{5\sqrt{2}}{2}$

(I) 在  $\text{Rt}\triangle ABC$  中, 利用勾股定理可得  $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 5$ ;

(II) 如图, 连接  $BM, BN$ ,



$\because M$  为  $AC$  的中点,

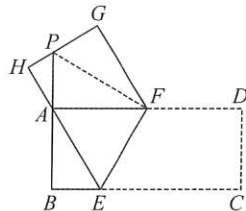
$$\therefore BM = \frac{1}{2}AC = \frac{5}{2}.$$

$\because$  矩形  $ABCD$  绕点  $B$  顺时针旋转  $90^\circ$  至  $EBGF$  的位置,

$$\therefore BM = BN, \text{ 且 } \angle MBN = 90^\circ.$$

$$\therefore MN = \sqrt{2}BM = \frac{5\sqrt{2}}{2}.$$

18.  $4\sqrt{3}$  如图, 连接  $PF$ , 设  $BC = 2x, AH = BE = a$ ,



由矩形的性质和折叠的性质知  $FG = FD, \angle G = \angle FAP = 90^\circ$ ,

$$AB = CD = 3, AD = BC,$$

$$\because PF = PF, PA = PG,$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle PAF \cong \text{Rt}\triangle PGF (\text{HL}).$$

$$\therefore FA = FG = FD = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2}BC = x.$$

由矩形的性质知  $AD \parallel BC$ ,

$$\therefore \angle AFE = \angle FEC.$$

由折叠的性质知  $\angle FEA = \angle FEC$ ,

$$\therefore \angle FEA = \angle AFE.$$

$$\therefore AE = FA = x.$$

由折叠的性质知  $EC = EH = AE + AH = x + a$ ,

$$\therefore BC = BE + EC = a + x + a = 2x.$$

$$\therefore a = \frac{1}{2}x, \text{ 即 } BE = \frac{1}{2}x.$$

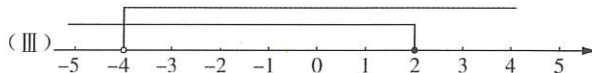
在  $\text{Rt}\triangle ABE$  中,  $AB^2 + BE^2 = AE^2$ ,

$$\text{即 } 3^2 + \left(\frac{1}{2}x\right)^2 = x^2, \text{ 解得 } x = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore BC = 2x = 4\sqrt{3}.$$

19. 解: (I)  $x \leq 2$ ;

(II)  $x > -4$ ;



(IV)  $-4 < x \leq 2$ .

20. 解: (I) 20 25.

(II) 观察条形统计图,

$$\therefore \bar{x} = \frac{100 \times 4 + 110 \times 2 + 120 \times 4 + 130 \times 5 + 140 \times 2 + 150 \times 3}{4 + 2 + 4 + 5 + 2 + 3}$$

$$= 124,$$

$\therefore$  这组数据的平均数为 124.

$\because$  在这组数据中, 130 出现了 5 次, 出现的次数最多,

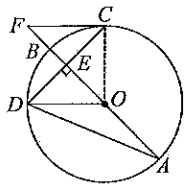
∴这组数据的众数为 130.

∴将这 20 个数据按从小到大的顺序排列,其中处于中间位置

的两个数是 120 和 130,有  $\frac{120+130}{2}=125$ ,

∴这组数据的中位数为 125.

21. 解:(I)如图,连接 OC,



∵  $\angle A = 22^\circ$ ,

∴  $\angle DOB = 2\angle A = 44^\circ$ .

∵ AB 是  $\odot O$  的直径,弦  $CD \perp AB$  于点 E,

∴  $\widehat{CB} = \widehat{BD}$ .

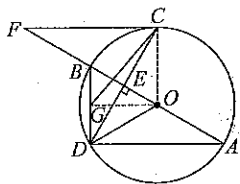
∴  $\angle COB = \angle DOB = 44^\circ$ .

∵ CF 为  $\odot O$  的切线,且 OC 为半径,

∴  $CF \perp OC$ ,即  $\angle FCO = 90^\circ$ .

∴  $\angle F = 90^\circ - \angle COB = 90^\circ - 44^\circ = 46^\circ$ .

(II)如图,连接 OC,OG,



由(I)可知  $\angle FCO = 90^\circ$ ,且  $\angle COB = \angle DOB = 2\angle A$ ,

∵  $CF \parallel AD$ ,∴  $\angle F = \angle A$ .

在  $\text{Rt}\triangle FCO$  中,有  $\angle F + \angle COB = 90^\circ$ ,

即  $\angle A + 2\angle A = 90^\circ$ ,∴  $\angle A = 30^\circ$ .

∵ AB 是  $\odot O$  的直径,

∴  $\angle BDA = 90^\circ$ .

∵  $BO = DO$ ,且 G 为 BD 中点,

∴  $\angle BGO = 90^\circ = \angle BDA$ ,

∴  $GO \parallel AD \parallel CF$ .

∴  $\angle GOC = 90^\circ$ .

设  $\odot O$  的半径为 r,

∵ 在  $\text{Rt}\triangle ABD$  中, $\angle GOB = \angle A = 30^\circ$ , $BO = r$ ,

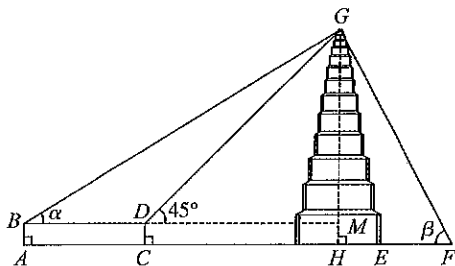
∴  $GO = r \cdot \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}r$ ,

∵ 在  $\text{Rt}\triangle GOC$  中, $GO = \frac{\sqrt{3}}{2}r$ , $CO = r$ , $CG = \sqrt{21}$ ,

∴  $(\frac{\sqrt{3}}{2}r)^2 + r^2 = 21$ ,解得  $r = 2\sqrt{3}$ ,

即  $\odot O$  的半径为  $2\sqrt{3}$ .

22. 解:(I)(I)如图,延长 BD 交 GH 于点 M,



由题意可知:  $\angle GMD = \angle GHF = 90^\circ$ ,且四边形 BACD,

BAHM 均为矩形,

则  $AB = CD = HM = 1$ , $BD = AC = 9$ ,

∵  $CH = x$ ,∴  $DM = CH = x$ .

在  $\text{Rt}\triangle GDM$  中, $\angle GDM = 45^\circ$ , $\tan \angle GDM = \frac{GM}{DM}$ ,

∴  $GM = DM \cdot \tan 45^\circ = DM = x$ .

∴  $GH = GM + HM = x + 1$ .

(II)在  $\text{Rt}\triangle GBM$  中, $\angle GBM = \alpha$ , $BM = 9 + x$ ,

$\tan \angle GBM = \frac{GM}{BM}$ ,

∴  $GM = BM \cdot \tan \alpha$ ,即  $x = (9 + x) \cdot \tan \alpha$ ,

解得  $x = \frac{9 \tan \alpha}{1 - \tan \alpha} \approx \frac{9 \times 0.625}{1 - 0.625} = 15$ ,

∴  $GH = x + 1 = 16$ .

答:古塔的高度 GH 约为 16 m.

(II)在  $\text{Rt}\triangle GHF$  中, $\angle GFH = \beta$ , $\tan \angle GFH = \frac{GH}{FH}$ ,

∴  $FH = \frac{GH}{\tan \beta} \approx \frac{16}{2.000} = 8$ .

∴  $HE = FH - FE = 8 - 5 = 3(\text{m})$ .

答:古塔底面圆的半径 HE 约为 3 m.

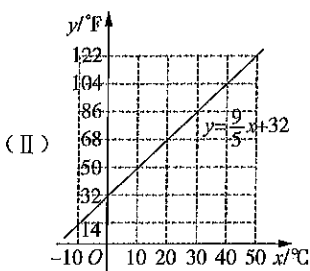
23. 解:(I)由表格可知 y 是 x 的一次函数,

设  $y = kx + b(k \neq 0)$ ,

把  $x = 0$  时  $y = 32$ , $x = 10$  时  $y = 50$  分别代入,

得  $\begin{cases} b = 32 \\ 10k + b = 50 \end{cases}$ ,解得  $\begin{cases} k = \frac{9}{5} \\ b = 32 \end{cases}$ ,

∴ y 关于 x 的函数关系式为  $y = \frac{9}{5}x + 32$ .



(III)(I) 14;(II) -20;(III) -40.

②2024 红桥区初中学业水平考试模拟(三)

1. D 2. A 3. B 4. C 5. B 6. C 7. A 8. B 9. D 10. C  
11. A

12. B 由题意可知  $\begin{cases} x \geq 60 \\ \frac{x-60}{60} \leq 45\% \end{cases}$ , 解得  $60 \leq x \leq 87$ ,

$\therefore$  销售单价不可能是 90 元, 故①不正确;

设利润为  $W$ ,

根据题意可知,  $W = (x-60)(-x+120) = -x^2 + 180x - 7200 = -(x-90)^2 + 900$ ,

$\therefore$  抛物线的开口向下,

$\therefore$  当  $x < 90$  时,  $W$  随  $x$  的增大而增大,

$\therefore 60 \leq x \leq 87$ ,

$\therefore$  当  $x = 87$  时,  $W = -(87-90)^2 + 900 = 891$ (元),

$\therefore$  当销售单价定为 87 元时, 可获得最大利润, 最大利润是 891 元, 故②正确;

由题意, 令  $(x-60)(-x+120) = 500$ ,

解得  $x_1 = 70, x_2 = 110$ (舍),

则只有当销售单价为 70 元时, 满足该服装店销售这种服装获得的利润为 500 元, 故③不正确.

13.  $\frac{3}{10}$  14.  $9x^4y^2$  15. 4 16.  $(-1, 0)$

17. (I) 1 (II)  $\frac{\sqrt{5}}{2}$

(I) 在  $Rt\triangle ABC$  中,  $AB=4, BC=5$ ,

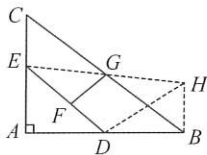
由勾股定理, 得  $AC=3$ .

$\therefore D$  为边  $AB$  的中点,  $AD=AE$ ,

$\therefore AE=2$ .

$\therefore CE=AC-AE=1$ ;

(II) 如图, 作  $BH \parallel AC$ , 连接  $EG$  并延长交  $BH$  于点  $H$ , 连接  $DH$ ,



$\therefore BH \parallel AC, \angle A = 90^\circ$ ,

$\therefore \angle C = \angle GBH, \angle CEG = \angle BHG, \angle ABH = 90^\circ$ .

又点  $G$  为  $BC$  的中点,

$\therefore CG = BG$ .

$\therefore \triangle CGE \cong \triangle BGH$  (AAS).

$\therefore BH = CE = 1, GE = GH$ .

在  $Rt\triangle BDH$  中,  $DH = \sqrt{BD^2 + BH^2} = \sqrt{5}$ ,

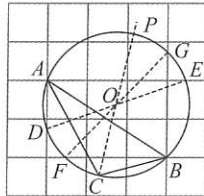
$\therefore$  点  $F$  为  $DE$  的中点,

$\therefore FG$  是  $\triangle EDH$  的中位线.

$\therefore FG = \frac{1}{2}DH = \frac{\sqrt{5}}{2}$ .

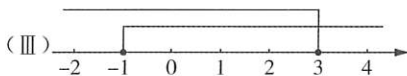
18. (I)  $\sqrt{13}$ ;

(II) 如图, 取圆与网格线的交点  $D, E, F, G$ , 连接  $DE, FG$  相交于点  $O$ , 连接  $CO$  并延长, 与圆相交于点  $P$ , 则点  $P$  即为所求.



19. 解: (I)  $x \leq 3$ ;

(II)  $x \geq -1$ ;



(IV)  $-1 \leq x \leq 3$ .

20. 解: (I) 40 25.

(II) 观察条形统计图,

$\therefore \bar{x} = \frac{14 \times 6 + 15 \times 12 + 16 \times 10 + 17 \times 8 + 18 \times 4}{40} = 15.8$ ,

$\therefore$  这组测试成绩数据的平均数是 15.8.

$\therefore$  在这组测试成绩数据中, 15 出现了 12 次, 出现的次数最多,

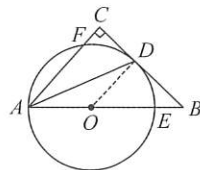
$\therefore$  这组测试成绩数据的众数是 15.

$\therefore$  将这组测试成绩数据按从小到大的顺序排列, 其中处于中

间的两个数都是 16, 有  $\frac{16+16}{2} = 16$ ,

$\therefore$  这组测试成绩数据的中位数是 16.

21. 解: (I) 如图①, 连接  $OD$ ,



图①

$\therefore BC$  切  $\odot O$  于点  $D$ ,

$\therefore \angle ODB = 90^\circ$ .

$\therefore \angle C = 90^\circ$ ,

$\therefore AC \parallel OD$ .

$\therefore \angle CAD = \angle ADO$ .

$\therefore OA = OD$ ,

$\therefore \angle DAO = \angle ADO = \angle CAD = 25^\circ$ .

$\therefore \angle DOB = 2\angle DAO = 50^\circ$ .

$\therefore \angle ODB = 90^\circ$ ,

$\therefore \angle B = 90^\circ - \angle DOB = 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ$ .

中汇数学[301]

抛物线的对称轴为直线  $x=3$ ,

$\therefore P(1,3), \therefore B(1,5)$ .

$\therefore$  点  $B$  关于抛物线对称轴的对称点为  $C$ ,

$\therefore C(5,5)$ .

$\therefore BC=5-1=4$ .

(II) 当  $y=0$  时,  $-x^2+2mx=0$ , 解得  $x_1=0, x_2=2m$ ,

则  $A(2m,0), B(1,2m-1)$ ,

$\therefore$  点  $B$  关于抛物线对称轴的对称点为  $C$ , 而抛物线的对称轴为直线  $x=m$ ,

$\therefore C(2m-1, 2m-1)$ .

$\therefore CA \perp CP$ ,

$\therefore PC^2 + AC^2 = PA^2$ ,

即  $(2m-2)^2 + (m-1)^2 + 1^2 + (2m-1)^2 = (2m-1)^2 + m^2$ .

整理得  $2m^2 - 5m + 3 = 0$ , 解得  $m_1=1$  (舍),  $m_2=\frac{3}{2}$ ,

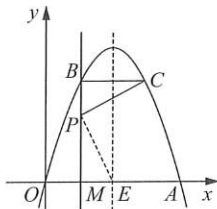
即  $m$  的值为  $\frac{3}{2}$ .

(III)  $\therefore$  点  $B$  与点  $C$  不重合,  $\therefore m \neq 1$ .

① 当  $m > 1$  时, 点  $P$  在对称轴的左侧,

$BC=2(m-1), PM=m, BP=m-1$ .

如图, 若点  $E$  在  $x$  轴上, 由已知,  $\angle BPC + \angle MPE = 90^\circ$ .



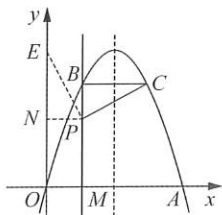
$\therefore \angle BPC + \angle BCP = 90^\circ, \therefore \angle BCP = \angle MPE$ .

$\therefore PC = EP, \therefore \triangle BPC \cong \triangle MEP$  (AAS).

$\therefore BC = MP$ , 即  $2(m-1) = m$ , 解得  $m=2$ .

$\therefore BP = ME = 1$ , 此时点  $E$  的坐标为  $(2, 0)$ ;

如图, 若点  $E$  在  $y$  轴上, 过点  $P$  作  $PN \perp y$  轴于点  $N$ .



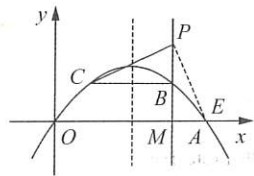
同理  $\triangle BPC \cong \triangle NPE, \therefore BP = NP = 1$ .

$\therefore m-1=1$ , 解得  $m=2$ , 此时点  $E$  的坐标为  $(0, 4)$ ;

② 当  $0 < m < 1$  时, 点  $P$  在对称轴的右侧,

$BC=2(1-m), PM=m, BP=1-m$ .

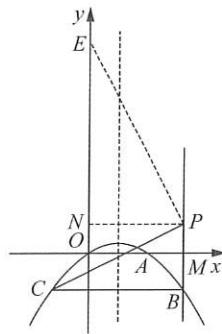
如图, 若点  $E$  在  $x$  轴上, 可得  $\triangle PBC \cong \triangle EMP$ ,



$\therefore BC = MP$ , 即  $2(1-m) = m$ , 解得  $m = \frac{2}{3}$ ,

则  $BP = ME = \frac{1}{3}$ , 此时点  $E$  的坐标为  $(\frac{4}{3}, 0)$ ;

如图, 若点  $E$  在  $y$  轴上, 过点  $P$  作  $PN \perp y$  轴于点  $N$ ,



可得  $\triangle BPC \cong \triangle NPE, \therefore BP = NP = OM = 1$ .

$\therefore 1-m=1$ , 解得  $m=0$  (舍).

综上所述, 当  $m=2$  时, 点  $E$  的坐标为  $(2, 0)$  或  $(0, 4)$ ; 当  $m =$

$\frac{2}{3}$  时, 点  $E$  的坐标为  $(\frac{4}{3}, 0)$ .

## 30 2024 实验中学第二学期九年级结课质量调查

1. D 2. A 3. A 4. B 5. B 6. B 7. B 8. A 9. B 10. C

11. D 由折叠知  $\triangle DEF \cong \triangle DEC$ ,

$\therefore \angle DFE = \angle C, DF = DC$ .

$\therefore D$  是  $BC$  的中点,

$\therefore BD = DC$ .

$\therefore BD = DF$ , 故 B 正确;

$\therefore \angle B = \angle BFD$ .

$\therefore \angle FAE = \angle B + \angle C, \angle AFE = \angle AFD + \angle DFE$ ,

$\therefore \angle FAE = \angle AFE$ .

$\therefore AE = EF$ , 故 A 正确;

$\therefore EF = CE$ ,

$\therefore AE = CE$ .

$\therefore DE$  是  $\triangle ABC$  的中位线.

$\therefore AB \parallel DE$ , 故 C 正确.

12. B 设垂直于墙的一边长为  $x$  m, 则平行于墙的一边长为  $(40 - 2x)$  m,

由题意知  $6 \leq 40 - 2x \leq 12$ , 解得  $14 \leq x \leq 17$ ,

$\therefore$  垂直于墙的一边长可以为 15 m, 故 ① 正确;

设矩形苗圃园的面积为  $y$  m<sup>2</sup>,

则  $y = x(40 - 2x) = -2x^2 + 40x = -2(x - 10)^2 + 200$ ,



**[304]** 微信公众号：玩转数学黄老师

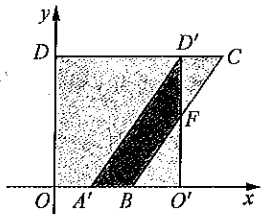
②当  $1 < t < 2$  时, 由 (1) 得,  $S = -\sqrt{3}t^2 + 3\sqrt{3}t - \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$= -\sqrt{3}\left(t - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{7\sqrt{3}}{4},$$

$$\because 1 < t < 2,$$

$$\therefore \frac{3\sqrt{3}}{2} < S \leq \frac{7\sqrt{3}}{4};$$

③当  $2 \leq t \leq \frac{8}{3}$  时, 重叠部分是四边形, 如图,



由 (1) 知  $S_{\triangle BFO'} = \frac{\sqrt{3}}{2}(t-1)^2$ ,  $S_{\triangle A'D'O'} = 2\sqrt{3}$ ,

$$\therefore S = 2\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}(t-1)^2 = -\frac{\sqrt{3}}{2}(t-1)^2 + 2\sqrt{3}.$$

$$\because 2 \leq t \leq \frac{8}{3},$$

$$\therefore \frac{11\sqrt{3}}{18} \leq S \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

综上, 当  $\frac{2}{3} \leq t \leq \frac{8}{3}$  时,  $\frac{11\sqrt{3}}{18} \leq S \leq \frac{7\sqrt{3}}{4}$ .

25. 解: (I)  $\because A(-3, 0), B(1, 0)$  两点在抛物线上,

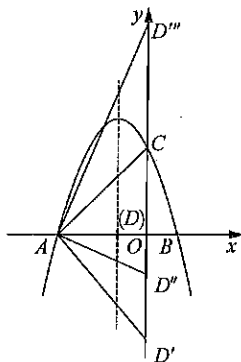
$$\therefore \begin{cases} 0 = -(-3)^2 - 3b + c \\ 0 = -1^2 + b + c \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} b = -2 \\ c = 3 \end{cases},$$

$\therefore$  抛物线的解析式为  $y = -x^2 - 2x + 3$ .

(II) 令  $x = 0$ , 得  $y = 3$ ,

$\therefore C(0, 3)$ .

若  $\triangle ACD$  为等腰三角形, 则点  $D$  的位置如图所示,



当  $DA = DC$  时, 点  $D$  与原点  $O$  重合,

$\therefore D(0, 0)$ ;

当  $AC = AD$  时, 点  $D$  与点  $C$  关于  $x$  轴对称,

$\therefore D(0, -3)$ ;

当  $AC = CD$  时,  $CD = \sqrt{OA^2 + OC^2} = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$ ,

$\therefore$  点  $D$  的纵坐标为  $3 - 3\sqrt{2}$  或  $3 + 3\sqrt{2}$ .

$\therefore D(0, 3 - 3\sqrt{2})$  或  $(0, 3 + 3\sqrt{2})$ .

综上所述, 点  $D$  的坐标为  $(0, 0)$  或  $(0, -3)$  或  $(0, 3 - 3\sqrt{2})$  或  $(0, 3 + 3\sqrt{2})$ .

(III) 存在.

