

高考抢分卷 数学 参考答案

2024 年普通高等学校招生全国 统一考试(天津卷)抢分卷 数学(1-递增卷)

1. C 【解析】因为 $5-x>0$, 所以 $x<5$,

所以 $A=\{x \in \mathbb{N} | y=\lg(5-x)\}=\{0,1,2,3,4\}$.

所以 $B=\{y | y=|x-2|, x \in A\}=\{0,1,2\}$.

所以 $A \cap (\complement_{\mathbb{R}} B)=\{3,4\}$, 故选 C.

2. D 【解析】因为圆 $C: x^2+y^2-2x+2y-1=0$ 化为标准

方程为 $(x-1)^2+(y+1)^2=3$,

所以圆心 C 的坐标为 $(1, -1)$, 半径为 $\sqrt{3}$.

所以圆心 C 到直线 $l: x+y+c=0$ 的距离为 $\frac{|c|}{\sqrt{2}}$.

若直线 l 与圆 C 相交, 则 $\frac{|c|}{\sqrt{2}} < \sqrt{3}$,

解得 $c \in (-\sqrt{6}, \sqrt{6})$,

所以直线 l 与圆 C 相交的充分不必要条件为 $(-\sqrt{6},$

$\sqrt{6})$ 的真子集, 故选 D.

3. A 【解析】由已知, 当 $x_1, x_2 \in (-\infty, 0)$ 时,

$(x_1-x_2)[f(x_1)-f(x_2)] < 0$,

不妨设 $x_1 < x_2$, 则 $f(x_1) > f(x_2)$,

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减.

因为 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的偶函数,

所以 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

且 $a=f(-0.6^2)=f(0.6^2)$,

$b=f(\log_2 0.6)=f(-\log_2 \frac{5}{3})=f(\log_2 \frac{5}{3})$.

因为 $0 < 0.6^2 < \frac{1}{2}, 1 > \log_2 \frac{5}{3} > \log_2 \sqrt{2} = \frac{1}{2}, 2^{0.6} > 1$,

所以 $0.6^2 < \log_2 \frac{5}{3} < 2^{0.6}$.

所以 $f(0.6^2) < f(\log_2 \frac{5}{3}) < f(2^{0.6})$.

所以 $a < b < c$, 故选 A.

4. D 【解析】设 AD' 与 $A'C$ 所成的角为 θ ,

因为 $\overrightarrow{AD'} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{A'C} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AA'}$,

所以 $\overrightarrow{AD'} \cdot \overrightarrow{A'C} = (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}) \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AA'})$
 $= \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}^2 + \overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AA'}^2$.

又 $AB=1, AD=2, AA'=3, \angle BAD = \angle BAA' =$
 $\angle DAA' = 60^\circ$,

所以 $\overrightarrow{AD'} \cdot \overrightarrow{A'C} = 1 + 4 + \frac{3}{2} - 9 = -\frac{5}{2}$,

$|\overrightarrow{AD'}| = \sqrt{(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'})^2} = \sqrt{4 + 9 + 6} = \sqrt{19}$,

$|\overrightarrow{A'C}| = \sqrt{(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AA'})^2} = \sqrt{1 + 4 + 9 + 2 - 3 - 6}$
 $= \sqrt{7}$.

所以 $\cos \theta = |\cos \langle \overrightarrow{AD'}, \overrightarrow{A'C} \rangle| = \frac{|\overrightarrow{AD'} \cdot \overrightarrow{A'C}|}{|\overrightarrow{AD'}| |\overrightarrow{A'C}|} =$

$\frac{\frac{5}{2}}{\sqrt{19} \times \sqrt{7}} = \frac{5\sqrt{133}}{266}$, 故选 D.

5. B 【解析】 $f(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2\omega x - (\frac{\sqrt{2}}{2} \sin \omega x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \omega x)$.

$(\frac{\sqrt{2}}{2} \sin \omega x - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \omega x)$

$= \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2\omega x - \frac{1}{2} \sin^2 \omega x + \frac{1}{2} \cos^2 \omega x$

$= \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2\omega x + \frac{1}{2} \cos 2\omega x$

$= \sin(2\omega x + \frac{\pi}{6})$.

当 $x \in (-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3})$ 时,

令 $t = 2\omega x + \frac{\pi}{6} \in (-\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{6})$,

所以 $y = \sin t$ 在 $(-\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{6})$ 内无极值.

所以 $-\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} + 2k\pi < 2\omega x + \frac{\pi}{6} < \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{6} + 2k\pi$

$(k \in \mathbb{Z})$, 所以 $\begin{cases} -\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \geq -\frac{