抛物线  $y = -x^2 - 2x + 3$  的对称轴为  $x = -1$ ,

设  $P(-1, t), Q(m, n)$ ,

$\because A(-3, 0), C(0, 3)$ ,

$$\therefore AC^2 = (-3)^2 + 3^2 = 18,$$

$$AP^2 = (-1 + 3)^2 + t^2 = t^2 + 4,$$

$$PC^2 = (-1)^2 + (t - 3)^2 = t^2 - 6t + 10.$$

若以  $A, C, P, Q$  为顶点的四边形是菱形, 则分三种情况:

①当以  $AP$  为对角线时,  $PC = AC$ , 如图 1,

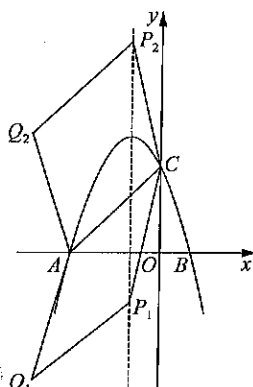


图 1

$\therefore PC^2 = AC^2$ , 即  $t^2 - 6t + 10 = 18$ , 解得  $t = 3 \pm \sqrt{17}$ ,

$\therefore P_1(-1, 3 - \sqrt{17}), P_2(-1, 3 + \sqrt{17})$ ;

②当以  $AP$  为边, 且  $AC$  为对角线时,  $PC = AP$ , 如图 2,

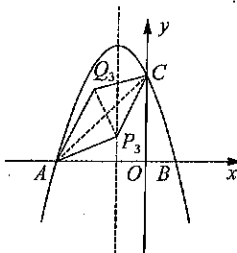


图 2

$\therefore PC^2 = AP^2$ , 即  $t^2 - 6t + 10 = t^2 + 4$ , 解得  $t = 1$ ,

$\therefore P_3(-1, 1)$ ;

③当以  $AP$  为边, 且  $CP$  为对角线时,  $AP = AC$ , 如图 3,

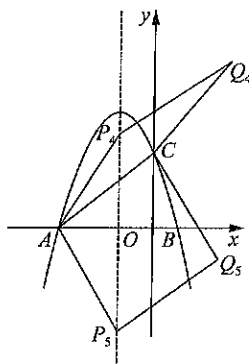
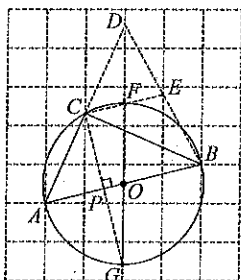


图 3



20. 解:(I) 90;

(II) 如图, 延长  $AC$  与网格线相交于点  $D$ , 连接  $DB$ , 与网格线相交于点  $E$ , 连接  $CE$  与圆相交于点  $F$ , 取  $AB$  与网格线的交点  $O$ , 即圆心为点  $O$ , 连接  $FO$  并延长与圆相交于点  $G$ , 连接  $CG$ ,  $CG$  与  $AB$  相交于点  $P$ , 则点  $P$  即为所求.



21. 解:(I) 40 15.

(II) 观察条形统计图,

$$\bar{x} = \frac{1}{40} \times (6 \times 4 + 7 \times 6 + 8 \times 11 + 9 \times 12 + 10 \times 7) = 8.3,$$

$\therefore$  这组数据的平均数是 8.3.

$\therefore$  在这组数据中, 9 出现了 12 次, 出现的次数最多,

$\therefore$  这组数据的众数是 9.

$\therefore$  将这组数据从小到大依次排列, 其中处于中间的两个数都是 8, 有  $\frac{8+8}{2} = 8$ ,

$\therefore$  这组数据的中位数是 8.

$$(III) 800 \times \frac{12+7}{40} = 380 (\text{名}),$$

答: 该校九年级学生的理化生实验操作得分不低于 9 分的学生人数约为 380.

22. (I) 证明: 如图, 连接  $OC$ ,

$\therefore AC$  平分  $\angle DAB$ ,

$$\therefore \angle DAC = \angle BAC.$$

$$\therefore OA = OC,$$

$$\therefore \angle BAC = \angle ACO.$$

$$\therefore \angle DAC = \angle ACO.$$

$$\therefore AD \parallel OC.$$

$$\therefore AD \perp DC,$$

$$\therefore OC \perp DC.$$

$\therefore DC$  为  $\odot O$  的切线.

(II) 解:  $\therefore AD \perp DC$ ,

$$\therefore \angle ADC = 90^\circ.$$

$$\therefore AD = 3, DC = \sqrt{3},$$

$$\therefore \tan \angle DAC = \frac{DC}{AD} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$\therefore \angle DAC = 30^\circ.$$

$$\therefore \angle BAC = \angle ACO = \angle DAC = 30^\circ, AC = 2DC = 2\sqrt{3}.$$

$$\therefore \angle AOC = 180^\circ - 30^\circ - 30^\circ = 120^\circ.$$

如图, 连接  $BC$ ,

$\therefore AB$  是  $\odot O$  的直径,

$$\therefore \angle ACB = 90^\circ.$$

$$\therefore \angle BAC = 30^\circ,$$

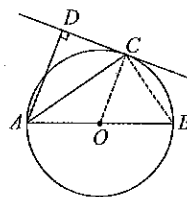
$$\therefore AB = 2BC.$$

$$\therefore AC = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore (2BC)^2 = (2\sqrt{3})^2 + BC^2, \text{ 解得 } BC = 2, \text{ 则 } AB = 4,$$

$$\therefore AO = 2.$$

$$\therefore \text{劣弧 } AC \text{ 的长是 } \frac{120\pi \times 2}{180} = \frac{4\pi}{3}.$$



23. 解:(I) 由题意知  $\angle AEB = 90^\circ$ ,

在  $\text{Rt}\triangle ABE$  中,  $\angle BAE = 30^\circ, AB = 20$ ,

$$\therefore BE = \frac{1}{2} AB = 10, \text{ 即 } BE \text{ 的长为 } 10 \text{ m}.$$

(II) (I) 在  $\text{Rt}\triangle ABE$  中,  $\cos \angle BAE = \frac{AE}{AB}$ ,

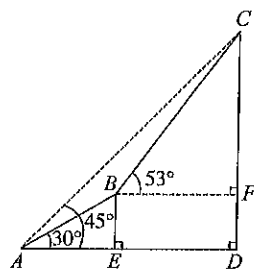
$$\therefore AE = AB \cdot \cos \angle BAE = 10\sqrt{3}.$$

在  $\text{Rt}\triangle ADC$  中, 由  $\tan \angle CAD = \frac{CD}{AD}, CD = h, \angle CAD = 45^\circ$ ,

$$\text{得 } AD = \frac{CD}{\tan 45^\circ} = h,$$

$$\therefore DE = AD - AE = h - 10\sqrt{3}.$$

(II) 如图, 过点  $B$  作  $BF \perp CD$ , 垂足为  $F$ ,



根据题意,  $\angle BED = \angle D = \angle BFD = 90^\circ$ ,

$\therefore$  四边形  $BEDF$  是矩形.

$$\therefore BF = DE = h - 10\sqrt{3}, DF = BE = 10.$$

$$\text{可得 } CF = CD - DF = h - 10,$$

在  $\text{Rt}\triangle BFC$  中,  $\tan \angle CBF = \frac{CF}{BF}, \angle CBF = 53^\circ$ ,

$$\therefore CF = BF \cdot \tan \angle CBF, \text{ 即 } h - 10 = (h - 10\sqrt{3}) \times \tan 53^\circ,$$

$$\therefore h = \frac{10\sqrt{3} \times \tan 53^\circ - 10}{\tan 53^\circ - 1} \approx \frac{10 \times 1.7 \times 1.3 - 10}{1.3 - 1} \approx 40 (\text{m}).$$

答: 建筑物  $CD$  的高度约为 40 m.

24. 解: (I)  $\because$  点  $M$  在  $y$  轴负半轴上且  $OM=2$ ,

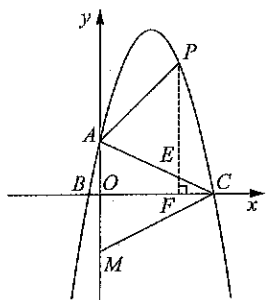
$$\therefore M(0, -2).$$

将  $A(0, 2), C(4, 0)$  代入  $y = -x^2 + bx + c$ ,

$$\begin{cases} c=2 \\ -16+4b+c=0 \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} b=\frac{7}{2} \\ c=2 \end{cases},$$

$\therefore$  抛物线的解析式为  $y = -x^2 + \frac{7}{2}x + 2$ .

(II) 如图, 过点  $P$  作  $PF \perp x$  轴于点  $F$ , 与  $AC$  交于点  $E$ ,



设直线  $AC$  的解析式为  $y = kx + m (k \neq 0)$ ,

将  $A(0, 2), C(4, 0)$  代入  $y = kx + m$ ,

$$\begin{cases} m=2 \\ 4k+m=0 \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} k=-\frac{1}{2} \\ m=2 \end{cases},$$

$\therefore$  直线  $AC$  的解析式为  $y = -\frac{1}{2}x + 2$ .

设点  $P$  的横坐标为  $p (0 < p < 4)$ ,

$$\text{则 } P(p, -p^2 + \frac{7}{2}p + 2), E(p, -\frac{1}{2}p + 2),$$

$$\therefore PE = -p^2 + \frac{7}{2}p + 2 - (-\frac{1}{2}p + 2) = -p^2 + 4p (0 < p < 4).$$

$$\therefore S_{\triangle ACM} = \frac{1}{2} \times (2+2) \times 4 = 8,$$

$$\therefore S_{\triangle PAC} = \frac{1}{2} PE \cdot OC = -2p^2 + 8p = 8, \text{解得 } p=2.$$

$\therefore$  点  $P$  的坐标为  $(2, 5)$ .

$$(III) (-\frac{11}{12}, \frac{81}{16}) \quad 2\sqrt{13}.$$

设抛物线沿  $x$  轴的负方向平移  $n$  个单位长度得到新抛物线,

将点  $M$  向右平移  $n$  个单位长度得到点  $M'$ ,

由平移的性质可知,  $MA' = M'A, MC' = M'C$ ,

$\therefore MA' + MC'$  的值最小就是  $M'A + M'C$  的值最小.

显然点  $M'$  在直线  $y = -2$  上移动,

作出点  $C$  关于直线  $y = -2$  对称的对称点  $C'$ , 连接  $AC'$  交直线  $y = -2$  于点  $M'$ , 连接  $M'C$ , 此时  $M'A + M'C$  取得最小值, 即为  $AC'$  的长度.

$\because$  点  $C$  关于直线  $y = -2$  对称的对称点是点  $C', C(4, 0)$ ,

$$\therefore C'(4, -4).$$

$$\therefore AC' = \sqrt{(4-0)^2 + (-4-2)^2} = 2\sqrt{13}.$$

$\therefore MA' + MC'$  的最小值为  $2\sqrt{13}$ .

设直线  $AC'$  的解析式为  $y = k_1x + b_1$ ,

将点  $A(0, 2), C'(4, -4)$  代入,

$$\begin{cases} b_1=2 \\ 4k_1+b_1=-4 \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} k_1=-\frac{3}{2} \\ b_1=2 \end{cases},$$

$\therefore$  直线  $AC'$  的解析式为  $y = -\frac{3}{2}x + 2$ .

$$\text{令 } -\frac{3}{2}x + 2 = -2, \text{解得 } x = \frac{8}{3},$$

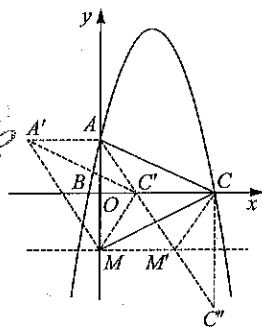
$$\therefore M'(\frac{8}{3}, -2).$$

$\therefore$  平移的距离  $n = \frac{8}{3}$ .

$$\therefore \text{原抛物线的解析式为 } y = -x^2 + \frac{7}{2}x + 2 = -(x - \frac{7}{4})^2 + \frac{81}{16},$$

$$\therefore \text{原抛物线的顶点坐标是 } (\frac{7}{4}, \frac{81}{16}), \frac{7}{4} - \frac{8}{3} = -\frac{11}{12},$$

$\therefore$  新抛物线的顶点坐标为  $(-\frac{11}{12}, \frac{81}{16})$ .



25. 解: (I) 6.

(II) (I) 3 或 9;

$$(II) \textcircled{1} \frac{9}{2};$$

②  $\because$  点  $D, E$  所表示的数互为相反数,

$\therefore$  长方形  $OABC$  向左平移,

$\because AA' = x, D$  是  $AA'$  的中点,

$\therefore$  点  $D$  表示的数是  $6 - \frac{1}{2}x$ ,

点  $E$  表示的数是  $-6 + \frac{1}{2}x$ .

$$\therefore OE = \frac{1}{3} OO',$$

$$\therefore OO' = 18 - \frac{3}{2}x.$$

$$\therefore OO' = AA',$$

$$\therefore 18 - \frac{3}{2}x = x,$$

$$\therefore x = \frac{36}{5}.$$

③2024 南开翔宇第二学期九年级模拟考试

1. B 2. C 3. B 4. C 5. C 6. C 7. B 8. C 9. C 10. A

11. C

12. C ∵每件衬衫每件降价 1 元,商场平均每天可多售出 2 件,  
∴降价 8 元时,平均每天售出数量为  $20+2\times 8=36$ (件),故①

正确;

设每件衬衫应降价  $x$  元,则平均每天多销售  $2x$  件,

由题意得  $(40-x)(20+2x)=1\ 200$ ,

整理得  $x^2-30x+200=0$ ,

解得  $x_1=10, x_2=20$ ,

由于是为了尽快减少库存,

∴ $x=20$ .

∴若商场平均每天要盈利 1 200 元,每件衬衫应降价 20 元,故

②错误;

设商场平均每天的盈利为  $w$  元,

由题意得  $w=(40-x)(20+2x)$ ,

则  $w=-2x^2+60x+800=-2(x-15)^2+1\ 250$ ,

∴ $-2<0$ ,

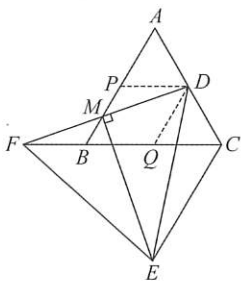
∴当  $x=15$  时,  $w$  取最大值为 1 250 元,故③正确.

13.  $\frac{1}{6}$  14.  $2a^2$  15.  $\sqrt{3}-\sqrt{2}$  16. 10

17. 8 ∵ $\triangle ABC$  是等边三角形,

∴ $AB=BC=AC, \angle A=\angle ABC=\angle ACB=60^\circ$ .

如图,分别取  $AB, BC$  的中点  $P, Q$ ,连接  $DP, DQ$ ,



又  $D$  是边  $AC$  的中点,

∴ $DP, DQ$  都是  $\triangle ABC$  的中位线.

∴ $DP=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}AB=DQ, DP\parallel BC, DQ\parallel AB$ .

∴四边形  $BPDQ$  是菱形,  $\triangle CDQ, \triangle APD$  都是等边三角形.

∴ $DP=BQ=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}AB, DQ=DC, \angle QDC=60^\circ$ .

∴ $\triangle DFE$  是等边三角形,

∴ $DF=DE, \angle EDF=60^\circ$ .

∴ $\angle EDF-\angle QDE=\angle QDC-\angle QDE$ , 即  $\angle FDQ=\angle EDC$ .

∴ $DF=DE, \angle FDQ=\angle EDC, DQ=DC$ ,

∴ $\triangle FDQ\cong\triangle EDC$ (SAS).

∴ $QF=CE$ .

∴ $ME\perp DF$ ,

∴ $FM=DM$ .

∴ $DP\parallel BC$ ,

∴ $\angle FBM=\angle DPM, \angle BFM=\angle PDM$ .

∴ $\triangle BFM\cong\triangle PDM$ (AAS).

∴ $BF=DP=\frac{1}{2}AB, BM=PM=\frac{1}{2}BP=\frac{1}{4}AB$ .

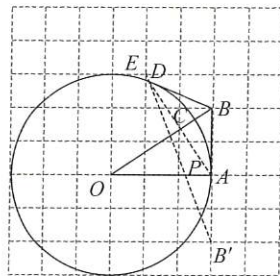
∴ $BM+BF=6$ ,

∴ $\frac{1}{4}AB+\frac{1}{2}AB=6$ , 解得  $AB=8$ .

∴ $CE=QF=BF+BQ=AB=8$ .

18. (I)  $\sqrt{13}-3$ ;

(II) 如图,取格点  $E$ ,连接  $AE$  交  $\odot O$  于点  $D$ ;取格点  $B'$ ,连接  $B'D$  交  $OA$  于点  $P$ ,则点  $D, P$  即为所求.



19. 解:(I)  $x\geq -1$ ;

(II)  $x<2$ ;

(III)

(IV)  $-1\leq x<2$ .

20. 解:(I) 40 25.

(II) 观察条形统计图,

∴在这组数据中,3 出现了 15 次,出现的次数最多,

∴这组数据的众数为 3.

∴将这组数据按从小到大的顺序排列,其中处于中间的两个

数都是 3,有  $\frac{3+3}{2}=3$ ,

∴这组数据的中位数为 3.

∴ $\bar{x}=\frac{1\times 4+2\times 8+3\times 15+4\times 10+5\times 3}{40}=3$ ,

∴这组数据的平均数是 3.

(III)  $1\ 200\times\frac{10+3}{40}=390$ (名).

答:该校学生中这周参加家务劳动次数大于 3 的学生人数约为 390.

21. 解:(I) 如图 1,连接  $OC$ ,

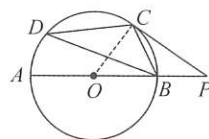


图 1

(II)如图 2,连接 AC,


$$\therefore CP = \sqrt{3} OC = 5\sqrt{3}.$$

答:大桥立柱在水面以上的高度  $MN$  约为 51 米.

当  $2 < x \leq 2\frac{2}{3}$  时,  $y = 120$ ;

图 1 所示



图 2

$$= 3m - 6;$$

③当  $5 < m \leq 9$  时, 平移后的图形在  $x$  轴下方部分为五边形或矩形, 如图 3 所示:

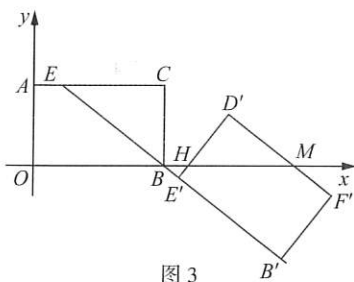


图 3

$\because \angle E'BH = 90^\circ - \angle EBC = \angle BEC, \angle BE'H = \angle ECB = 90^\circ,$   
 $\therefore \triangle BE'H \sim \triangle ECB.$

$\therefore \frac{BE'}{EC} = \frac{E'H}{CB},$  即  $\frac{m-5}{4} = \frac{E'H}{3},$  解得  $E'H = \frac{3}{4}(m-5),$

$\therefore S_{\triangle BE'H} = \frac{1}{2} BE' \cdot E'H = \frac{3}{8}(m-5)^2.$

$\therefore S = S_{\text{梯形}MBB'F'} - S_{\triangle BE'H} = 3m - 6 - \frac{3}{8}(m-5)^2$

$= -\frac{3}{8}m^2 + \frac{27}{4}m - \frac{123}{8}.$

综上所述,  $S = \begin{cases} \frac{3}{8}m^2, & 0 < m \leq 4, \\ 3m - 6, & 4 < m \leq 5, \\ -\frac{3}{8}m^2 + \frac{27}{4}m - \frac{123}{8}, & 5 < m \leq 9. \end{cases}$

25. 解: (I)  $\because$  抛物线  $y = \frac{1}{2}x^2 + bx + c$  与  $x$  轴交于  $A(-2, 0),$

$B(4, 0)$  两点,

坐标代入得  $\begin{cases} 2 - 2b + c = 0 \\ 8 + 4b + c = 0 \end{cases},$  解得  $\begin{cases} b = -1 \\ c = -4 \end{cases},$

$\therefore$  抛物线的解析式为  $y = \frac{1}{2}x^2 - x - 4.$

(II) 把  $x=0$  代入  $y = \frac{1}{2}x^2 - x - 4$  可得  $y = -4,$

$\therefore C(0, -4).$

设直线  $BC$  的解析式为  $y = kx - 4,$  把  $B(4, 0)$  代入可得  $k = 1,$

$\therefore$  直线  $BC$  的解析式为  $y = x - 4.$

$\because B(4, 0), C(0, -4),$

$\therefore OB = OC = 4, \angle BCO = \angle CBO = 45^\circ.$

$\because PD \perp x$  轴, 则  $PD \parallel y$  轴,

$\therefore \angle PEF = \angle BED = \angle BCO = 45^\circ.$

$\because PF \perp BC,$

$\therefore EF = \frac{\sqrt{2}}{2}PE.$

设  $P(m, \frac{1}{2}m^2 - m - 4),$  则  $E(m, m - 4), 0 < m < 4,$

$\therefore PE = m - 4 - \frac{1}{2}m^2 + m + 4 = -\frac{1}{2}m^2 + 2m.$

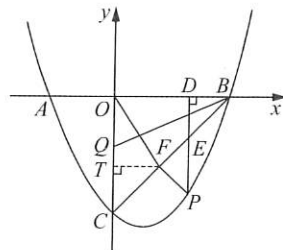
$\therefore EF = -\frac{\sqrt{2}}{4}m^2 + \sqrt{2}m = -\frac{\sqrt{2}}{4}(m-2)^2 + \sqrt{2}.$

$\because 0 < m < 4,$

$\therefore$  当  $m = 2$  时,  $EF$  最大, 最大值为  $\sqrt{2},$

$\therefore$  此时点  $E$  的坐标为  $(2, -2).$

(III) 如图, 过  $F$  作  $FT \perp y$  轴于点  $T,$  则  $\triangle CFT$  为等腰直角三角形,  $\therefore CT = FT,$



设  $F(n, n-4),$  而  $C(0, -4),$

$\therefore CT = FT = n, CF = CQ = \sqrt{2}n.$

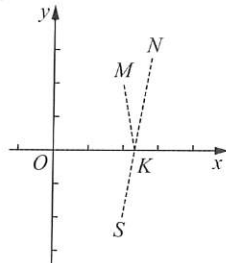
$\therefore OQ = 4 - \sqrt{2}n.$

$\therefore OF = \sqrt{n^2 + (4-n)^2} = \sqrt{2} \times \sqrt{(n-2)^2 + 4},$

$BQ = \sqrt{4^2 + (4-\sqrt{2}n)^2} = \sqrt{2} \times \sqrt{(n-2\sqrt{2})^2 + 8}.$

$\therefore OF + BQ = \sqrt{2}(\sqrt{(n-2)^2 + 4} + \sqrt{(n-2\sqrt{2})^2 + 8}).$

如图, 设  $M(2, 2), N(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}), K(n, 0),$



则  $OF + BQ = \sqrt{2}(KM + KN),$

作  $M$  关于  $x$  轴的对称点  $S(2, -2),$  连接  $NS,$

$\therefore KM + KN$  的最小值为  $NS$  的长.

$\because NS = \sqrt{(2\sqrt{2}-2)^2 + (2\sqrt{2}+2)^2} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6},$

$\therefore OF + BQ$  的最小值为  $\sqrt{2} \times 2\sqrt{6} = 4\sqrt{3}.$

### ③2023 和平区初中学业水平考试模拟(二)

1. A 2. D 3. C 4. B 5. B 6. D 7. C 8. A 9. B 10. A

11. C

12. B 抛物线  $y = ax^2 + bx + c (a, b, c \text{ 是常数}), 9a - 3b + c = m,$

当  $x = -3$  时,  $y = 9a - 3b + c,$

若  $m = 0,$  则抛物线经过点  $(-3, 0),$  故①正确;

当  $x = -3$  时,  $y = 9a - 3b + c, 9a - 3b + c = m,$

当  $x = -2$  时,  $y = 4a - 2b + c, 4a - 2b + c = n,$

当  $-3 < x < -2$  时, 因无法判断对称轴的位置, 则不能判断函数的增减性, 故②错误;

∵ 抛物线过点  $(-3, m), (5, m)$ ,

$$\therefore -\frac{b}{2a} = \frac{-3+5}{2} = 1,$$

$$\therefore b = -2a,$$

∵ 抛物线过点  $A(-1, 0)$ ,

$$\therefore a - b + c = 0, \therefore c = -3a, \therefore y = ax^2 - 2ax - 3a,$$

∵ 对称轴为  $x = 1$ ,

∴ 抛物线也过点  $(3, 0)$ ,

∵ 抛物线过点  $(-3, m), (5, m), m > 0$ ,

∴ 抛物线开口向上, 即  $a > 0$ ,

点  $P$  到  $y$  轴的距离小于 2, 则  $-2 < t < 2$ ,

若  $x = -2, y = 5a$ ; 若  $x = 1, y = -4a$ ,

∴  $-4a \leq k < 5a$ , 故 ③ 错误.

13.  $6a^5$  14.  $-1$  15.  $\frac{2}{3}$  16.  $y = 2x + 7$

17.  $\frac{\sqrt{17}}{2}$  连接  $DE, DG$ ,

∵ 四边形  $ABCD$  和四边形  $AEFG$  为正方形,

$$\therefore AB = AD, AE = AG, \angle BAD = \angle EAG = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BAE = 90^\circ - \angle EAD = \angle DAG,$$

$$\therefore \triangle BAE \cong \triangle DAG (\text{SAS}),$$

∴  $\triangle DAG$  是由  $\triangle BAE$  绕点  $A$  逆时针旋转  $90^\circ$  得到的,

$$\therefore AB = 4, BE = 3,$$

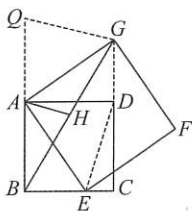
$$\therefore CE = 1, CD = 4.$$

$$\therefore DE = \sqrt{CD^2 + CE^2} = \sqrt{17},$$

延长  $BA$  至点  $Q$ , 使  $AQ = AB$ , 连接  $QG$ , 得出  $AH = \frac{1}{2} QG$ ,

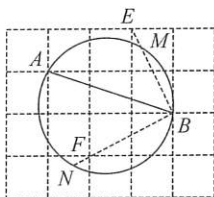
易证  $\triangle AGQ \cong \triangle AED (\text{SAS})$ ,  $\therefore QG = DE$ ,

$$\therefore AH = \frac{1}{2} QG = \frac{1}{2} DE = \frac{\sqrt{17}}{2}.$$



18. (I)  $\sqrt{10}$ ;

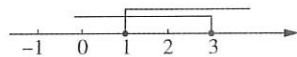
(II) 如图, 取格点  $E, F$ , 连接  $BE$ , 连接  $BF$  并延长, 分别与圆相交于点  $M, N$ , 则点  $M, N$  即为所求.



19. 解: (I)  $x \leq 3$ ;

(II)  $x \geq 1$ ;

(III)



(IV)  $1 \leq x \leq 3$ .

20. 解: (I) 25 24.

(II) 观察条形统计图,

$$\therefore \bar{x} = \frac{1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + 4 \times 10 + 5 \times 6}{2 + 3 + 4 + 10 + 6} = 3.6,$$

∴ 这组数据的平均数是 3.6.

∵ 在这组数据中, 4 出现了 10 次, 出现的次数最多,

∴ 这组数据的众数是 4.

∵ 将这组数据按照由小到大的顺序排列, 其中处于中间位置的数是 4,

∴ 这组数据的中位数是 4.

21. 解: (I) ∵  $AB$  是  $\odot O$  的直径,

$$\therefore \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\therefore \widehat{AC} = \widehat{BC},$$

$$\therefore \angle CAB = \angle B = \frac{1}{2} \times (180^\circ - \angle ACB) = 45^\circ,$$

在  $\odot O$  中,  $\angle AOD = 126^\circ$ ,

$$\therefore \angle ACD = \frac{1}{2} \angle AOD = \frac{1}{2} \times 126^\circ = 63^\circ,$$

$$\therefore \angle AHD = \angle ACD + \angle CAB = 63^\circ + 45^\circ = 108^\circ;$$

∵ 四边形  $ACDE$  是圆内接四边形,

$$\therefore \angle ACD + \angle E = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle E = 180^\circ - \angle ACD = 117^\circ.$$

(II) 如图, 连接  $OF$  交  $CD$  于  $M$ ,

$$\therefore \angle ACF = 65^\circ,$$

$$\therefore \angle AOF = 2 \angle ACF = 130^\circ,$$

$$\therefore \angle BOF = 180^\circ - \angle AOF = 50^\circ,$$

∵  $PF$  是  $\odot O$  的切线,

$$\therefore OF \perp PF,$$

$$\therefore \angle OFP = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle FMP + \angle P = 90^\circ,$$

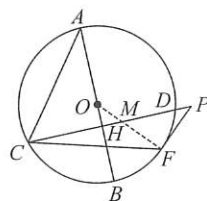
∵  $AB$  是  $\odot O$  的直径,  $H$  为弦  $CD$  的中点,

$$\therefore OH \perp CD,$$

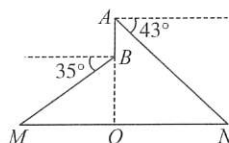
$$\therefore \angle OHM = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle OMH = \angle FMP,$$

$$\therefore \angle P = \angle BOF = 50^\circ.$$



22. 解: 如图, 延长  $AB$  交  $MN$  于点  $O$ ,



由题意得:  $\angle ANO = 43^\circ$ ,  $\angle BMO = 35^\circ$ ,  $MN = 200$ ,  $AB = 40$ ,  $AO \perp MN$ ,

在  $Rt\triangle AON$  中,  $NO = \frac{AO}{\tan 43^\circ}$ ,

在  $Rt\triangle MBO$  中,  $MO = \frac{OB}{\tan 35^\circ} = \frac{AO - 40}{\tan 35^\circ}$ ,

则  $MN = NO + MO = \frac{AO}{\tan 43^\circ} + \frac{AO - 40}{\tan 35^\circ} = 200$ ,

$\therefore AO = \frac{200 \times \tan 43^\circ \times \tan 35^\circ + 40 \times \tan 43^\circ}{\tan 43^\circ + \tan 35^\circ} \approx 101(m)$ .

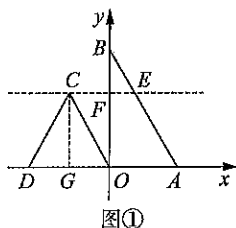
答: 无人机在 A 处的高度约为 101 m.

23. 解: (I) 1.2 1.6 1.2,

(II) (i) 0.8; (ii) 0.3; (iii) 14 或  $109\frac{1}{3}$ .

(III)  $y = \begin{cases} 0.1x, & 0 \leq x \leq 16, \\ 1.6, & 16 < x \leq 76, \\ 0.08x - 4.48, & 76 < x \leq 86. \end{cases}$

24. 解: (I) 如图①, 过点 C 作  $CG \perp OD$  于 G,



图①

$\because D(-5, 0), \therefore OD = 5$ ,

$\because \triangle OCD$  是等边三角形,

$\therefore OC = OD = 5, \angle COD = \angle CDO = 60^\circ$ ,

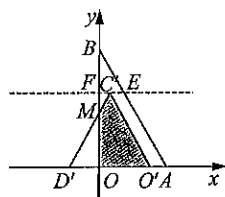
$\because CG \perp OD, \therefore \angle CGO = 90^\circ, OG = \frac{1}{2}OD = \frac{5}{2}$ ,

在  $Rt\triangle OCG$  中,  $CG = OC \cdot \sin \angle COD = 5 \sin 60^\circ = \frac{5\sqrt{3}}{2}$ ,

$\therefore$  点 C 的坐标为  $(-\frac{5}{2}, \frac{5\sqrt{3}}{2})$ .

(II) (i) ① 当点 C' 在线段 FE 上, 且不与点 F 重合,

即  $\frac{5}{2} < t \leq 4$  时, 如图,  $\triangle O'C'D'$  与  $\triangle OAB$  重叠部分为四边形  $OO'C'M$ ,



由平移得  $O'D' = OD = 5, \angle C'D'O' = \angle CDO = 60^\circ$ ,

$\therefore OD' = 5 - t$ ,

$\because \angle ABO = 30^\circ$ ,

$\therefore \angle BAO = 60^\circ = \angle C'O'D'$ ,

$\therefore O'C' \parallel AB$ ,

在  $Rt\triangle D'OM$  中,  $OM = OD' \cdot \tan \angle C'D'O' = \sqrt{3}(5 - t)$ ,

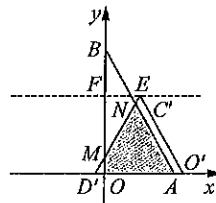
$\therefore S = S_{\triangle O'C'D'} - S_{\triangle D'OM} = \frac{1}{2} \times 5 \times \frac{5\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}(5 - t)^2$

$= -\frac{\sqrt{3}}{2}t^2 + 5\sqrt{3}t - \frac{25\sqrt{3}}{4}$ ;

② 当点 C' 在线段 FE 的延长线上, 且点 D' 在 x 轴负半轴上,

即  $4 < t < 5$  时, 设  $C'D'$  与 AB 交于 N, 与 y 轴交于 M, 如图,

$\triangle O'C'D'$  与  $\triangle OAB$  重叠部分为四边形 OANM,



$\therefore AD' = O'D' - O'A = 5 - (t - 4) = 9 - t$ ,

$OD' = O'D' - OO' = 5 - t$ ,

$\therefore OM = \sqrt{3}(5 - t)$ ,

$\therefore S = S_{\triangle AND'} - S_{\triangle D'OM} = \frac{\sqrt{3}}{4}(9 - t)^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}(5 - t)^2$

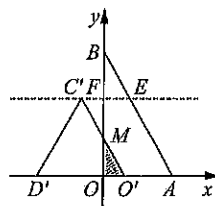
$= -\frac{\sqrt{3}}{4}t^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}t + \frac{31\sqrt{3}}{4}$ .

综上所述, 当  $\triangle O'C'D'$  与  $\triangle OAB$  重叠部分为四边形时,

$S = \begin{cases} -\frac{\sqrt{3}}{4}t^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}t + \frac{31\sqrt{3}}{4} & (\frac{5}{2} < t \leq 4) \\ -\frac{\sqrt{3}}{4}t^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}t + \frac{31\sqrt{3}}{4} & (4 < t < 5) \end{cases}$

(II)  $\sqrt{3} < S \leq \frac{23\sqrt{3}}{4}$ .

① 当  $0 < t \leq \frac{5}{2}$  时, 如图,  $\triangle O'C'D'$  与  $\triangle OAB$  重叠部分为  $\triangle OO'M$ ,



由平移得  $\angle C'O'D' = \angle COD = 60^\circ$ ,

$\therefore OM = OO' \cdot \tan \angle C'O'D' = \sqrt{3}t$ ,

$\therefore S = \frac{1}{2}OO' \cdot OM = \frac{1}{2}t \cdot \sqrt{3}t = \frac{\sqrt{3}}{2}t^2$ .

若  $\frac{3}{2} < t \leq \frac{5}{2}$ , 则  $\frac{9\sqrt{3}}{8} < S \leq \frac{25\sqrt{3}}{8}$ ;

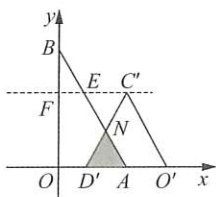
② 若  $\frac{5}{2} < t \leq 4$ , 则由 (i) 得  $S = -\frac{\sqrt{3}}{2}t^2 + 5\sqrt{3}t - \frac{25\sqrt{3}}{4}$

$= -\frac{\sqrt{3}}{2}(t - 5)^2 + \frac{25\sqrt{3}}{4}$ ,  $\therefore \frac{25\sqrt{3}}{8} < S \leq \frac{23\sqrt{3}}{4}$ ;

③若  $4 < t < 5$ , 则由 (i) 得  $S = -\frac{\sqrt{3}}{4}t^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}t + \frac{31\sqrt{3}}{4}$

$= -\frac{\sqrt{3}}{4}(t-1)^2 + 8\sqrt{3}$ ,  $\therefore 4\sqrt{3} < S < \frac{23\sqrt{3}}{4}$ ;

④当  $5 \leq t < 9$  时, 如图,  $\triangle OC'D'$  与  $\triangle OAB$  重叠部分为  $\triangle AD'N$ ,



则  $AD' = 9 - t$ , 且  $\angle C'D'O' = \angle BAO = 60^\circ$ ,

$\therefore \triangle AD'N$  是等边三角形,

$\therefore S = \frac{\sqrt{3}}{4}(9-t)^2$ .

若  $5 \leq t < 7$ , 则  $\sqrt{3} < S \leq 4\sqrt{3}$ .

综上所述, 当  $\frac{3}{2} < t < 7$  时,  $\sqrt{3} < S \leq \frac{23\sqrt{3}}{4}$ .

25. 解: (I) (i) 把  $A(1, 0)$  代入  $y = ax^2 + bx + c$ , 得  $a + b + c = 0$ ,

若  $a = 1, c = -3$ , 则  $b = 2$ ,

$\therefore$  抛物线解析式为  $y = x^2 + 2x - 3$ .

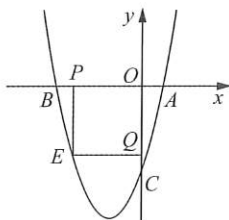
$\therefore y = x^2 + 2x - 3 = (x+1)^2 - 4$ ,

$\therefore$  抛物线的顶点  $D$  的坐标为  $(-1, -4)$ .

(ii) 由 (i) 知,  $y = x^2 + 2x - 3 = (x+3)(x-1)$ ,

$\therefore B(-3, 0), C(0, -3)$ .

如图:



设  $E(m, m^2 + 2m - 3)$ ,  $-3 < m < 0$ ,

$\therefore$  四边形  $OQEP$  为矩形,

$\therefore P(m, 0), Q(0, m^2 + 2m - 3)$ ,

$\therefore$  动点  $P$  和  $Q$  以相同的速度从坐标原点  $O$  同时出发,

$\therefore OP = OQ$ , 即  $-m = -(m^2 + 2m - 3)$ ,

解得  $m = \frac{-1 + \sqrt{13}}{2}$  (舍去), 或  $m = \frac{-1 - \sqrt{13}}{2}$ ,

$\therefore$  点  $E$  的坐标为  $(\frac{-1 - \sqrt{13}}{2}, \frac{-1 - \sqrt{13}}{2})$ .

(II)  $\therefore$  抛物线  $y = ax^2 + bx + c$  经过点  $A(1, 0)$  和  $B(c, 0)$ ,  $c < 0$ ,

$\therefore a + b + c = 0, ac^2 + bc + c = 0$ , 即  $ac + b + 1 = 0$ .

$\therefore a = 1, b = -c - 1$ .

$\therefore$  抛物线的解析式为  $y = x^2 - (c+1)x + c$ .

根据题意, 得点  $C(0, c)$ , 点  $F(c+1, c)$ .

$\therefore OB = OC$ .

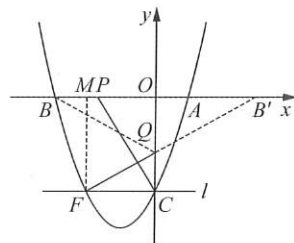
$\therefore OP = OQ, \angle BOQ = \angle COP = 90^\circ$ ,

$\therefore \triangle BOQ \cong \triangle COP (SAS)$ .

$\therefore BQ = CP$ .

①当  $c < -1$  时, 点  $F$  在  $y$  轴左侧,

作点  $B$  关于  $y$  轴的对称点  $B'$ , 得点  $B'$  的坐标为  $(-c, 0)$ ,



$\therefore BQ = B'Q = CP$ .

当满足条件的点  $Q$  落在直线  $B'F$  上时,  $CP + FQ$  取得最小值,

此时,  $CP + FQ = B'F = \sqrt{65}$ .

过点  $F$  作  $FM \perp x$  轴于点  $M$ , 由点  $F(c+1, c)$ , 得点  $M(c+1, 0)$ .

在  $Rt\triangle FMB'$  中,  $B'M = -2c - 1, FM = -c$ ,

$\therefore B'F^2 = B'M^2 + FM^2 = (-2c-1)^2 + (-c)^2 = 65$ .

解得  $c_1 = -4, c_2 = \frac{16}{5}$  (舍).

$\therefore$  点  $F$  的坐标为  $(-3, -4)$ , 点  $B'$  的坐标为  $(4, 0)$ .

可得直线  $B'F$  的解析式为  $y = \frac{4}{7}x - \frac{16}{7}$ .

$\therefore$  点  $Q$  的坐标为  $(0, -\frac{16}{7})$ ;

②当  $c = -1$  时, 点  $F$  和点  $C$  重合 (舍);

③当  $-1 < c < 0$  时, 点  $F$  在  $y$  轴右侧,

当满足条件的点  $Q$  落在直线  $BF$  上时,

$CP + FQ$  取得最小值,

此时,  $CP + FQ = BF = \sqrt{65}$ .

过点  $F$  作  $FM' \perp x$  轴于点  $M'$ ,

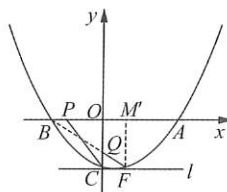
由点  $F(c+1, c)$ , 得点  $M'(c+1, 0)$ .

在  $Rt\triangle FM'B$  中,  $BM' = 1, FM' = -c$ ,

$\therefore BF^2 = BM'^2 + FM'^2 = 1^2 + (-c)^2 = 65$ .

解得  $c_1 = -8, c_2 = 8$ , 均不合题意, 舍.

综上, 点  $F(-3, -4)$  和点  $Q(0, -\frac{16}{7})$  即为所求.



### ④2023 河西区初中学业水平考试模拟(二)

1. C 2. D 3. A 4. B 5. A 6. D 7. B 8. C 9. C 10. B

11. D

12. A 设扇形所在圆的半径为  $x$ , 则弧长为  $(L-2x)$ ,

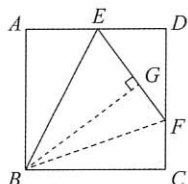
则扇形面积  $S = \frac{1}{2}x(L-2x) = -x^2 + \frac{1}{2}Lx$

$$= -(x - \frac{1}{4}L)^2 + \frac{1}{16}L^2,$$

∴当  $x = \frac{1}{4}L$ , 即扇形所在圆的半径等于  $\frac{L}{4}$  时, 这个扇形的面积最大.

13.  $a^5$  14.  $-4$  15.  $\frac{2}{5}$  16.  $y = 2x + 2$  (答案不唯一)

17.5 如图, 过点  $B$  作  $BG \perp EF$  于  $G$ , 连接  $BF$ ,



∵ 四边形  $ABCD$  是正方形,

∴  $\angle A = \angle C = 90^\circ$ ,  $AB = BC = CD = AD = 6$ ,

∵  $E$  是边  $AD$  的中点,

∴  $AE = \frac{1}{2}AD = 3$ ,

∵  $BG \perp EF$ ,

∴  $\angle BGE = \angle BGF = 90^\circ$ ,

∴  $\angle A = \angle BGE$ .

∵  $\angle FEB = \angle AEB$ ,  $BE = BE$ ,

∴  $\triangle ABE \cong \triangle GBE$  (AAS),

∴  $EG = AE = 3$ ,  $BG = AB = BC$ ,

∵  $BF = BF$ ,

∴  $\text{Rt}\triangle BGF \cong \text{Rt}\triangle BCF$  (HL),

∴  $GF = CF$ ,

设  $GF = CF = x$ , 则  $DF = 6 - x$ ,  $EF = 3 + x$ ,

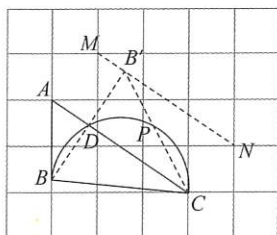
在  $\text{Rt}\triangle DEF$  中, 由勾股定理, 得  $3^2 + (6 - x)^2 = (3 + x)^2$ ,

解得  $x = 2$ ,

∴  $EF = 3 + x = 3 + 2 = 5$ .

18. (I)  $\frac{\sqrt{82}}{3}$ ;

(II) 如图, 取格点  $M, N$ , 连接  $MN$ , 连接  $BD$  并延长, 与  $MN$  相交于点  $B'$ ; 连接  $B'C$ , 与半圆相交于点  $P$ , 则点  $P$  即为所求.



19. 解: (I)  $x \geq -3$ ;

(II)  $x \leq 1$ ;

(III)

(IV)  $-3 \leq x \leq 1$ .

20. 解: (I) 50 28.

(II) 观察条形统计图,

$$\therefore \bar{x} = \frac{4 \times 3 + 10 \times 4 + 16 \times 5 + 14 \times 6 + 6 \times 7}{50} = 5.16,$$

∴ 这组数据的平均数为 5.16;

∵ 在这组数据中, 5 出现了 16 次, 出现次数最多,

∴ 这组数据的众数为 5;

∵ 将这组数据从小到大排列, 其中处于中间的两个数都是 5,

$$\text{有 } \frac{5+5}{2} = 5,$$

∴ 这组数据的中位数为 5.

21. 解: (I) 如图, 连接  $OD$ .

∵  $BC$  与  $\odot O$  相切,

∴  $\angle ODB = 90^\circ$ .

∵  $\angle C = 90^\circ$ ,

∴  $OD \parallel AC$ ,

∴  $\angle ADO = \angle CAD$ .

∵  $OA = OD$ ,

∴  $\angle OAD = \angle ADO$ ,

∴  $\angle CAD = \angle OAD$ .

∵  $\angle CAD = 26^\circ$ ,

∴  $\angle CAB = \angle CAD + \angle OAD = 52^\circ$ ,

∴  $\angle B = 90^\circ - \angle CAB = 38^\circ$ .

(II) 如图, 连接  $OD, OF$ .

∵ 点  $F$  为  $\widehat{AD}$  的中点,

∴  $\angle AOF = \angle FOD$ .

由 (I) 可知  $OD \parallel AC$ ,

∴  $\angle AFO = \angle FOD$ ,

∴  $\angle AFO = \angle AOF$ .

∵  $OA = OF$ ,

∴  $\angle AFO = \angle OAF$ ,

∴  $\triangle AFO$  为等边三角形,

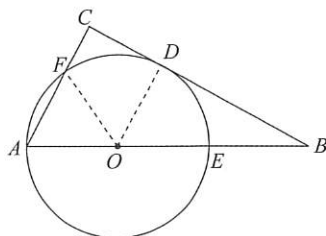
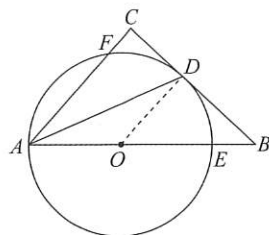
∴  $\angle CAB = 60^\circ$ ,

∴  $\angle B = 30^\circ$ .

∵  $OD = 3$ ,

∴  $OB = 2OD = 6$ ,

∴  $AB = OA + OB = 9$ .



22. 解: 如图, 过点  $D$  作  $DF \perp AC$ , 垂足为  $F$ .

根据题意,  $DE = 1.56$ ,  $EC = 21$ ,  $\angle ADF = 47^\circ$ ,  $\angle BDF = 42^\circ$ ,

$\angle ACE = \angle DEC = 90^\circ$ .

∴  $DF \perp AC$ ,

$$\therefore \angle DFC = 90^\circ.$$

$\therefore$  四边形  $DECF$  为矩形.

$$\therefore DF = EC = 21, FC = DE = 1.56.$$

$$\text{在 Rt}\triangle DFA \text{ 中, } \tan \angle ADF = \frac{AF}{DF}.$$

$$\therefore AF = DF \cdot \tan 47^\circ.$$

$$\text{在 Rt}\triangle DFB \text{ 中, } \tan \angle BDF = \frac{BF}{DF}.$$

$$\therefore BF = DF \cdot \tan 42^\circ.$$

$$\therefore AB = AF - BF = DF \cdot \tan 47^\circ - DF \cdot \tan 42^\circ \approx 21 \times 1.07 - 21 \times 0.90 \approx 3.6(\text{m}),$$

$$BC = BF + FC = DF \cdot \tan 42^\circ + 1.56 \approx 21 \times 0.90 + 1.56 \approx 20.5(\text{m}).$$

答: 旗杆  $AB$  的高度约为 3.6 m, 建筑物  $BC$  的高度约为 20.5 m.

23. 解: (I) 20 48 30 66.

(II) 按线下销售方式购买时,

$y$  与  $x$  之间的函数解析式为  $y = 4x (x \geq 0)$ ;

按线上销售方式购买时,

$$y \text{ 与 } x \text{ 之间的函数解析式为 } y = \begin{cases} 6x, & 0 \leq x \leq 10 \\ 3x + 30, & x > 10 \end{cases}$$

$$\text{(III) 联立 } \begin{cases} y = 4x \\ y = 3x + 30 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} x = 30 \\ y = 120 \end{cases},$$

结合函数图象可得: 当  $x > 30$  时, 线上购买更省钱;

当  $x = 30$  时, 两种购买方式花费一样;

当  $x < 30$  时, 线下购买更省钱.

24. 解: (I) (1) 由题设, 知  $BE = OF$ ,  $\angle FOC = 180^\circ$ ,

$$\therefore B(4, 4), E(4, 3),$$

$$\therefore BC = 4, OC = 4, CE = 3.$$

$$\therefore BE = BC - CE = 1, CF = OC + OF = 5,$$

$$\text{在 Rt}\triangle EFC \text{ 中, } EF = \sqrt{CE^2 + CF^2} = \sqrt{34}.$$

$$(II) \because B(4, 4), E(4, m),$$

$$\therefore BC = 4, OC = 4, CE = m,$$

$$\therefore BE = BC - CE = 4 - m, CF = OC + OF = 4 + 4 - m = 8 - m.$$

$$\therefore S_{\triangle ABE} = \frac{1}{2} AB \cdot BE = 2(4 - m),$$

$$S_{\triangle FCE} = \frac{1}{2} CE \cdot CF = \frac{1}{2} m(8 - m).$$

$$\therefore S = 2(4 - m) + \frac{1}{2} m(8 - m) = -\frac{1}{2} m^2 + 2m + 8.$$

$$(II) \because AE = OA = 4,$$

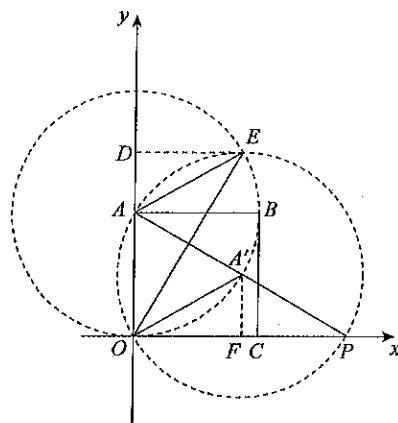
$\therefore$  点  $E$  在以  $A$  为圆心, 4 为半径的圆上运动,

又  $OP$  是由  $OE$  绕点  $O$  顺时针旋转  $60^\circ$  得到的,

$\therefore$  如图, 将  $OA$  绕点  $O$  顺时针旋转  $60^\circ$  得到  $OA'$ ,

易得  $\triangle OAE \cong \triangle OA'P$  (SAS),  $\therefore A'P = AE = 4$ ,

则点  $P$  在以  $A'$  为圆心, 4 为半径的圆上运动, 连接  $AA'$  并延长, 与  $\odot A'$  的交点为点  $P$ , 此时  $AP$  最大,



将  $OP$  绕点  $O$  逆时针旋转  $60^\circ$  得到  $OE$ ,

过点  $E$  作  $ED \perp y$  轴于点  $D$ , 过点  $A'$  作  $A'F \perp x$  轴于点  $F$ ,

由旋转得  $\triangle OEA'$  是等边三角形,

$$\therefore AA' = OA' = 4, \angle A'OF = 90^\circ - \angle AOA' = 30^\circ.$$

$$\therefore A'F = \frac{1}{2} OA' = 2, OF = \frac{\sqrt{3}}{2} OA' = 2\sqrt{3}.$$

$$\therefore A'(2\sqrt{3}, 2),$$

$$\therefore A'P = 4 = AA', \therefore A' \text{ 为 } AP \text{ 中点,}$$

$$\text{又 } A(0, 4), \therefore P(4\sqrt{3}, 0), \text{ 即点 } P \text{ 在 } x \text{ 轴上.}$$

$$\therefore OE = OA' = 4\sqrt{3},$$

$$\therefore \angle EOP = 60^\circ, \therefore \angle DOE = 30^\circ.$$

$$\therefore DE = \frac{1}{2} OE = 2\sqrt{3}, OD = \sqrt{3} DE = 6.$$

$$\therefore E(2\sqrt{3}, 6).$$

25. 解: (I)  $\because$  抛物线  $y = ax^2 - 5ax + 4$  经过点  $A(-3, 0)$ ,

$$\therefore 0 = 9a + 15a + 4, \text{ 解得 } a = -\frac{1}{6}.$$

$$\therefore \text{抛物线的解析式为 } y = -\frac{1}{6}x^2 + \frac{5}{6}x + 4 = -\frac{1}{6}(x - \frac{5}{2})^2 + \frac{121}{24}.$$

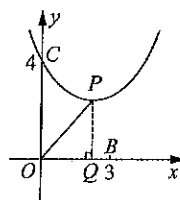
$$\therefore \text{该抛物线的顶点 } P \text{ 的坐标为 } (\frac{5}{2}, \frac{121}{24}).$$

$$(II) \because \text{抛物线 } y = ax^2 - 5ax + 4 = a(x - \frac{5}{2})^2 + \frac{16 - 25a}{4},$$

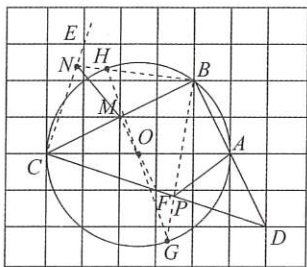
$$\therefore \text{顶点 } P \text{ 的坐标为 } (\frac{5}{2}, \frac{16 - 25a}{4}),$$

$\therefore$  由点  $P$  在  $x$  轴上方, 知点  $P$  在第一象限.

如图, 过点  $P$  作  $PQ \perp x$  轴于点  $Q$ ,



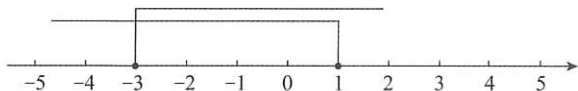
$$\therefore PQ=OQ, \text{ 即 } \frac{5}{2} = \frac{16-25a}{4}, \text{ 解得 } a = \frac{6}{25}.$$



19. 解: (I)  $x \leq 1$ ;

(II)  $x \geq -3$ ;

(III)



(IV)  $-3 \leq x \leq 1$ .

20. 解: (I) 40 20.

(II) 观察条形统计图,

$$\therefore \bar{x} = \frac{14 \times 5 + 8 \times 6 + 10 \times 7 + 4 \times 8 + 4 \times 9}{40} = 6.4,$$

$\therefore$  这组数据的平均数为 6.4.

$\therefore$  在这组数据中, 5 出现了 14 次, 出现次数最多,

$\therefore$  这组数据的众数为 5.

$\therefore$  将这组数据按从小到大的顺序排列, 其中处于中间位置的两个数都是 6, 有  $\frac{6+6}{2} = 6$ ,

$\therefore$  这组数据的中位数为 6.

(III)  $1\ 200 \times (10\% + 10\%) = 240$  (人),

答: 估计参加社会实践活动时间大于 7 天的学生人数有 240 人.

21. 解: (I)  $\because AM$  是  $\odot O$  的切线,  $AC$  是  $\odot O$  的直径,

$\therefore OA \perp AM$ ,

$\therefore \angle CAM = 90^\circ$ ,

$\because AD \parallel BM, \angle AMB = 120^\circ$ ,

$\therefore \angle DAM = 180^\circ - \angle AMB = 60^\circ$ .

$\therefore \angle DAC = \angle CAM - \angle DAM = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$ ,

$\because AC$  为直径,

$\therefore \angle CDA = 90^\circ$ ,

$\therefore \angle C = 90^\circ - \angle DAC = 60^\circ$ ;

在  $Rt\triangle ACD$  中,  $\angle DAC = 30^\circ$ , 则  $CD = \frac{1}{2}AC = 6$ .

(II)  $\because AM, MF, CF$  均是  $\odot O$  的切线,  $AC$  是  $\odot O$  的直径,

$\therefore CF \perp AC, AM \perp AC, AM = BM, CF = BF$ ,

$\therefore CF \parallel AM$ .

$\because AD \parallel BM$ ,

$\therefore$  四边形  $AEFM$  为平行四边形,

$\therefore AE = FM, AM = EF$ ,

$\because CE = \frac{5}{4}EF$ , 可设  $CE = 5x, EF = 4x$ ,

则  $BM = AM = EF = 4x, BF = CF = CE + EF = 9x$ .

$\therefore AE = FM = BF + BM = 13x$ .

在  $Rt\triangle ACE$  中,  $CE^2 + AC^2 = AE^2$ ,

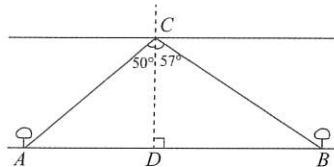
即  $(5x)^2 + 12^2 = (13x)^2$ , 解得  $x = 1$ ,

$\therefore CE = 5, AE = 13$ ,

又  $CD$  为  $Rt\triangle ACE$  斜边  $AE$  上的高,

$$\therefore CD = \frac{CE \cdot AC}{AE} = \frac{60}{13}.$$

22. 解: 如图, 过点  $C$  作  $CD \perp AB$  于点  $D$ , 则此段河面的宽度为线段  $CD$  的长,



由题意可知:  $\angle ACD = 50^\circ, \angle BCD = 57^\circ, AB = 46$ .

$\because$  在  $Rt\triangle ACD$  中,  $\tan \angle ACD = \frac{AD}{CD}$ ,

$\therefore AD = CD \cdot \tan 50^\circ$ ,

$\because$  在  $Rt\triangle BCD$  中,  $\tan \angle BCD = \frac{BD}{CD}$ ,

$\therefore BD = CD \cdot \tan 57^\circ$ ,

$\therefore AB = BD + AD$ ,

$\therefore AB = CD \cdot \tan 57^\circ + CD \cdot \tan 50^\circ$ ,

$$CD = \frac{AB}{\tan 50^\circ + \tan 57^\circ} \approx \frac{46}{1.192 + 1.540} \approx 17(\text{m}),$$

答: 此段河面的宽度约为 17 m.

23. 解: (I) (i) 600; (ii) 11; (iii) 120; (iv) 60; (v) 2 或 7 或  $\frac{25}{3}$ .

$$(II) y = \begin{cases} 60x, & 0 \leq x \leq 4, \\ 240, & 4 < x \leq 5, \\ 60x - 60, & 5 < x \leq 11. \end{cases}$$

24. 解: (I) 如图, 过点  $A$  作  $AF \perp y$  轴于点  $F$ ,

$\therefore$  点  $A(-8, 4)$ ,

$\therefore AF = 8, OF = 4$ ,

$\because AB = OA, AF \perp y$  轴,

$\therefore OF = BF = 4, OB = 2OF = 8$ ,

$\therefore$  点  $B$  的坐标为  $(0, 8)$ ,

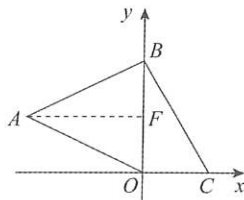
$AF = OB = 8$ .

在  $Rt\triangle ABF$  和  $Rt\triangle BCO$  中,

$$\therefore \begin{cases} AB = BC \\ AF = BO \end{cases},$$

$\therefore Rt\triangle ABF \cong Rt\triangle BCO(HL)$ .

$\therefore OC = BF = 4, \therefore$  点  $C$  的坐标为  $(4, 0)$ .





②若  $y_1 \geq y_2$ , 即  $-a \geq 3a-2$ , 得  $0 < a \leq \frac{1}{2}$ ,

$\therefore -a=2$ , 解得  $a=-2$  (舍去).

综上,  $a$  的值为  $\frac{4}{3}$ .

(Ⅲ) 设直线  $AB$  的解析式为  $y=mx+n$ ,

$\because$  直线  $AB$  过点  $A(0,1), B(2,-1)$ ,

$$\therefore \begin{cases} n=1 \\ 2m+n=-1 \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} m=-1 \\ n=1 \end{cases}.$$

$\therefore$  直线  $AB$  的解析式为  $y=-x+1$ ,

即射线  $BA$  的解析式为  $y=-x+1$ , 且  $x \leq 2$ .

$\because$  射线  $BA$  与抛物线  $y=ax^2-(2a+1)x+3a$  在  $x \leq 2$  的范围内仅有一个公共点,

即方程  $ax^2-(2a+1)x+3a=-x+1$  在  $x \leq 2$  的范围内仅有一个根,

整理得  $ax^2-2ax+3a-1=0$  在  $x \leq 2$  的范围内仅有一个根,

由题意, 该方程在  $x \leq 2$  的范围内仅有一个根或者有两个相等的实数根.

①当方程  $ax^2-2ax+3a-1=0$  有两个相等的实数根时,

$\Delta=0$ , 得  $4a^2-4a(3a-1)=0$ , 解得  $a_1=0$  (舍),  $a_2=\frac{1}{2}$ ;

②当  $\Delta > 0$  时, 抛物线  $y=ax^2-2ax+3a-1$  开口向上且对称轴为直线  $x=1$ , 若在  $x \leq 2$  的范围内与  $x$  轴仅有一个公共点, 只需当  $x=2$  时对应的函数值小于 0 即可.

即  $4a-4a+3a-1 < 0$ , 解得  $a < \frac{1}{3}$ ,

又  $a > 0$ ,

$\therefore 0 < a < \frac{1}{3}$ .

综上,  $a$  的取值范围是  $0 < a < \frac{1}{3}$  或  $a = \frac{1}{2}$ .

### 36 2019 年天津市初中毕业生学业考试

1. A 2. C 3. B 4. A 5. B 6. D 7. A 8. C 9. D 10. B

11. D

12. C  $\because$  由表格可知当  $x=0$  和  $x=1$  时的函数值相等都为 -2,

$\therefore$  抛物线的对称轴是  $x = -\frac{b}{2a} = \frac{1}{2}$ ,

$\therefore a, b$  异号, 且  $b = -a$ ,

$\because$  当  $x=0$  时  $y=c=-2$ ,

$\therefore c < 0$ ,

$\therefore abc > 0$ , 故①正确;

$\because$  根据抛物线的对称性可得, 当  $x=-2$  和  $x=3$  时的函数值相等且都为  $t$ ,

$\therefore -2$  和  $3$  是关于  $x$  的方程  $ax^2+bx+c=t$  的两个根, 故②

正确;

$\because b=-a, c=-2$ ,

$\therefore$  二次函数解析式为  $y=ax^2-ax-2$ ,

$\because$  当  $x=-\frac{1}{2}$  时, 与其对应的函数值  $y > 0$ ,

$\therefore \frac{3}{4}a-2 > 0$ ,

$\therefore a > \frac{8}{3}$ ;

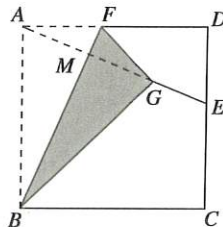
$\because$  当  $x=-1$  和  $x=2$  时的函数值分别为  $m$  和  $n$ ,

$\therefore m=n=2a-2$ ,

$\therefore m+n=4a-4 > \frac{20}{3}$ , 故③错误.

13.  $x^6$  14. 2 15.  $\frac{3}{7}$  16.  $(\frac{1}{2}, 0)$

17.  $\frac{49}{13}$  设  $BF$  与  $AE$  交于  $M$ , 如图,



在正方形  $ABCD$  中,  $\angle BAD = \angle D = 90^\circ$ ,

$\therefore \angle BAM + \angle FAM = 90^\circ$ ,

在  $Rt\triangle ADE$  中,  $AE = \sqrt{AD^2 + DE^2} = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$ ,

$\because$  由折叠的性质可得  $\triangle ABF \cong \triangle GBF$ ,

$\therefore AB = BG, \angle FBA = \angle FBG$ ,

$\therefore BF$  垂直平分  $AG$ ,

$\therefore AM = MG, \angle AMB = 90^\circ$ ,

$\therefore \angle BAM + \angle ABM = 90^\circ$ ,

$\therefore \angle ABM = \angle FAM$ ,

$\therefore \triangle ABM \sim \triangle EAD$ ,

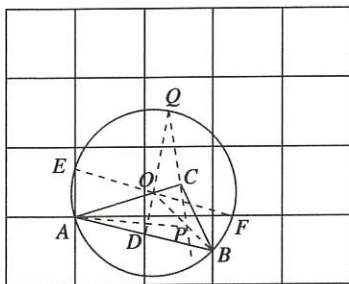
$\therefore \frac{AM}{ED} = \frac{AB}{EA}, \therefore \frac{AM}{5} = \frac{12}{13}$ ,

$\therefore AM = \frac{60}{13}, \therefore AG = 2AM = \frac{120}{13}$ ,

$\therefore GE = 13 - \frac{120}{13} = \frac{49}{13}$ .

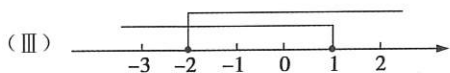
18. (I)  $\frac{\sqrt{17}}{2}$ ;

(II) 如图, 取圆与网格线的交点  $E, F$ , 连接  $EF$  与  $AC$  相交, 得圆心  $O$ ;  $AB$  与网格线相交于点  $D$ , 连接  $DO$  并延长, 交  $\odot O$  于点  $Q$ , 连接  $QC$  并延长, 与点  $B, O$  的连线  $BO$  相交于点  $P$ , 连接  $AP$ , 则点  $P$  即为所求.



19. 解: (I)  $x \geq -2$ ;

(II)  $x \leq 1$ ;



(IV)  $-2 \leq x \leq 1$ .

20. 解: (I) 40 25.

(II) 观察条形统计图,

$$\therefore \bar{x} = \frac{0.9 \times 4 + 1.2 \times 8 + 1.5 \times 15 + 1.8 \times 10 + 2.1 \times 3}{4 + 8 + 15 + 10 + 3} = 1.5,$$

$\therefore$  这组数据的平均数是 1.5;

$\therefore$  在这组数据中, 1.5 出现了 15 次, 出现的次数最多,

$\therefore$  这组数据的众数为 1.5;

$\therefore$  将这组数据按从小到大的顺序排列, 其中处于中间的两个

数都是 1.5, 有  $\frac{1.5 + 1.5}{2} = 1.5$ ,

$\therefore$  这组数据的中位数为 1.5.

(III)  $\therefore$  在统计的这组每天在校体育活动时间的样本数据中,

每天在校体育活动时间大于 1 h 的学生人数占 90%,

$\therefore$  估计该校 800 名初中学生中, 每天在校体育活动时间大于 1 h 的学生人数约占 90%, 有  $800 \times 90\% = 720$ .

答: 该校 800 名初中学生中, 每天在校体育活动时间大于 1 h 的学生人数约为 720.

21. 解: (I) 如图, 连接 OA, OB.

$\therefore PA, PB$  是  $\odot O$  的切线,

$\therefore OA \perp PA, OB \perp PB$ .

即  $\angle OAP = \angle OBP = 90^\circ$ .

$\therefore \angle APB = 80^\circ$ ,

$\therefore$  在四边形 OAPB 中,

$$\angle AOB = 360^\circ - \angle OAP - \angle OBP - \angle APB = 100^\circ.$$

$\therefore$  在  $\odot O$  中,  $\angle ACB = \frac{1}{2} \angle AOB$ ,

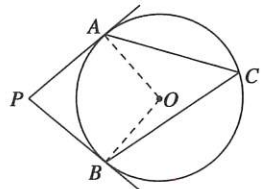
$\therefore \angle ACB = 50^\circ$ .

(II) 如图, 连接 CE.

$\therefore AE$  为  $\odot O$  的直径,

$\therefore \angle ACE = 90^\circ$ .

由 (I) 知,  $\angle ACB = 50^\circ$ ,



$$\therefore \angle BCE = \angle ACE - \angle ACB = 40^\circ.$$

$$\therefore \angle BAE = \angle BCE = 40^\circ.$$

$\therefore$  在  $\triangle ABD$  中,  $AB = AD$ ,

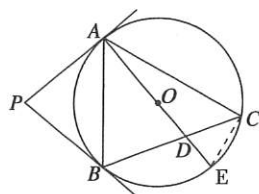
$$\therefore \angle ADB = \angle ABD = \frac{1}{2} (180^\circ -$$

$$\angle BAE) = 70^\circ.$$

又  $\angle ADB$  是  $\triangle ADC$  的一个外角,

$$\therefore \angle EAC = \angle ADB - \angle ACB,$$

$$\therefore \angle EAC = 20^\circ.$$



22. 解: 根据题意,  $\angle CAD = 31^\circ$ ,  $\angle CBD = 45^\circ$ ,  $\angle CDA = 90^\circ$ ,

$AB = 30$ .

$\therefore$  在  $\text{Rt}\triangle ACD$  中,  $\tan \angle CAD = \frac{CD}{AD}$ ,

$$\therefore AD = \frac{CD}{\tan 31^\circ},$$

$\therefore$  在  $\text{Rt}\triangle BCD$  中,  $\tan \angle CBD = \frac{CD}{BD}$ ,

$$\therefore BD = \frac{CD}{\tan 45^\circ} = CD.$$

又  $AD = AB + BD$ ,

$$\therefore \frac{CD}{\tan 31^\circ} = 30 + CD.$$

$$\therefore CD = \frac{30 \times \tan 31^\circ}{1 - \tan 31^\circ} \approx \frac{30 \times 0.60}{1 - 0.60} = 45 (\text{m}).$$

答: 这座灯塔的高度  $CD$  约为 45 m.

23. 解: (I) 180 900 210 850.

(II)  $y_1 = 6x (x > 0)$ .

当  $0 < x \leq 50$  时,  $y_2 = 7x$ ,

当  $x > 50$  时,  $y_2 = 7 \times 50 + 5(x - 50)$ , 即  $y_2 = 5x + 100$ ,

$$\therefore y_2 = \begin{cases} 7x, & 0 < x \leq 50 \\ 5x + 100, & x > 50 \end{cases}.$$

(III) (i) 100; (ii) 乙; (iii) 甲.

24. 解: (I) 由点  $A(6, 0)$ , 得  $OA = 6$ .

又  $OD = 2$ , 得  $AD = OA - OD = 4$ .

在矩形 CODE 中, 有  $ED \parallel CO$ ,

得  $\angle AED = \angle ABO = 30^\circ$ .

$\therefore$  在  $\text{Rt}\triangle AED$  中,  $AE = 2AD = 8$ .

$$\therefore$$
 由勾股定理得,  $ED = \sqrt{AE^2 - AD^2} = 4\sqrt{3}$ ,

$\therefore$  点 E 的坐标为  $(2, 4\sqrt{3})$ .

(II) (i) 由平移知,  $O'D' = 2$ ,  $E'D' = 4\sqrt{3}$ ,

$ME' = OO' = t$ .

由  $E'D' \parallel BO$ , 得  $\angle E'FM = \angle ABO = 30^\circ$ .

$\therefore$  在  $\text{Rt}\triangle MFE'$  中,  $MF = 2ME' = 2t$ .

$$\therefore$$
 由勾股定理得,  $FE' = \sqrt{MF^2 - ME'^2} = \sqrt{3}t$ .

$$\therefore S_{\triangle MFE'} = \frac{1}{2} ME' \cdot FE' = \frac{1}{2} \cdot t \cdot \sqrt{3}t = \frac{\sqrt{3}}{2} t^2.$$

$$\therefore S_{\text{矩形}C'O'D'E'} = O'D' \cdot E'D' = 8\sqrt{3},$$

$$\therefore S = S_{\text{矩形}C'O'D'E'} - S_{\triangle MFE'} = 8\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} t^2.$$

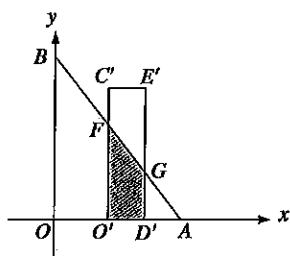
$$\therefore S = -\frac{\sqrt{3}}{2} t^2 + 8\sqrt{3}, \text{其中 } t \text{ 的取值范围是 } 0 < t < 2.$$

$$(\text{II}) \frac{5}{2} \leq t \leq 6 - \sqrt{2}.$$

$$\textcircled{1} \text{ 当 } 0 < t < 2 \text{ 时, 由 (I) 知, } S = -\frac{\sqrt{3}}{2} t^2 + 8\sqrt{3},$$

$$\therefore 6\sqrt{3} < S < 8\sqrt{3}, \text{ 不符合题意, 舍去;}$$

$$\textcircled{2} \text{ 当 } 2 \leq t < 4 \text{ 时, 如图, } O'F = \sqrt{3}(6-t), D'G = \sqrt{3}(4-t),$$



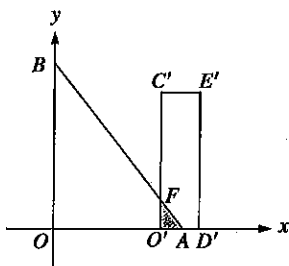
$$\therefore S = \frac{1}{2} [\sqrt{3}(6-t) + \sqrt{3}(4-t)] \times 2 = -2\sqrt{3}t + 10\sqrt{3},$$

$$\therefore 2\sqrt{3} < S \leq 6\sqrt{3},$$

$$\text{当 } S = 5\sqrt{3} \text{ 时, } -2\sqrt{3}t + 10\sqrt{3} = 5\sqrt{3}, \text{ 解得 } t = \frac{5}{2},$$

$$\therefore \frac{5}{2} \leq t < 4;$$

$$\textcircled{3} \text{ 当 } 4 \leq t < 6 \text{ 时, 如图, } O'F = \sqrt{3}(6-t), O'A = 6-t,$$



$$\therefore S = \frac{\sqrt{3}}{2} (6-t)(6-t) = \frac{\sqrt{3}}{2} (6-t)^2, \therefore 0 < S \leq 2\sqrt{3},$$

$$\text{当 } S = \sqrt{3} \text{ 时, } \frac{\sqrt{3}}{2} (6-t)^2 = \sqrt{3},$$

$$\text{解得 } t = 6 + \sqrt{2} (\text{舍去}) \text{ 或 } t = 6 - \sqrt{2}, \therefore 4 \leq t \leq 6 - \sqrt{2}.$$

$$\text{综上, 当 } \sqrt{3} \leq S \leq 5\sqrt{3} \text{ 时, } \frac{5}{2} \leq t \leq 6 - \sqrt{2}.$$

25. 解: (I)  $\because$  抛物线  $y = x^2 - bx + c$  经过点  $A(-1, 0)$ ,

$$\therefore 1 + b + c = 0, \text{ 即 } c = -b - 1,$$

$$\text{当 } b = 2 \text{ 时, } c = -3,$$

$$\therefore \text{ 抛物线的解析式为 } y = x^2 - 2x - 3 = (x-1)^2 - 4,$$

$$\therefore \text{ 抛物线的顶点坐标为 } (1, -4).$$

(II) 由 (I) 知, 抛物线的解析式为  $y = x^2 - bx - b - 1$ ,

$\because$  点  $D(b, y_D)$  在抛物线  $y = x^2 - bx - b - 1$  上,

$$\therefore y_D = b^2 - b \cdot b - b - 1 = -b - 1.$$

$$\text{由 } b > 0, \text{ 得 } b > \frac{b}{2} > 0, -b - 1 < 0,$$

$\therefore$  点  $D(b, -b-1)$  在第四象限, 且在抛物线对称轴  $x = \frac{b}{2}$  的

右侧.

如图, 过点  $D$  作  $DE \perp x$  轴, 垂足

为  $E$ , 则点  $E(b, 0)$ ,

$$\therefore AE = b + 1, DE = b + 1,$$

$$\therefore AE = DE.$$

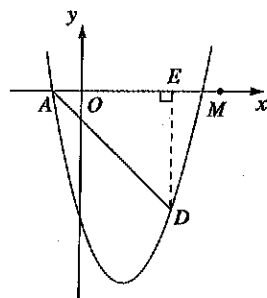
$\therefore$  在  $\text{Rt} \triangle ADE$  中,  $\angle ADE =$

$$\angle DAE = 45^\circ, \therefore AD = \sqrt{2} AE,$$

由已知  $AM = AD, m = 5$ ,

$$\therefore 5 - (-1) = \sqrt{2}(b + 1),$$

$$\therefore b = 3\sqrt{2} - 1.$$



(III)  $\because$  点  $Q(b + \frac{1}{2}, y_Q)$  在抛物线  $y = x^2 - bx - b - 1$  上,

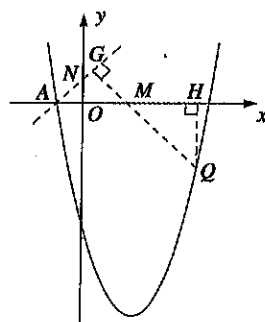
$$\therefore y_Q = (b + \frac{1}{2})^2 - b(b + \frac{1}{2}) - b - 1 = -\frac{b}{2} - \frac{3}{4}.$$

$\because b > 0, \therefore$  点  $Q(b + \frac{1}{2}, -\frac{b}{2} - \frac{3}{4})$  在第四象限, 且在直线  $x = b$  的右侧.

考虑到  $\sqrt{2}AM + 2QM = 2(\frac{\sqrt{2}}{2}AM + QM)$ , 可取点  $N(0, 1)$ ,

如图, 过点  $Q$  作直线  $AN$  的垂线, 垂足为  $G$ ,  $QG$  与  $x$  轴相交于

点  $M$ , 有  $\angle GAM = 45^\circ$ , 得  $\frac{\sqrt{2}}{2}AM = GM$ ,



$$\therefore \sqrt{2}AM + 2QM = 2(GM + QM) = 2GQ,$$

则此时点  $M$  满足题意.

如图, 过点  $Q$  作  $QH \perp x$  轴于点  $H$ , 则点  $H(b + \frac{1}{2}, 0)$ .

在  $\text{Rt} \triangle MQH$  中, 可知  $\angle QMH = \angle MQH = 45^\circ$ ,

$$\therefore QH = MH, QM = \sqrt{2}MH,$$

$$\therefore \text{ 点 } M(m, 0), QH = MH,$$

$$\therefore 0 - \left(-\frac{b}{2} - \frac{3}{4}\right) = \left(b + \frac{1}{2}\right) - m, \text{解得 } m = \frac{b}{2} - \frac{1}{4},$$

$$\therefore \sqrt{2}AM + 2QM \text{ 的最小值为 } \frac{33\sqrt{2}}{4},$$

$$\therefore \sqrt{2} \left[ \left(\frac{b}{2} - \frac{1}{4}\right) - (-1) \right] + 2\sqrt{2} \left[ \left(b + \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{b}{2} - \frac{1}{4}\right) \right] =$$

$$\frac{33\sqrt{2}}{4}, \therefore b = 4.$$

### ⑦2020 年天津市初中毕业生学业考试

1. A 2. B 3. B 4. C 5. D 6. B 7. A 8. D 9. A 10. C

11. D

12. C  $\because$  抛物线的对称轴为直线  $x = \frac{1}{2}$ , 而点  $(2, 0)$  关于直线  $x = \frac{1}{2}$  的对称点的坐标为  $(-1, 0)$ ,  $\therefore c > 1$ ,  $\therefore$  抛物线开口向下,

$$\therefore a < 0, \therefore \text{抛物线对称轴为直线 } x = \frac{1}{2},$$

$$\therefore -\frac{b}{2a} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore b = -a > 0, \therefore abc < 0, \text{故①错误};$$

$\because$  抛物线开口向下, 与  $x$  轴有两个交点,

$\therefore$  顶点在  $x$  轴的上方,

$\because a < 0$ ,  $\therefore$  抛物线与直线  $y = a$  有两个交点,

$\therefore$  关于  $x$  的方程  $ax^2 + bx + c = a$  有两个不等的实数根, 故②

正确;

$$\because \text{抛物线 } y = ax^2 + bx + c \text{ 经过点 } (2, 0), \therefore 4a + 2b + c = 0,$$

$$\therefore b = -a, \therefore 4a - 2a + c = 0, \text{即 } 2a + c = 0, \therefore c = -2a,$$

$$\because c > 1, \therefore -2a > 1, \therefore a < -\frac{1}{2}, \text{故③正确}.$$

13.  $3x$  14. 6 15.  $\frac{3}{8}$  16.  $y = -2x + 1$

17.  $\frac{3}{2}$   $\because$  四边形  $ABCD$  是平行四边形,

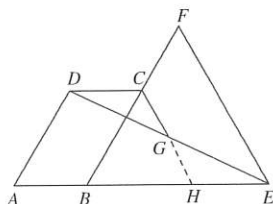
$$\therefore AD = BC, CD = AB, DC \parallel AB,$$

$$\because AD = 3, AB = CF = 2, \therefore CD = 2, BC = 3,$$

$$\therefore BF = BC + CF = 5,$$

$\because \triangle BEF$  是等边三角形,  $G$  为  $DE$  的中点,

$$\therefore BF = BE = 5, DG = EG, \text{延长 } CG \text{ 交 } BE \text{ 于点 } H,$$



$$\because DC \parallel AB, \therefore \angle CDG = \angle HEG,$$

在  $\triangle DCG$  和  $\triangle EHG$  中,

$$\begin{cases} \angle CDG = \angle HEG \\ DG = EG \\ \angle DGC = \angle EGH \end{cases},$$

$$\therefore \triangle DCG \cong \triangle EHG (\text{ASA}),$$

$$\therefore CD = HE, CG = HG,$$

$$\because CD = 2, BE = 5, \therefore HE = 2, BH = 3,$$

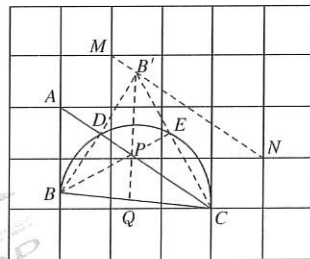
$$\because \angle CBH = 60^\circ, BC = BH = 3,$$

$\therefore \triangle CBH$  是等边三角形,

$$\therefore CH = BC = 3, CG = \frac{1}{2}CH = \frac{3}{2}.$$

18. (I)  $\sqrt{13}$ ;

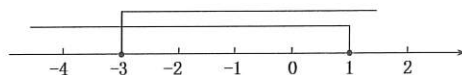
(II) 如图, 取格点  $M, N$ , 连接  $MN$ , 连接  $BD$  并延长, 与  $MN$  相交于点  $B'$ ; 连接  $B'C$ , 与半圆相交于点  $E$ , 连接  $BE$ , 与  $AC$  相交于点  $P$ , 连接  $B'P$  并延长, 与  $BC$  相交于点  $Q$ , 点  $P, Q$  即为所求.



19. 解: (I)  $x \leq 1$ ;

(II)  $x \geq -3$ ;

(III)



(IV)  $-3 \leq x \leq 1$ .

20. 解: (I) 25 24.

(II) 观察条形统计图,

$$\therefore \bar{x} = \frac{13 \times 2 + 14 \times 3 + 15 \times 4 + 16 \times 10 + 17 \times 6}{2 + 3 + 4 + 10 + 6} = 15.6,$$

$\therefore$  这组数据的平均数是 15.6.

$\because$  在这组数据中, 16 出现了 10 次, 出现的次数最多,

$\therefore$  这组数据的众数为 16.

$\because$  将这组数据按从小到大的顺序排列, 其中处于中间位置的数是 16,

$\therefore$  这组数据的中位数为 16.

21. 解: (I)  $\because \angle APC$  是  $\triangle PBC$  的一个外角,  $\angle ABC = 63^\circ$ ,

$$\angle APC = 100^\circ,$$

$$\therefore \angle C = \angle APC - \angle ABC = 37^\circ.$$

$\because$  在  $\odot O$  中,  $\angle BAD = \angle C$ ,

$$\therefore \angle BAD = 37^\circ.$$

∵ AB 为 ⊙O 的直径,

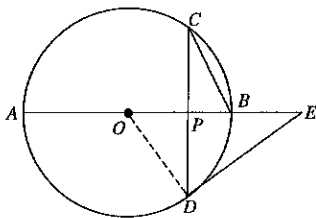
∴ ∠ADB = 90°.

∵ 在 ⊙O 中, ∠ADC = ∠ABC = 63°,

又 ∠CDB = ∠ADB - ∠ADC,

∴ ∠CDB = 27°.

(II) 如图, 连接 OD.



∵ CD ⊥ AB,

∴ ∠CPB = 90°.

∴ ∠PCB = 90° - ∠ABC = 27°.

∵ 在 ⊙O 中, ∠BOD = 2∠BCD,

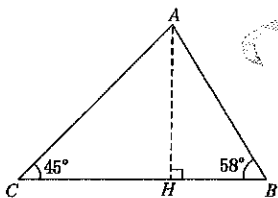
∴ ∠BOD = 54°.

∵ DE 是 ⊙O 的切线,

∴ OD ⊥ DE, 即 ∠ODE = 90°.

∴ ∠E = 90° - ∠BOD = 36°.

22. 解: 如图, 过点 A 作 AH ⊥ CB, 垂足为点 H.



根据题意, ∠ACB = 45°, ∠ABC = 58°, BC = 221.

∵ 在 Rt△CAH 中,  $\tan \angle ACH = \frac{AH}{CH}$ ,

∴  $CH = \frac{AH}{\tan 45^\circ} = AH$ .

∵ 在 Rt△BAH 中,  $\tan \angle ABH = \frac{AH}{BH}$ ,

$\sin \angle ABH = \frac{AH}{AB}$ ,

∴  $BH = \frac{AH}{\tan 58^\circ}$ ,  $AB = \frac{AH}{\sin 58^\circ}$ .

又  $BC = CH + BH$ ,

∴  $221 = AH + \frac{AH}{\tan 58^\circ}$ .

可得  $AH = \frac{221 \times \tan 58^\circ}{1 + \tan 58^\circ}$ .

∴  $AB = \frac{221 \times \tan 58^\circ}{(1 + \tan 58^\circ) \times \sin 58^\circ} \approx \frac{221 \times 1.60}{(1 + 1.60) \times 0.85} = 160(\text{m})$ .

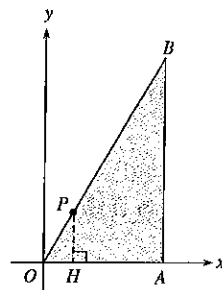
答: AB 的长约为 160 m.

23. 解: (I) 0.5 0.7 1.

(II) (I) 0.3; (II) 0.06; (III) 0.1; (IV) 6 或 62.

$$(III) y = \begin{cases} 0.1x, & 0 \leq x \leq 7, \\ 0.7, & 7 < x \leq 23, \\ 0.06x - 0.68, & 23 < x \leq 28. \end{cases}$$

24. 解: (I) 如图①, 过点 P 作 PH ⊥ x 轴, 垂足为点 H, 则 ∠OHP = 90°.



图①

∵ ∠OAB = 90°, ∠B = 30°,

∴ ∠BOA = 90° - ∠B = 60°.

∴ ∠OPH = 90° - ∠POH = 30°.

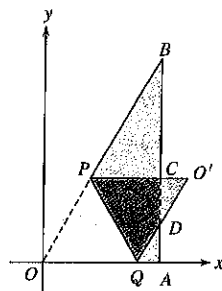
在 Rt△OHP 中, OP = 1,

∴  $OH = \frac{1}{2}OP = \frac{1}{2}$ ,

$HP = \sqrt{OP^2 - OH^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

∴ 点 P 的坐标为  $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ .

(II) (I) 由折叠知, △O'PQ ≌ △OPQ,



图②

∴ O'P = OP, O'Q = OQ.

又 OQ = OP = t,

∴ O'P = OP = OQ = O'Q = t.

∴ 四边形 OQO'P 为菱形.

∴ QO' // OB. 可得 ∠ADQ = ∠B = 30°.

∵ 点 A(2, 0),

∴ OA = 2. 有 QA = OA - OQ = 2 - t.

在 Rt△QAD 中, QD = 2QA = 4 - 2t.

∴ O'D = O'Q - QD,

∴ O'D = 3t - 4.

由  $QD > 0, O'D > 0$ , 得  $\begin{cases} 4-2t > 0 \\ 3t-4 > 0 \end{cases}$ , 解得  $\frac{4}{3} < t < 2$ ,

$\therefore t$  的取值范围是  $\frac{4}{3} < t < 2$ .

$$(ii) \frac{\sqrt{3}}{8} \leq S \leq \frac{4\sqrt{3}}{7}.$$

① 当  $1 \leq t \leq \frac{4}{3}$  时, 由图③可知, 重叠部分是  $\triangle O'PQ$ ,

$$\therefore S = \frac{\sqrt{3}}{4} t^2,$$

$$\therefore \text{当 } 1 \leq t \leq \frac{4}{3} \text{ 时, } \frac{\sqrt{3}}{4} \leq S \leq \frac{4\sqrt{3}}{9};$$

② 当  $\frac{4}{3} < t < 2$  时, 由图②可知, 重叠部分是四边形  $PQDC$ ,

$$\therefore S = S_{\triangle O'PQ} - S_{\triangle CDO'}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} t^2 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} (3t-4) \times \frac{\sqrt{3}}{2} (3t-4)$$

$$= -\frac{7\sqrt{3}}{8} t^2 + 3\sqrt{3}t - 2\sqrt{3}$$

$$= -\frac{7\sqrt{3}}{8} (t - \frac{12}{7})^2 + \frac{4\sqrt{3}}{7},$$

$$\text{当 } t = \frac{12}{7} \text{ 时, } S \text{ 有最大值, } S_{\max} = \frac{4\sqrt{3}}{7},$$

$$\text{当 } t = \frac{4}{3} \text{ 时, } S \text{ 有最小值, } S_{\min} = \frac{4\sqrt{3}}{9},$$

$$\therefore \text{当 } \frac{4}{3} < t < 2 \text{ 时, } \frac{4\sqrt{3}}{9} < S \leq \frac{4\sqrt{3}}{7};$$

③ 当  $2 \leq t \leq 3$  时, 由图④可知, 重叠部分是  $\triangle PCD$ .

$$PC = \frac{4-t}{2}, CD = \frac{\sqrt{3}}{2} (4-t),$$

$$\therefore S = \frac{\sqrt{3}}{8} (4-t)^2,$$

$$\therefore \text{当 } 2 \leq t \leq 3 \text{ 时, } \frac{\sqrt{3}}{8} \leq S \leq \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

综上所述, 当  $1 \leq t \leq 3$  时,  $S$  的取值范围

$$\text{是 } \frac{\sqrt{3}}{8} \leq S \leq \frac{4\sqrt{3}}{7}.$$

25. 解: (I) 当  $a=1, m=-3$  时,

抛物线的解析式为  $y = x^2 + bx - 3$ .

$\because$  抛物线经过点  $A(1, 0)$ ,

$$\therefore 0 = 1 + b - 3, \text{ 解得 } b = 2.$$

$\therefore$  抛物线的解析式为  $y = x^2 + 2x - 3$ .

$$\therefore y = x^2 + 2x - 3 = (x+1)^2 - 4,$$

$\therefore$  抛物线的顶点坐标为  $(-1, -4)$ .

(II) (i)  $\because$  抛物线  $y = ax^2 + bx + m$  经过点  $A(1, 0)$  和  $M(m, 0), m < 0$ ,

$$\therefore 0 = a + b + m, \quad ①$$

$$0 = am^2 + bm + m, \text{ 即 } am + b + 1 = 0. \quad ②$$

由①, ②得,  $am - a - m + 1 = 0$ ,

$$\therefore (a-1)(m-1) = 0, \therefore m < 0,$$

$$\therefore a = 1, b = -m - 1.$$

$\therefore$  抛物线的解析式为  $y = x^2 - (m+1)x + m$ .

根据题意得, 点  $C(0, m)$ , 点  $E(m+1, m)$ .

如图, 过点  $A$  作  $AH \perp l$  于点  $H$ .

由点  $A(1, 0)$ , 得点  $H(1, m)$ .

在  $Rt\triangle EAH$  中,  $EH = 1 - (m+1) = -m$ ,

$$HA = 0 - m = -m,$$

$$\therefore AE = \sqrt{EH^2 + HA^2} = -\sqrt{2}m.$$

$$\because AE = EF = 2\sqrt{2},$$

$$\therefore -\sqrt{2}m = 2\sqrt{2}, \text{ 解得 } m = -2.$$

此时, 点  $E(-1, -2)$ , 点  $C(0, -2)$ , 有  $EC = 1$ .

$\because$  点  $F$  在  $y$  轴上,

$$\therefore \text{在 } Rt\triangle EFC \text{ 中, } CF = \sqrt{EF^2 - EC^2} = \sqrt{7}.$$

$\therefore$  点  $F$  的坐标为  $(0, -2 - \sqrt{7})$  或  $(0, -2 + \sqrt{7})$ .

$$(ii) \text{ 由 } N \text{ 是 } EF \text{ 的中点, 得 } CN = \frac{1}{2} EF = \sqrt{2}.$$

根据题意, 点  $N$  在以点  $C$  为圆心,  $\sqrt{2}$  为半径的圆上.

由点  $M(m, 0)$ , 点  $C(0, m)$ , 得  $MO = -m, CO = -m$ .

$$\therefore \text{在 } Rt\triangle MCO \text{ 中, } MC = \sqrt{MO^2 + CO^2} = -\sqrt{2}m.$$

当  $MC \geq \sqrt{2}$ , 即  $m \leq -1$  时, 满足条件的点  $N$  落在线段  $MC$  上,

$$MN \text{ 的最小值为 } MC - NC = -\sqrt{2}m - \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\text{解得 } m = -\frac{3}{2};$$

当  $MC < \sqrt{2}$ , 即  $-1 < m < 0$  时, 满足条件的点  $N$  落在线段  $CM$  的延长线上.

$$MN \text{ 的最小值为 } NC - MC = \sqrt{2} - (-\sqrt{2}m) = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\text{解得 } m = -\frac{1}{2}.$$

$$\therefore \text{当 } m \text{ 的值为 } -\frac{3}{2} \text{ 或 } -\frac{1}{2} \text{ 时, } MN \text{ 的最小值是 } \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

### 38 2021 年天津市初中毕业生学业考试

1. C 2. A 3. B 4. A 5. D 6. C 7. B 8. C 9. A 10. B

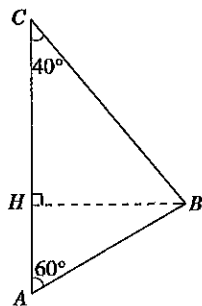
11. D

12. D  $\because$  抛物线  $y = ax^2 + bx + c$  经过点  $(-1, -1)$  和  $(0, 1)$ ,

$$\therefore \begin{cases} a - b + c = -1, \\ c = 1, \end{cases} \therefore b = a + 2,$$

[326]

22. 解:如图,过点B作BH⊥CA,垂足为H.



根据题意,  $\angle BAC = 60^\circ$ ,  $\angle BCA = 40^\circ$ ,  $CA = 257$ .

$\therefore$  在  $\text{Rt}\triangle BAH$  中,

$$\tan \angle BAH = \frac{BH}{AH}, \cos \angle BAH = \frac{AH}{AB},$$

$$\therefore BH = AH \cdot \tan 60^\circ = \sqrt{3}AH,$$

$$AB = \frac{AH}{\cos 60^\circ} = 2AH.$$

$\therefore$  在  $\text{Rt}\triangle BCH$  中,  $\tan \angle BCH = \frac{BH}{CH},$

$$\therefore CH = \frac{BH}{\tan 40^\circ} = \frac{\sqrt{3}AH}{\tan 40^\circ}.$$

又  $CA = CH + AH$ ,

$$\therefore 257 = \frac{\sqrt{3}AH}{\tan 40^\circ} + AH. \text{ 可得 } AH = \frac{257 \times \tan 40^\circ}{\sqrt{3} + \tan 40^\circ}.$$

$$\therefore AB = \frac{2 \times 257 \times \tan 40^\circ}{\sqrt{3} + \tan 40^\circ} \approx \frac{2 \times 257 \times 0.84}{1.73 + 0.84} = 168 \text{ (海里)}.$$

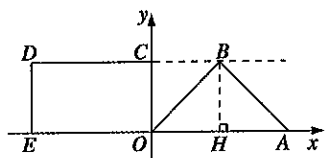
答:AB 的长约为 168 海里.

23. 解:(I) 10 12 20.

(II) (I) 8; (II) 3; (III) 28; (IV)  $\frac{1}{5}$  或  $\frac{31}{6}$ .

$$(III) y = \begin{cases} 20x, & 0 \leq x \leq 0.6, \\ 12, & 0.6 < x \leq 1, \\ 16x - 4, & 1 < x \leq 1.5. \end{cases}$$

24. 解:(I) 如图,过点B作BH⊥OA,垂足为点H.



由点  $A(4,0)$ , 得  $OA = 4$ .

$\therefore BO = BA$ ,  $\angle OBA = 90^\circ$ ,

$$\therefore OH = \frac{1}{2}OA = 2.$$

$$\therefore BH = \frac{1}{2}OA = 2.$$

$\therefore$  点B 的坐标为  $(2,2)$ .

(II) (I) 由点  $E(-\frac{7}{2}, 0)$ , 得  $OE = \frac{7}{2}$ .

由平移知, 四边形  $O'C'D'E'$  是矩形,

得  $\angle O'E'D' = 90^\circ$ ,  $O'E' = OE = \frac{7}{2}$ .

$$\therefore OE' = OO' - O'E' = t - \frac{7}{2}, \angle FE'O = 90^\circ.$$

$\therefore BO = BA$ ,  $\angle OBA = 90^\circ$ ,

$\therefore \angle BOA = \angle BAO = 45^\circ$ .

$\therefore \angle OFE' = 90^\circ - \angle BOA = 45^\circ$ .

$\therefore \angle FOE' = \angle OFE'$ .

$$\therefore FE' = OE' = t - \frac{7}{2}.$$

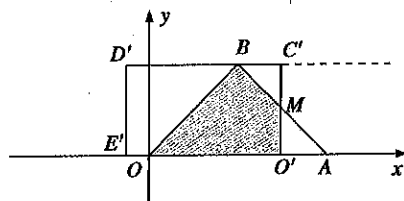
$$\therefore S_{\triangle FOE'} = \frac{1}{2}OE' \cdot FE' = \frac{1}{2}(t - \frac{7}{2})^2.$$

$$\therefore S = S_{\triangle OAB} - S_{\triangle FOE'} = \frac{1}{2} \times 4 \times 2 - \frac{1}{2}(t - \frac{7}{2})^2.$$

$$\text{即 } S = -\frac{1}{2}t^2 + \frac{7}{2}t - \frac{17}{8}, 4 \leq t < \frac{11}{2}.$$

$$(II) \frac{23}{8} \leq S \leq \frac{63}{16}.$$

① 当  $\frac{5}{2} \leq t < \frac{7}{2}$  时, 令  $O'C'$  与  $AB$  交于点  $M$ , 此时点  $D'$  位于第二象限.



$$S = S_{\triangle OAB} - S_{\triangle AO'M} = 4 - \frac{1}{2}(4-t)^2 = -\frac{1}{2}t^2 + 4t - 4$$

$$= -\frac{1}{2}(t-4)^2 + 4,$$

当  $t = \frac{5}{2}$  时,  $S = \frac{23}{8}$ ; 当  $t = \frac{7}{2}$  时,  $S = \frac{31}{8}$ ;

$$\therefore \frac{23}{8} \leq S \leq \frac{31}{8};$$

② 当  $\frac{7}{2} < t < 4$  时, 令  $O'C'$  与  $AB$  交于点  $M$ ,  $D'E'$  与  $OB$  交于点  $F$ ,

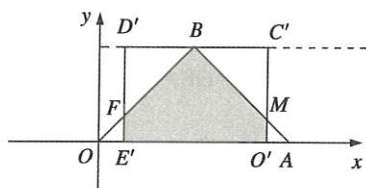
$$S = S_{\triangle OAB} - S_{\triangle FOE'} - S_{\triangle AO'M}$$

$$= 4 - \frac{1}{2}(t - \frac{7}{2})^2 - \frac{1}{2}(4-t)^2$$

$$= -t^2 + \frac{15}{2}t - \frac{81}{8} = -(t - \frac{15}{4})^2 + \frac{63}{16},$$

当  $t = \frac{15}{4}$  时,  $S = \frac{63}{16}$ ; 当  $t = \frac{7}{2}$  或  $t = 4$  时,  $S = \frac{31}{8}$ ;

$$\therefore \frac{31}{8} < S \leq \frac{63}{16};$$



③当  $4 \leq t \leq \frac{9}{2}$  时,

$$\text{由 (i) 可得 } S = -\frac{1}{2}t^2 + \frac{7}{2}t - \frac{17}{8} = -\frac{1}{2}\left(t - \frac{7}{2}\right)^2 + 4,$$

$$\text{当 } t=4 \text{ 时, } S=\frac{31}{8}; \text{ 当 } t=\frac{9}{2} \text{ 时, } S=\frac{7}{2};$$

$$\therefore \frac{7}{2} \leq S \leq \frac{31}{8}.$$

综上所述,  $S$  的取值范围为  $\frac{23}{8} \leq S \leq \frac{63}{16}$ .

25. 解: (I) 当  $a=1$  时, 抛物线的解析式为  $y=x^2-2x+c$ .

$\because$  抛物线经过点  $C(0, -1)$ ,

$$\therefore 0-0+c=-1. \text{ 解得 } c=-1.$$

$\therefore$  抛物线的解析式为  $y=x^2-2x-1$ .

$$\therefore y=x^2-2x-1=(x-1)^2-2,$$

$\therefore$  抛物线的顶点坐标为  $(1, -2)$ .

(II) 当  $a>0$  时,

由抛物线  $y=ax^2-2ax+c$  经过点  $C(0, -1)$ ,

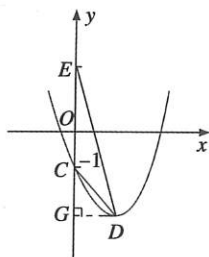
可得  $c=-1$ .

$\therefore$  抛物线的解析式为  $y=ax^2-2ax-1$ .

$$\therefore y=ax^2-2ax-1=a(x-1)^2-a-1,$$

$\therefore$  抛物线的顶点  $D$  的坐标为  $(1, -a-1)$ .

如图, 过点  $D$  作  $DG \perp y$  轴于点  $G$ .



在  $\text{Rt}\triangle DEG$  中,  $DG=1, EG=1+a-(-a-1)=2a+2$ ,

$$\therefore DE^2 = DG^2 + EG^2 = 1 + (2a+2)^2.$$

在  $\text{Rt}\triangle DCG$  中,  $DG=1, CG=-1-(-a-1)=a$ ,

$$\therefore DC^2 = DG^2 + CG^2 = 1 + a^2.$$

$$\therefore DE = 2\sqrt{2}DC, \text{ 即 } DE^2 = 8DC^2,$$

$$\therefore 1 + (2a+2)^2 = 8(1+a^2). \text{ 解得 } a_1 = \frac{1}{2}, a_2 = \frac{3}{2}.$$

$$\therefore \text{抛物线的解析式为 } y = \frac{1}{2}x^2 - x - 1 \text{ 或 } y = \frac{3}{2}x^2 - 3x - 1.$$

(III) 当  $a < -1$  时,

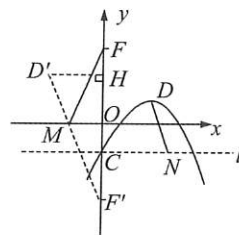
将点  $D(1, -a-1)$  向左平移 3 个单位长度, 向上平移 1 个单位长度得点  $D'(-2, -a)$ .

作点  $F$  关于  $x$  轴的对称点  $F'$ , 得点  $F'$  的坐标为  $(0, a-1)$ .

当满足条件的点  $M$  落在线段  $F'D'$  上时,  $FM+DN$  最小,

$$\text{此时, } FM+DN = F'M+D'M = F'D' = 2\sqrt{10}.$$

过点  $D'$  作  $D'H \perp y$  轴于点  $H$ .



在  $\text{Rt}\triangle F'D'H$  中,  $D'H=2, F'H=-a-(a-1)=1-2a$ ,

$$\therefore F'D'^2 = F'H^2 + D'H^2.$$

$$\text{即 } (1-2a)^2 + 4 = 40.$$

$$\text{解得 } a_1 = -\frac{5}{2}, a_2 = \frac{7}{2} (\text{舍}).$$

$$\therefore \text{点 } F' \text{ 的坐标为 } (0, -\frac{7}{2}), \text{ 点 } D' \text{ 的坐标为 } (-2, \frac{5}{2}).$$

$$\text{可得直线 } F'D' \text{ 的解析式为 } y = -3x - \frac{7}{2}.$$

$$\text{当 } y=0 \text{ 时, } x = -\frac{7}{6}.$$

$$\therefore m = -\frac{7}{6}, m+3 = \frac{11}{6}.$$

$\therefore$  当  $a = -\frac{5}{2}$  时,  $FM+DN$  的最小值为  $2\sqrt{10}$ , 此时点  $M$  的坐

标为  $(-\frac{7}{6}, 0)$ , 点  $N$  的坐标为  $(\frac{11}{6}, -1)$ .

### 39 2022 年天津市初中学业水平考试

1. A 2. B 3. B 4. D 5. A 6. C 7. A 8. B 9. D 10. D

11. C

12. C  $\because$  抛物线  $y=ax^2+bx+c$  经过点  $(1, 0), c>a>0$ ,

$$\therefore a+b+c=0, \text{ 即 } a+b=-c,$$

$$\therefore 2a+b=a+a+b=a-c<0, \text{ 故 ① 正确;}$$

$$\therefore 2a+b<0,$$

$$\therefore -b>2a>0,$$

$$\therefore \text{抛物线的对称轴 } x = -\frac{b}{2a} > 1,$$

$\therefore$  抛物线经过点  $(1, 0)$ ,

$\therefore$  当  $1 < x < -\frac{b}{2a}$  时,  $y$  随  $x$  的增大而减小,

当  $x > -\frac{b}{2a}$  时,  $y$  随  $x$  的增大而增大, 故②错误;

由  $ax^2 + bx + (b+c) = 0$  得  $ax^2 + bx + c = -b$ ,

由上述可知, 抛物线开口向上, 与  $x$  轴有两个交点.

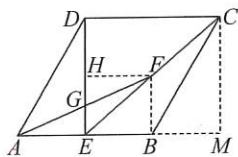
$-b > 0$ ,  $\therefore y = ax^2 + bx + c$  与  $y = -b$  必有两个交点,

即关于  $x$  的方程  $ax^2 + bx + (b+c) = 0$  有两个不相等的实数根, 故③正确.

13.  $m^8$  14. 18 15.  $\frac{7}{9}$  16. 1 (答案不唯一, 满足  $b > 0$  即可)

17.  $\frac{\sqrt{19}}{4}$  如图, 过点  $F$  作  $FH \parallel CD$ , 交  $DE$  于  $H$ , 过点  $C$  作

$CM \perp AB$ , 交  $AB$  的延长线于  $M$ , 连接  $FB$ ,



$\because$  四边形  $ABCD$  是菱形,

$\therefore AB = CD = BC = 2, AB \parallel CD$ ,

$\therefore FH \parallel AB$ ,

$\therefore \angle FHG = \angle AEG$ ,

$\because F$  是  $CE$  的中点,  $FH \parallel CD$ ,

$\therefore H$  是  $DE$  的中点,

$\therefore FH$  是  $\triangle CDE$  的中位线,

$\therefore FH = \frac{1}{2}CD = 1$ ,

$\because E$  是  $AB$  的中点,

$\therefore AE = BE = 1$ ,

$\therefore AE = FH$ ,

$\therefore \angle AGE = \angle FGH$ ,

$\therefore \triangle AEG \cong \triangle FGH (AAS)$ ,

$\therefore GA = GF$ ,

$\because AD \parallel BC$ ,

$\therefore \angle CBM = \angle DAB = 60^\circ$ ,

在  $Rt\triangle CBM$  中,  $\angle BCM = 30^\circ$ ,

$\therefore BM = \frac{1}{2}BC = 1, CM = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$ ,

$\therefore BE = BM$ ,

$\because F$  是  $CE$  的中点,

$\therefore FB$  是  $\triangle CEM$  的中位线,

$\therefore BF = \frac{1}{2}CM = \frac{\sqrt{3}}{2}, FB \parallel CM$ ,

$\therefore \angle EBF = \angle M = 90^\circ$ ,

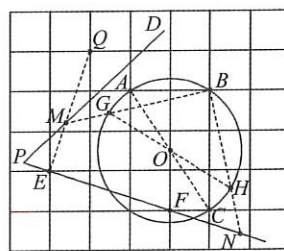
在  $Rt\triangle AFB$  中, 由勾股定理得:  $AF = \sqrt{AB^2 + BF^2} =$

$$\sqrt{2^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{19}}{2},$$

$$\therefore GF = \frac{1}{2}AF = \frac{\sqrt{19}}{4}.$$

18. (I)  $\sqrt{10}$ ;

(II) 如图, 连接  $AC$ , 与网格线相交于点  $O$ ; 取格点  $Q$ , 连接  $EQ$  与射线  $PD$  相交于点  $M$ ; 连接  $MB$  与  $\odot O$  相交于点  $G$ ; 连接  $GO$  并延长, 与  $\odot O$  相交于点  $H$ ; 连接  $BH$  并延长, 与射线  $PF$  相交于点  $N$ , 则点  $M, N$  即为所求.



19. 解: (I)  $x \geq -1$ ;

(II)  $x \leq 2$ ;

(III)

(IV)  $-1 \leq x \leq 2$ .

20. 解: (I) 40 10.

(II) 观察条形统计图,

$$\therefore \bar{x} = \frac{1 \times 13 + 2 \times 18 + 3 \times 5 + 4 \times 4}{13 + 18 + 5 + 4} = 2,$$

$\therefore$  这组数据的平均数是 2;

$\because$  在这组数据中, 2 出现了 18 次, 出现的次数最多,

$\therefore$  这组数据的众数是 2;

$\because$  将这组数据按从小到大的顺序排列, 其中处于中间的两个

数都是 2, 有  $\frac{2+2}{2} = 2$ ,

$\therefore$  这组数据的中位数是 2.

21. 解: (I)  $\because AB$  为  $\odot O$  的直径,

$\therefore \angle ACB = 90^\circ$ .

由  $C$  为  $\widehat{AB}$  的中点, 得  $\widehat{AC} = \widehat{BC}$ .

$\therefore AC = BC$ , 得  $\angle ABC = \angle CAB$ .

在  $Rt\triangle ABC$  中,  $\angle ABC + \angle CAB = 90^\circ$ ,

$\therefore \angle CAB = 45^\circ$ .

根据勾股定理, 有  $AC^2 + BC^2 = AB^2$ .

又  $AB = 6$ , 得  $2AC^2 = 36$ .

$$\therefore AC=3\sqrt{2}.$$

(II)  $\because FD$  是  $\odot O$  的切线,

$\therefore OD \perp FD$ , 即  $\angle ODF=90^\circ$ .

$\because OD \perp CB$ , 垂足为  $E$ ,

$$\therefore \angle CED=90^\circ, CE=\frac{1}{2}CB.$$

由(I)可得  $\angle ACB=90^\circ$ , 有  $\angle FCE=90^\circ$ .

$$\therefore \angle FCE=\angle CED=\angle ODF=90^\circ.$$

$\therefore$  四边形  $ECFD$  为矩形.

$$\therefore FD=CE. \therefore FD=\frac{1}{2}CB.$$

在  $Rt\triangle ABC$  中, 由  $AB=6, AC=2$ ,

$$\text{得 } CB=\sqrt{AB^2-AC^2}=4\sqrt{2}.$$

$$\therefore FD=2\sqrt{2}.$$

22. 解: 根据题意,  $BC=32, \angle APC=42^\circ, \angle APB=35^\circ$ .

在  $Rt\triangle PAC$  中,  $\tan \angle APC=\frac{AC}{PA}$ ,

$$\therefore AC=PA \cdot \tan 42^\circ,$$

在  $Rt\triangle PAB$  中,  $\tan \angle APB=\frac{AB}{PA}$ ,

$$\therefore AB=PA \cdot \tan 35^\circ,$$

$$\because AC=AB+BC,$$

$$\therefore PA \cdot \tan 42^\circ = PA \cdot \tan 35^\circ + 32, \text{ 即 } PA = \frac{32}{\tan 42^\circ - \tan 35^\circ}.$$

$$\therefore AB = \frac{32 \times \tan 35^\circ}{\tan 42^\circ - \tan 35^\circ} \approx \frac{32 \times 0.70}{0.90 - 0.70} = 112(\text{m}).$$

答: 这座山  $AB$  的高度约为 112 m.

23. 解: (I) 0.8 1.2 2.

(II) (I) 0.8; (II) 0.25; (III) 10 或 116.

$$(III) y = \begin{cases} 0.1x, & 0 \leq x \leq 12, \\ 1.2, & 12 < x \leq 82, \\ 0.08x - 5.36, & 82 < x \leq 92. \end{cases}$$

24. 解: (I) 在  $Rt\triangle POQ$  中,  $\because \angle OPQ=30^\circ$ ,

$$\therefore \angle OQP=90^\circ - \angle OPQ=60^\circ.$$

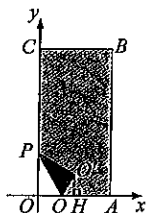
根据折叠, 知  $\triangle PO'Q \cong \triangle POQ$ ,

$$\therefore O'Q=OQ, \angle O'QP=\angle OQP=60^\circ.$$

$$\because \angle O'QA=180^\circ - \angle O'QP - \angle OQP,$$

$$\therefore \angle O'QA=60^\circ.$$

如图, 过点  $O'$  作  $O'H \perp OA$ , 垂足为  $H$ , 则  $\angle OHQ=90^\circ$ .



$\therefore$  在  $Rt\triangle O'HQ$  中, 得  $\angle QO'H=90^\circ - \angle O'QA=30^\circ$ .

由  $t=1$ , 得  $OQ=O'Q=1$ .

$$\therefore QH=\frac{1}{2}O'Q=\frac{1}{2},$$

$$O'H=\sqrt{O'Q^2-QH^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\therefore OH=OQ+QH=\frac{3}{2},$$

$$\therefore \text{点 } O' \text{ 的坐标为 } (\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}).$$

(II)  $\because$  点  $A(3,0)$ ,

$$\therefore OA=3. \text{ 又 } OQ=t,$$

$$\therefore QA=OA-OQ=3-t.$$

由(I)知,  $O'Q=t, \angle O'QA=60^\circ$ .

$\because$  四边形  $OABC$  是矩形,

$$\therefore \angle OAB=90^\circ.$$

在  $Rt\triangle EAQ$  中,  $\angle QEA=90^\circ - \angle EQA=30^\circ$ , 得  $QA=\frac{1}{2}QE$ .

$$\therefore QE=2QA=2(3-t)=6-2t.$$

$$\text{又 } O'E=O'Q-QE,$$

$$\therefore O'E=3t-6, \text{ 其中 } t \text{ 的取值范围是 } 2 < t < 3.$$

(III)  $3, \frac{10}{3}$ . (答案不唯一, 满足  $3 \leq t < 2\sqrt{3}$  即可)

$\because$  点  $P$  在边  $OC$  上 (点  $P$  不与点  $O, C$  重合),

$$\therefore 0 < \sqrt{3}t < 6, \therefore 0 < t < 2\sqrt{3},$$

分三种情况:

① 由(II)知, 当  $t=2$  时, 点  $O'$  恰好在  $AB$  上,

由折叠得,  $\angle O'PQ=\angle OPQ=30^\circ$ ,

$$\therefore O'P=\sqrt{3}O'Q=2\sqrt{3},$$

$$\therefore S_{\text{重合}}=S_{\triangle OPQ}=\frac{1}{2}O'P \cdot O'Q=\frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times 2=2\sqrt{3} < 3\sqrt{3},$$

$\therefore$  当  $0 < t \leq 2$  时, 不存在重合的面积为  $3\sqrt{3}$  的情况;

② 由(II)得, 当  $2 < t < 3$  时, 重合部分为四边形,

$$O'E=3t-6, \angle O'EF=\angle QEA=30^\circ,$$

$$\therefore OF=O'E \cdot \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}(3t-6) = \sqrt{3}(t-2),$$

由题意易得  $O'Q=t, O'P=\sqrt{3}t$ ,

$$\therefore S_{\text{重合}}=S_{\triangle OPQ}-S_{\triangle OEF}=\frac{\sqrt{3}}{2}t^2-\frac{1}{2} \times (3t-6) \times \sqrt{3}(t-2)$$

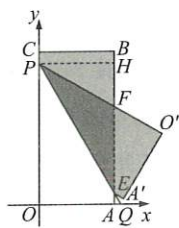
$$=-\sqrt{3}t^2+6\sqrt{3}t-6\sqrt{3}=-\sqrt{3}(t-3)^2+3\sqrt{3},$$

$\because 2 < t < 3, t$  取不到 3.

$\therefore S_{\text{重合}} < 3\sqrt{3}$ , 不存在重合的面积为  $3\sqrt{3}$  的情况;

③ 当  $3 \leq t < 2\sqrt{3}$  时, 重合部分为三角形,  $PQ, O'P$  分别与边  $AB$

相交于点  $E, F$ , 有  $AQ=t-3$ ,



$$\because \angle OPQ = 30^\circ, \therefore \angle OQP = 60^\circ,$$

$$\therefore AE = AQ \cdot \tan 60^\circ = \sqrt{3}(t-3),$$

过点  $P$  作  $PH \perp AB$  于点  $H$ ,

$$\text{则 } PH = OA = 3, AH = OP = \sqrt{3}t,$$

$$\angle FPH = 90^\circ - \angle OPQ - \angle O'PQ = 30^\circ,$$

$$\therefore FH = PH \cdot \tan 30^\circ = \sqrt{3},$$

$$\therefore EF = AH - AE - FH = \sqrt{3}t - \sqrt{3}(t-3) - \sqrt{3} = 2\sqrt{3}, \text{ 为定值,}$$

$$\therefore S_{\text{重合}} = S_{\triangle PEF} = \frac{1}{2}EF \cdot PH = 3\sqrt{3}, \text{ 为定值,}$$

$\therefore$  当  $3 \leq t < 2\sqrt{3}$  时, 重合部分的面积恒为  $3\sqrt{3}$ ,  $t$  可以是此范围内的任意值.

25. 解: (I) (i)  $\because$  抛物线  $y = ax^2 + bx + c$  与  $x$  轴相交于点  $A(-1, 0)$ ,

$$\therefore a - b + c = 0, \text{ 又 } b = -2, c = -3, \text{ 得 } a = 1.$$

$$\therefore \text{ 抛物线的解析式为 } y = x^2 - 2x - 3.$$

$$\because y = x^2 - 2x - 3 = (x-1)^2 - 4,$$

$$\therefore \text{ 点 } P \text{ 的坐标为 } (1, -4).$$

$$(ii) \text{ 当 } y = 0 \text{ 时, 由 } x^2 - 2x - 3 = 0,$$

$$\text{解得 } x_1 = -1, x_2 = 3.$$

$$\therefore \text{ 点 } B \text{ 的坐标为 } (3, 0).$$

设经过  $B, P$  两点的直线的解析式为  $y = kx + n$ ,

$$\text{有 } \begin{cases} 3k + n = 0, \\ k + n = -4. \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} k = 2, \\ n = -6. \end{cases}$$

$$\therefore \text{ 直线 } BP \text{ 的解析式为 } y = 2x - 6.$$

$\because$  直线  $x = m$  ( $m$  是常数,  $1 < m < 3$ ) 与抛物线  $y = x^2 - 2x - 3$  相交于点  $M$ , 与  $BP$  相交于点  $G$ ,

$$\therefore \text{ 点 } M \text{ 的坐标为 } (m, m^2 - 2m - 3),$$

$$\text{点 } G \text{ 的坐标为 } (m, 2m - 6).$$

$$\therefore MG = (2m - 6) - (m^2 - 2m - 3)$$

$$= -m^2 + 4m - 3 = -(m-2)^2 + 1.$$

$$\therefore \text{ 当 } m = 2 \text{ 时, } MG \text{ 有最大值 } 1,$$

此时, 点  $M$  的坐标为  $(2, -3)$ , 点  $G$  的坐标为  $(2, -2)$ .

$$(II) \text{ 由 (I) 知 } a - b + c = 0, \text{ 又 } 3b = 2c,$$

$$\therefore b = -2a, c = -3a. (a > 0)$$

$$\therefore \text{ 抛物线的解析式为 } y = ax^2 - 2ax - 3a.$$

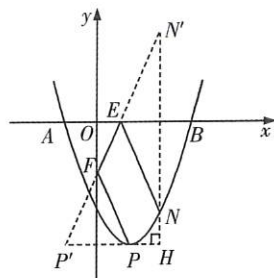
$$\because y = ax^2 - 2ax - 3a = a(x-1)^2 - 4a.$$

$$\therefore \text{ 顶点 } P \text{ 的坐标为 } (1, -4a).$$

$\because$  直线  $x = 2$  与抛物线  $y = ax^2 - 2ax - 3a$  相交于点  $N$ ,

$\therefore$  点  $N$  的坐标为  $(2, -3a)$ .

如图, 作点  $P$  关于  $y$  轴的对称点  $P'$ , 作点  $N$  关于  $x$  轴的对称点  $N'$ ,



得点  $P'$  的坐标为  $(-1, -4a)$ , 点  $N'$  的坐标为  $(2, 3a)$ .

当满足条件的点  $E, F$  落在直线  $P'N'$  上时,  $PF + FE + EN$  取得最小值,

$$\text{此时, } PF + FE + EN = P'N' = 5,$$

延长  $P'P$  与直线  $x = 2$  相交于点  $H$ , 则  $P'H \perp N'H$ .

在  $\text{Rt}\triangle P'HN'$  中,  $P'H = 3, HN' = 3a - (-4a) = 7a$ .

$$\therefore P'N'^2 = P'H^2 + HN'^2 = 9 + 49a^2 = 25.$$

$$\text{解得 } a_1 = \frac{4}{7}, a_2 = -\frac{4}{7} (\text{舍}).$$

$$\therefore \text{ 点 } P' \text{ 的坐标为 } (-1, -\frac{16}{7}), \text{ 点 } N' \text{ 的坐标为 } (2, \frac{12}{7}).$$

$$\text{可得直线 } P'N' \text{ 的解析式为 } y = \frac{4}{3}x - \frac{20}{21}.$$

$$\text{令 } y = 0, \text{ 解得 } x = \frac{5}{7};$$

$$\text{令 } x = 0, \text{ 解得 } y = -\frac{20}{21};$$

$$\therefore \text{ 点 } E(\frac{5}{7}, 0) \text{ 和点 } F(0, -\frac{20}{21}) \text{ 即为所求.}$$

#### ④ 2023 年天津市初中学业水平考试

1. D 2. B 3. C 4. A 5. B 6. B 7. C 8. D 9. A 10. D

11. A 由旋转的性质, 得  $\angle BCA = \angle DEA, \angle ABC = \angle ADE,$

$$\angle BAD = \angle CAE, AB = AD, AC = AE.$$

在  $\triangle ACE$  中,  $\angle CAE = \angle BCA - \angle CEA = \angle DEA - \angle CEA = \angle BED$ , 故 A 正确;

由图知  $AB > AC$ , 则  $AB > AE$ , 故 B 错误;

在  $\triangle ABC$  中,  $\angle ACE = \angle BAC + \angle ABC = \angle BAC + \angle ADE$ , 则  $\angle ACE > \angle ADE$ , 故 C 错误;

$$\because \frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AE}, \angle BAD = \angle CAE, \therefore \triangle ABD \sim \triangle ACE.$$

$$\therefore \frac{CE}{BD} = \frac{AC}{AB} < 1, \text{ 则 } CE < BD, \text{ 故 D 错误.}$$

12. C 设  $AB$  的长为  $x$  m, 矩形  $ABCD$  的面积为  $y$  m<sup>2</sup>, 则  $BC$  的长为  $(40 - 2x)$  m,

$$\text{由题意得 } y = x(40 - 2x) = -2x^2 + 40x = -2(x - 10)^2 + 200,$$

其中  $0 < 40 - 2x \leq 26$ , 即  $7 \leq x < 20$ , 故 ① 错误;

令  $y = -2(x-10)^2 + 200 = 192$ , 解得  $x = 8$ , 或  $x = 12$ ,

即  $AB$  的长有两个不同的值满足菜园  $ABCD$  面积为  $192 \text{ m}^2$ ,  
故②正确;

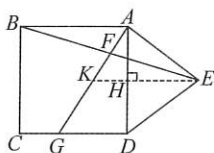
$\therefore y = -2(x-10)^2 + 200$ ,

$\therefore$  菜园  $ABCD$  面积的最大值为  $200 \text{ m}^2$ , 故③正确.

13.  $\frac{7}{10}$  14.  $x^2y^3$  15. 1 16. 5

17. (I) 3 (II)  $\sqrt{13}$

(I) 如图, 过点  $E$  作  $EH \perp AD$ , 垂足为  $H$ .



$\therefore$  正方形  $ABCD$  的边长为 3,

$\therefore AD = 3$ .

$\therefore \triangle ADE$  是等腰三角形,  $EA = ED = \frac{5}{2}$ ,  $EH \perp AD$ ,

$\therefore AH = DH = \frac{1}{2}AD = \frac{3}{2}$ .

在  $\text{Rt}\triangle AHE$  中,  $EH = \sqrt{EA^2 - AH^2} = \sqrt{(\frac{5}{2})^2 - (\frac{3}{2})^2} = 2$ ,

$\therefore S_{\triangle ADE} = \frac{1}{2}AD \cdot EH = \frac{1}{2} \times 3 \times 2 = 3$ ;

(II) 如图, 延长  $EH$  交  $AG$  于点  $K$ .

$\therefore$  正方形  $ABCD$  的边长为 3,

$\therefore \angle BAD = \angle ADC = 90^\circ$ ,  $AB = 3$ .

$\therefore AB \perp AD$ ,  $CD \perp AD$ .

$\therefore EK \perp AD$ ,

$\therefore AB \parallel EK \parallel CD$ .

$\therefore \angle ABF = \angle KEF$ .

$\therefore F$  为  $BE$  的中点,

$\therefore BF = EF$ .

在  $\triangle ABF$  和  $\triangle KEF$  中,  $\begin{cases} \angle ABF = \angle KEF \\ BF = EF \\ \angle AFB = \angle KFE \end{cases}$ ,

$\therefore \triangle ABF \cong \triangle KEF (\text{ASA})$ .

$\therefore KE = AB = 3$ .

由 (I) 可知,  $AH = \frac{1}{2}AD$ ,  $EH = 2$ ,

$\therefore KH = KE - EH = 1$ .

$\therefore KH \parallel CD$ ,

$\therefore \triangle AHK \sim \triangle ADG$ .

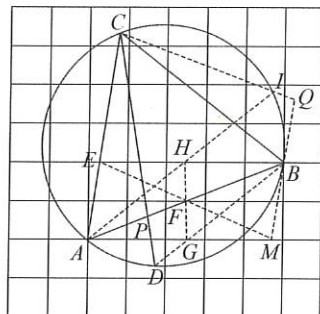
$\therefore \frac{KH}{GD} = \frac{AH}{AD} = \frac{1}{2}$ .

$\therefore GD = 2KH = 2$ .

在  $\text{Rt}\triangle ADG$  中,  $AG = \sqrt{AD^2 + GD^2} = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$ .

18. (I)  $\sqrt{29}$ ;

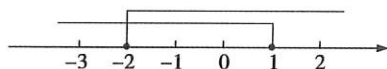
(II) 如图, 取  $AC, AB$  与网格线的交点  $E, F$ , 连接  $EF$  并延长与网格线相交于点  $M$ , 连接  $MB$ ; 连接  $DB$  与网格线相交于点  $G$ , 连接  $GF$  并延长与网格线相交于点  $H$ , 连接  $AH$  并延长与圆相交于点  $I$ , 连接  $CI$  并延长与  $MB$  的延长线相交于点  $Q$ , 则点  $Q$  即为所求.



19. 解: (I)  $x \geq -2$ ;

(II)  $x \leq 1$ ;

(III)



(IV)  $-2 \leq x \leq 1$ .

20. 解: (I) 40 15.

(II) 观察条形统计图,

$\therefore \bar{x} = \frac{12 \times 5 + 13 \times 6 + 14 \times 13 + 15 \times 16}{5 + 6 + 13 + 16} = 14$ ,

$\therefore$  这组数据的平均数是 14.

$\therefore$  在这组数据中, 15 出现了 16 次, 出现的次数最多,

$\therefore$  这组数据的众数是 15.

$\therefore$  将这组数据按由小到大的顺序排列, 处于中间的两个数都是 14, 有  $\frac{14+14}{2} = 14$ ,

$\therefore$  这组数据的中位数是 14.

21. 解: (I) 在  $\odot O$  中, 半径  $OC$  垂直于弦  $AB$ ,

$\therefore \widehat{AC} = \widehat{BC}$ . 得  $\angle AOC = \angle BOC$ .

$\therefore \angle AOC = 60^\circ$ ,

$\therefore \angle AOB = 2\angle AOC = 120^\circ$ .

$\therefore \angle CEB = \frac{1}{2}\angle BOC = \frac{1}{2}\angle AOC$ ,

$\therefore \angle CEB = 30^\circ$ .

(II) 如图, 连接  $OE$ .

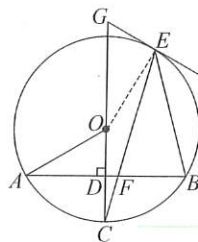
同 (I) 得  $\angle CEB = 30^\circ$ .

$\therefore$  在  $\triangle BEF$  中,  $EF = EB$ ,

$\therefore \angle EBF = \angle EFB = 75^\circ$ .

$\therefore \angle AOE = 2\angle EBA = 150^\circ$ .

又  $\angle AOG = 180^\circ - \angle AOC = 120^\circ$ ,



$$\therefore \angle GOE = \angle AOE - \angle AOG = 30^\circ.$$

$\therefore EG$  与  $\odot O$  相切于点  $E$ ,

$\therefore OE \perp EG$ , 即  $\angle OEG = 90^\circ$ .

在  $\text{Rt}\triangle OEG$  中,  $\tan \angle GOE = \frac{EG}{OE}$ ,  $OE = OA = 3$ ,

$$\therefore EG = 3 \times \tan 30^\circ = \sqrt{3}.$$

22. 解: (I) 在  $\text{Rt}\triangle DCE$  中,  $\angle DCE = 30^\circ$ ,  $CD = 6$ ,

$$\therefore DE = \frac{1}{2} CD = 3. \text{ 即 } DE \text{ 的长为 } 3 \text{ m.}$$

(II) (i) 在  $\text{Rt}\triangle DCE$  中,  $\cos \angle DCE = \frac{EC}{CD}$ ,

$$\therefore EC = CD \cdot \cos \angle DCE = 6 \times \cos 30^\circ = 3\sqrt{3}.$$

在  $\text{Rt}\triangle BCA$  中, 由  $\tan \angle BCA = \frac{AB}{CA}$ ,  $AB = h$ ,  $\angle BCA = 45^\circ$ ,

$$\text{得 } CA = \frac{AB}{\tan 45^\circ} = h.$$

$$\therefore EA = CA + EC = h + 3\sqrt{3}.$$

即线段  $EA$  的长为  $(h + 3\sqrt{3})$  m.

(II) 如图, 过点  $D$  作  $DF \perp$

$AB$ , 垂足为  $F$ .

根据题意,  $\angle AED = \angle FAE =$

$$\angle DFA = 90^\circ,$$

$\therefore$  四边形  $DEAF$  是矩形.

$$\therefore DF = EA = h + 3\sqrt{3}, FA = DE = 3.$$

可得  $BF = AB - FA = h - 3$ .

在  $\text{Rt}\triangle BDF$  中,  $\tan \angle BDF = \frac{BF}{DF}$ ,  $\angle BDF = 27^\circ$ ,

$$\therefore BF = DF \cdot \tan \angle BDF. \text{ 即 } h - 3 = (h + 3\sqrt{3}) \times \tan 27^\circ.$$

$$\therefore h = \frac{3 + 3\sqrt{3} \times \tan 27^\circ}{1 - \tan 27^\circ} \approx \frac{3 + 3 \times 1.7 \times 0.5}{1 - 0.5} \approx 11 \text{ (m)}.$$

答: 塔  $AB$  的高度约为 11 m.

23. 解: (I) (i) 0.12, 1.2, 0.6; (II) 0.06;

(III) 当  $50 \leq x \leq 60$  时,  $y = 0.6$ ;

当  $60 < x \leq 80$  时,  $y = -0.03x + 2.4$ .

(II) 0.3 km.

24. 解: (I)  $(\sqrt{3}, 2)$   $(-\sqrt{3}, \frac{3}{2})$ .

(II) (i)  $\therefore$  点  $E(0, \frac{1}{2})$ , 点  $F(-\sqrt{3}, \frac{1}{2})$ , 点  $H(0, \frac{3}{2})$ ,

$\therefore$  矩形  $EFGH$  中,  $EF \parallel x$  轴,  $EH \perp x$  轴,  $EF = \sqrt{3}$ ,  $EH = 1$ .

$\therefore$  矩形  $E'F'G'H'$  中,  $E'F' \parallel x$  轴,  $E'H' \perp x$  轴,  $E'F' = \sqrt{3}$ ,  $E'H' = 1$ .

由点  $A(\sqrt{3}, 0)$ , 点  $B(0, 1)$ , 得  $OA = \sqrt{3}$ ,  $OB = 1$ .

在  $\text{Rt}\triangle ABO$  中,  $\tan \angle ABO = \frac{OA}{OB} = \sqrt{3}$ , 得  $\angle ABO = 60^\circ$ .

在  $\text{Rt}\triangle BME$  中, 由  $EM = EB \cdot \tan 60^\circ$ ,  $EB = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ ,

$$\text{得 } EM = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\therefore S_{\triangle BME} = \frac{1}{2} EB \cdot EM = \frac{\sqrt{3}}{8}. \text{ 同理, 得 } S_{\triangle BNH} = \frac{\sqrt{3}}{8}.$$

$$\therefore EE' = t, \text{ 得 } S_{\text{矩形} EE'F'H'} = EE' \cdot EH = t.$$

$$\text{又 } S = S_{\text{矩形} EE'F'H'} - S_{\triangle BME} - S_{\triangle BNH},$$

$$\therefore S = t - \frac{\sqrt{3}}{4}, \text{ 其中 } t \text{ 的取值范围是 } \frac{\sqrt{3}}{2} < t \leq \sqrt{3}.$$

$$(II) \frac{\sqrt{3}}{16} \leq S \leq \sqrt{3}.$$

① 当  $\frac{2\sqrt{3}}{3} \leq t \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$  时, 在此平移过程中, 重叠部分的面积  $S$  逐渐增大, 当矩形  $E'F'G'H'$  完全在菱形  $ABCD$  中时,  $S$  取得最大值, 此时  $t = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ ,  $S_{\max} = \sqrt{3}$ ;

② 当  $\frac{3\sqrt{3}}{2} < t \leq \frac{11\sqrt{3}}{4}$  时, 在此平移过程中, 重叠部分的面积  $S$  逐渐减小, 即当  $t = \frac{11\sqrt{3}}{4}$  时,  $S$  取得最小值.

设边  $G'F'$  与  $CD$ ,  $AD$  的交点分别为点  $P$ ,  $Q$ ,

过点  $D$  作  $DK \perp PQ$  于点  $K$ , 此时  $S_{\min} = S_{\triangle PDQ}$ .

$$\text{则 } EE' = \frac{11\sqrt{3}}{4}, \angle DPK = \angle ABO = 60^\circ.$$

$$\text{则 } DK = 2\sqrt{3} - (\frac{11\sqrt{3}}{4} - \sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}}{4}, PK = \frac{DK}{\tan 60^\circ} = \frac{1}{4}, PQ =$$

$$2PK = \frac{1}{2},$$

$$\therefore S_{\min} = S_{\triangle PDQ} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{16}.$$

综上, 当  $\frac{2\sqrt{3}}{3} \leq t \leq \frac{11\sqrt{3}}{4}$  时,  $S$  的取值范围是  $\frac{\sqrt{3}}{16} \leq S \leq \sqrt{3}$ .

25. 解: (I) (i) 由  $b = -2$ ,  $c = 3$ ,

得抛物线的解析式为  $y = -x^2 - 2x + 3$ .

$$\therefore y = -x^2 - 2x + 3 = -(x+1)^2 + 4,$$

$\therefore$  点  $P$  的坐标为  $(-1, 4)$ .

当  $y = 0$  时,  $-x^2 - 2x + 3 = 0$ . 解得  $x_1 = -3$ ,  $x_2 = 1$ .

又点  $A$  在点  $B$  的左侧,

$\therefore$  点  $A$  的坐标为  $(-3, 0)$ .

(II) 过点  $M$  作  $ME \perp x$  轴于点  $E$ , 与直线  $AC$  相交于点  $F$ .

$\therefore$  点  $A(-3, 0)$ , 点  $C(0, 3)$ ,

$\therefore OA = OC$ . 可得  $\text{Rt}\triangle AOC$  中,  $\angle OAC = 45^\circ$ .

$\therefore \text{Rt}\triangle AEF$  中,  $EF = AE$ .

$\therefore$  抛物线  $y = -x^2 - 2x + 3$  上的点  $M$  的横坐标为  $m$ ,

其中  $-3 < m < -1$ ,

$$\therefore \text{点 } M(m, -m^2 - 2m + 3), \text{ 点 } E(m, 0).$$

得  $EF=AE=m-(-3)=m+3$ , 即点  $F(m, m+3)$ .

$$\therefore FM=(-m^2-2m+3)-(m+3)=-m^2-3m,$$

$\text{Rt}\triangle FMN$  中, 可得  $\angle MFN=45^\circ$ .

$$\therefore FM=\sqrt{2}MN. \text{ 又 } MN=\sqrt{2},$$

得  $FM=2$ . 即  $-m^2-3m=2$ . 解得  $m_1=-2, m_2=-1$  (舍).

$\therefore$  点  $M$  的坐标为  $(-2, 3)$ .

(II)  $\because$  点  $A(-c, 0)$  在抛物线  $y=-x^2+bx+c$  上,

其中  $c>1$ ,

$$\therefore -c^2-bc+c=0. \text{ 得 } b=1-c.$$

$\therefore$  抛物线的解析式为  $y=-x^2+(1-c)x+c$ .

得点  $M(m, -m^2+(1-c)m+c)$ , 其中  $-c<m<\frac{1-c}{2}$ .

$$\because y=-x^2+(1-c)x+c=-(x-\frac{1-c}{2})^2+\frac{(1+c)^2}{4},$$

$\therefore$  顶点  $P$  的坐标为  $(\frac{1-c}{2}, \frac{(1+c)^2}{4})$ ,

对称轴为直线  $l: x=\frac{1-c}{2}$ .

过点  $M$  作  $MQ\perp l$  于点  $Q$ , 则  $\angle MQP=90^\circ$ ,

点  $Q(\frac{1-c}{2}, -m^2+(1-c)m+c)$ .

由  $MP\parallel AC$ , 得  $\angle PMQ=45^\circ$ . 于是  $MQ=QP$ .

$$\therefore \frac{1-c}{2}-m=\frac{(1+c)^2}{4}-[-m^2+(1-c)m+c].$$

即  $(c+2m)^2=1$ . 解得  $c_1=-2m-1, c_2=-2m+1$  (舍).

同(I), 过点  $M$  作  $ME\perp x$  轴于点  $E$ , 与直线  $AC$  相交于点  $F$ ,

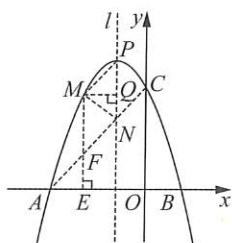
则点  $E(m, 0)$ , 点  $F(m, -m-1)$ , 点  $M(m, m^2-1)$ .

$$\because AN+3MN=AF+FN+3MN=\sqrt{2}EF+2\sqrt{2}FM=9\sqrt{2},$$

$$\therefore \sqrt{2}(-m-1)+2\sqrt{2}(m^2-1+m+1)=9\sqrt{2}.$$

即  $2m^2+m-10=0$ . 解得  $m_1=-\frac{5}{2}, m_2=2$  (舍).

$\therefore$  点  $M$  的坐标为  $(-\frac{5}{2}, \frac{21}{4})$ .



#### ④ 2024 年天津市初中学业水平考试

1. D 2. B 3. C 4. C 5. C 6. A 7. A 8. B 9. A 10. B

11. D 对于 A, 由旋转可知,  $\angle ACD=60^\circ$ ,

而  $\angle ACB$  不一定为  $60^\circ$ , 即  $\angle ACB=\angle ACD$  不一定正确;

对于 B, 由已知,  $\angle CDE$  不一定为  $120^\circ$ ,

$\therefore \angle CDE+\angle ACD=180^\circ$  不一定成立, 即  $AC\parallel DE$  不一定正确;

对于 C, 由旋转可知,  $AB=DE$ ,

而  $DE=EF$  不一定成立, 故  $AB=EF$  不一定正确;

对于 D, 由旋转可知,  $\angle BCE=60^\circ$ ,

设  $BF$  与  $CE$  交于点  $G$ , 又  $\angle B=30^\circ$ ,

$\therefore \angle BGC=180^\circ-\angle BCE-\angle B=90^\circ$ , 故  $BF\perp CE$  一定正确.

12. C 对于①:

$$\text{令 } h=0, \text{ 即 } 30t-5t^2=0,$$

$$\text{解得 } t_1=0, t_2=6,$$

$\therefore$  小球从抛出到落地需要 6 s, 故①正确;

对于②:

$$\because h=30t-5t^2=-5(t-3)^2+45,$$

$\therefore$  小球运动的最大高度为 45 m,

$\therefore$  小球运动中的高度可以是 30 m, 故②正确;

对于③:

$$\text{当 } t=2 \text{ 时, } h=30\times 2-5\times 2^2=40;$$

$$\text{当 } t=5 \text{ 时, } h=30\times 5-5\times 5^2=25,$$

$\therefore$  小球运动 2 s 时的高度大于运动 5 s 时的高度, 故③错误.

13.  $\frac{3}{10}$  14.  $x^2$  15. 10 16. 1 (答案不唯一, 满足  $k>0$  即可)

17. (I) 2 (II)  $\frac{\sqrt{10}}{2}$

(I)  $\because$  正方形  $ABCD$  的边长为  $3\sqrt{2}$ ,

$$\therefore AC=\sqrt{(3\sqrt{2})^2+(3\sqrt{2})^2}=6, OA=OC=3.$$

又  $OE=5, \therefore AE=2$ ;

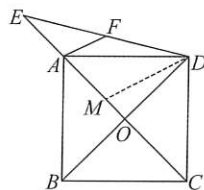
(II) 如图, 在  $OA$  上取点  $M$ , 使  $AM=AE=2$ , 连接  $DM$ ,

$\because F$  为  $DE$  的中点,  $\therefore AF=\frac{1}{2}DM$ .

$$\because OM=OA-AM=1, OD=3,$$

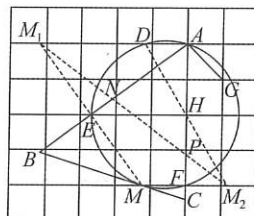
$$\therefore \text{在 } \text{Rt}\triangle DMO \text{ 中, } DM=\sqrt{OD^2+OM^2}=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10},$$

$$\therefore AF=\frac{\sqrt{10}}{2}.$$



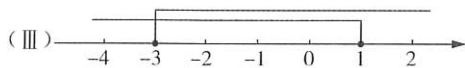
18. (I)  $\sqrt{2}$ ;

(II) 如图, 根据题意, 切点为  $M$ ; 连接  $ME$  并延长, 与网格线相交于点  $M_1$ ; 取圆与网格线的交点  $D$  和格点  $H$ , 连接  $DH$  并延长, 与网格线相交于点  $M_2$ ; 连接  $M_1M_2$ , 分别与  $AB, AC$  相交于点  $N, P$ , 则点  $M, N, P$  即为所求.



19. 解: (I)  $x \leq 1$ ;

(II)  $x \geq -3$ ;



(IV)  $-3 \leq x \leq 1$ .

20. 解: (I) 50 34 8 8.

(II) 观察条形统计图,

$$\therefore \bar{x} = \frac{6 \times 3 + 7 \times 7 + 8 \times 17 + 9 \times 15 + 10 \times 8}{3 + 7 + 17 + 15 + 8} = 8.36,$$

$\therefore$  这组数据的平均数是 8.36.

(III)  $\because$  在所抽取的样本中, 每周参加科学教育的时间是 9 h 的学生占 30%,

$\therefore$  根据样本数据, 估计该校八年级学生 500 人中, 每周参加科学教育的时间是 9 h 的学生占 30%, 有  $500 \times 30\% = 150$ .

$\therefore$  估计该校八年级学生每周参加科学教育的时间是 9 h 的人数约为 150.

21. 解: (I)  $\because AB$  为  $\odot O$  的弦,

$\therefore OA = OB$ . 得  $\angle A = \angle ABO$ .

$\because \triangle AOB$  中,  $\angle A + \angle ABO + \angle AOB = 180^\circ$ ,

又  $\angle ABO = 30^\circ$ ,

$\therefore \angle AOB = 180^\circ - 2\angle ABO = 120^\circ$ .

$\because$  直线  $MN$  与  $\odot O$  相切于点  $C$ ,  $CE$  为  $\odot O$  的直径,

$\therefore CE \perp MN$ . 即  $\angle ECM = 90^\circ$ . 又  $AB \parallel MN$ ,

$\therefore \angle CDB = \angle ECM = 90^\circ$ .

在  $\text{Rt}\triangle ODB$  中,  $\angle BOE = 90^\circ - \angle ABO = 60^\circ$ .

$\therefore \angle BCE = \frac{1}{2} \angle BOE$ ,

$\therefore \angle BCE = 30^\circ$ .

(II) 如图, 连接  $OC$ .

同 (I), 得  $\angle COB = 90^\circ$ .

$\because CG \perp AB$ , 得  $\angle FGB = 90^\circ$ .

$\therefore$  在  $\text{Rt}\triangle FGB$  中, 由  $\angle ABO = 30^\circ$ ,

得  $\angle BFG = 90^\circ - \angle ABO = 60^\circ$ .

$\therefore \angle CFO = \angle BFG = 60^\circ$ .

在  $\text{Rt}\triangle COF$  中,  $\tan \angle CFO = \frac{OC}{OF}$ ,  $OC = OA = 3$ ,

$$\therefore OF = \frac{OC}{\tan \angle CFO} = \frac{3}{\tan 60^\circ} = \sqrt{3}.$$

22. 解: (I) 设  $CD = x$ , 由  $DE = 36$ , 得  $CE = CD + DE = x + 36$ .

$\because EC \perp AB$ , 垂足为  $C$ ,

$\therefore \angle BCE = \angle ACD = 90^\circ$ .

在  $\text{Rt}\triangle BCD$  中,  $\tan \angle CDB = \frac{BC}{CD}$ ,  $\angle CDB = 45^\circ$ ,

$\therefore BC = CD \cdot \tan \angle CDB = x \cdot \tan 45^\circ = x$ .

在  $\text{Rt}\triangle BCE$  中,  $\tan \angle CEB = \frac{BC}{CE}$ ,  $\angle CEB = 31^\circ$ ,

$\therefore BC = CE \cdot \tan \angle CEB = (x + 36) \cdot \tan 31^\circ$ .

$\therefore x = (x + 36) \cdot \tan 31^\circ$ . 得  $x = \frac{36 \times \tan 31^\circ}{1 - \tan 31^\circ} \approx \frac{36 \times 0.6}{1 - 0.6} = 54$ .

答: 线段  $CD$  的长约为 54 m.

(II) 在  $\text{Rt}\triangle ACD$  中,  $\tan \angle CDA = \frac{AC}{CD}$ ,  $\angle CDA = 6^\circ$ ,

$\therefore AC = CD \cdot \tan \angle CDA \approx 54 \times \tan 6^\circ \approx 54 \times 0.1 = 5.4$ .

$\therefore AB = AC + BC \approx 5.4 + 54 \approx 59$  (m).

答: 桥塔  $AB$  的高度约为 59 m.

23. 解: (I) (i) 0.15 0.6 1.5;

(ii) 0.075;

(iii) 当  $0 \leq x \leq 4$  时,  $y = 0.15x$ ;

当  $4 < x \leq 19$  时,  $y = 0.6$ ;

当  $19 < x \leq 25$  时,  $y = 0.15x - 2.25$ .

(II) 1.05 km.

24. 解: (I)  $(1, \sqrt{3})$   $(4, \sqrt{3})$ .

(II) (i) 由折叠知,  $\angle OO'C' = \angle AOC = 60^\circ$ ,  $O'P = OP = t$ , 则  $OO' = 2t$ .

$\because$  点  $A(3, 0)$ , 得  $OA = 3$ .

$\therefore AO' = OO' - OA = 2t - 3$ .

$\because$  四边形  $OABC$  为平行四边形,

$\therefore AB = OC = 2$ ,  $AB \parallel OC$ . 得  $\angle O'AB = \angle AOC = 60^\circ$ .

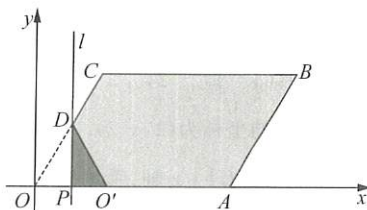
$\therefore \triangle AO'E$  为等边三角形. 有  $AE = AO' = 2t - 3$ .

$\because BE = AB - AE$ , 即  $BE = 2 - (2t - 3) = 5 - 2t$ ,

$\therefore BE = -2t + 5$ , 其中  $t$  的取值范围是  $\frac{3}{2} < t < \frac{5}{2}$ .

$$(ii) \frac{2\sqrt{3}}{9} \leq S \leq \frac{5\sqrt{3}}{4}.$$

① 当  $\frac{2}{3} \leq t \leq 1$  时, 重叠部分为三角形, 如图,



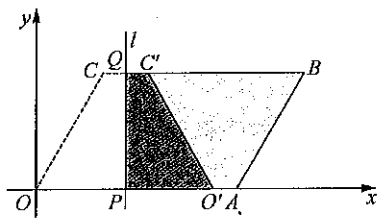
由  $\angle OO'D = \angle AOC = 60^\circ$ ,  $O'P = OP = t$ ,

得  $DP = \sqrt{3}O'P = \sqrt{3}t$ ,

$$\therefore S = \frac{1}{2} \times t \times \sqrt{3}t = \frac{\sqrt{3}}{2}t^2,$$

$$\therefore \frac{2\sqrt{3}}{9} \leq S \leq \frac{\sqrt{3}}{2};$$

②当  $1 < t \leq \frac{3}{2}$  时, 重叠部分为梯形, 如图,



由点  $C(1, \sqrt{3})$ , 得  $C'Q = CQ = t - 1$ ,  $PQ = \sqrt{3}$ ,

$$\therefore S = \frac{1}{2}(t-1+t) \times \sqrt{3} = \sqrt{3}t - \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\therefore \frac{\sqrt{3}}{2} < S \leq \sqrt{3},$$

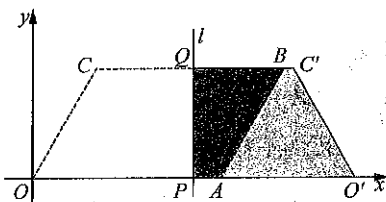
③当  $\frac{3}{2} < t < \frac{5}{2}$  时, 由(1)知, 重叠部分为五边形,

$$\therefore S = S_{\text{梯形}QC'O'P} - S_{\triangle AO'E} = \sqrt{3}t - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}(2t-3)^2 = -\sqrt{3}t^2 +$$

$$4\sqrt{3}t - \frac{11\sqrt{3}}{4} = -\sqrt{3}(t-2)^2 + \frac{5\sqrt{3}}{4},$$

$$\therefore \sqrt{3} < S \leq \frac{5\sqrt{3}}{4},$$

④当  $\frac{5}{2} \leq t \leq \frac{11}{4}$  时, 重叠部分为梯形, 如图,



则  $AP = OA - OP = 3 - t$ ,  $BQ = BC - CQ = 3 - (t-1) = 4 - t$ ,

$$\therefore S = \frac{1}{2}(4-t+3-t) \times \sqrt{3} = -\sqrt{3}t + \frac{7\sqrt{3}}{2},$$

$$\therefore \frac{3\sqrt{3}}{4} \leq S \leq \sqrt{3}.$$

综上所述, 当  $\frac{2}{3} \leq t \leq \frac{11}{4}$  时,  $\frac{2\sqrt{3}}{9} \leq S \leq \frac{5\sqrt{3}}{4}$ .

25. 解: (I)  $\because 2a + b = 0, a = 1$ , 得  $b = -2a = -2$ . 又  $c = -1$ ,

$\therefore$  该抛物线的解析式为  $y = x^2 - 2x - 1$ .

$$\because y = x^2 - 2x - 1 = (x-1)^2 - 2,$$

$\therefore$  该抛物线顶点  $P$  的坐标为  $(1, -2)$ .

(II) 过点  $M(m, 1)$  作  $MH \perp x$  轴, 垂足为  $H, m > 1$ ,

则  $\angle MHO = 90^\circ, HM = 1, OH = m$ .

在  $\text{Rt}\triangle MOH$  中, 由  $HM^2 + OH^2 = OM^2, OM = \frac{\sqrt{13}}{2}$ ,

$$\therefore 1 + m^2 = \left(\frac{\sqrt{13}}{2}\right)^2. \text{ 解得 } m_1 = \frac{3}{2}, m_2 = -\frac{3}{2} \text{ (舍)}.$$

$\therefore$  点  $M$  的坐标为  $(\frac{3}{2}, 1)$ .

$$\because 2a + b = 0, \text{ 即 } -\frac{b}{2a} = 1.$$

$\therefore$  抛物线  $y = ax^2 - 2ax + c$  的对称轴为  $x = 1$ .

$\therefore$  对称轴与  $x$  轴相交于点  $D$ , 则  $OD = 1, \angle ODP = 90^\circ$ .

在  $\text{Rt}\triangle OPD$  中, 由  $OD^2 + PD^2 = OP^2, OP = \frac{\sqrt{13}}{2}$ ,

$$\therefore 1 + PD^2 = \left(\frac{\sqrt{13}}{2}\right)^2. \text{ 解得 } PD = \frac{3}{2}.$$

由  $a > 0$ , 得该抛物线顶点  $P$  的坐标为  $(1, -\frac{3}{2})$ .

$\therefore$  该抛物线的解析式为  $y = a(x-1)^2 - \frac{3}{2}$ .

$\because$  点  $M(\frac{3}{2}, 1)$  在该抛物线上, 有  $1 = a(\frac{3}{2} - 1)^2 - \frac{3}{2}$ .

$$\therefore a = 10.$$

(III) 过点  $M(m, 1)$  作  $MH \perp x$  轴, 垂足为  $H, m > 1$ ,

则  $\angle MHO = 90^\circ, HM = 1, OH = m$ .

$$\therefore DH = OH - OD = m - 1.$$

$\therefore$  在  $\text{Rt}\triangle DMH$  中,  $DM^2 = DH^2 + HM^2 = (m-1)^2 + 1$ .

过点  $N$  作  $NK \perp x$  轴, 垂足为  $K$ , 则  $\angle DKN = 90^\circ$ .

$\because \angle MDN = 90^\circ, DM = DN$ ,

又  $\angle DNK = 90^\circ - \angle NDK = \angle MDH$ ,

$\therefore \triangle NDK \cong \triangle DMH$  (AAS). 得点  $N$  的坐标为  $(2, 1-m)$ .

在  $\text{Rt}\triangle DMN$  中,  $\angle DMN = \angle DNM = 45^\circ$ ,

$$\therefore MN^2 = DM^2 + DN^2 = 2DM^2, \text{ 即 } MN = \sqrt{2}DM.$$

根据题意,  $NE + NF = \sqrt{2}DM$ , 得  $ME = NF$ .

在  $\triangle DMN$  的外部, 作  $\angle DNG = 45^\circ$ , 且  $NG = DM$ , 连接  $GF$ ,

得  $\angle MNG = \angle DNM + \angle DNG = 90^\circ$ .

$\therefore \triangle GNF \cong \triangle DME$  (SAS). 有  $GF = DE$ .

$$\therefore DE + MF = GF + MF \geq GM.$$

当满足条件的点  $F$  落在线段  $GM$  上时,  $DE + MF$  取得最小值, 即  $GM = \sqrt{15}$ .

在  $\text{Rt}\triangle GMN$  中,  $GM^2 = NG^2 + MN^2 = 3DM^2$ ,

$$\therefore (\sqrt{15})^2 = 3DM^2. \text{ 得 } DM^2 = 5.$$

$$\therefore (m-1)^2 + 1 = 5. \text{ 解得 } m_1 = 3, m_2 = -1 \text{ (舍)}.$$

$\therefore$  点  $M$  的坐标为  $(3, 1)$ , 点  $N$  的坐标为  $(2, -2)$ .

$\because$  点  $M(3, 1), N(2, -2)$  都在抛物线  $y = ax^2 - 2ax + c$  上,

$$\text{得 } 1 = 9a - 6a + c, -2 = 4a - 4a + c.$$

$$\therefore a = 1.$$

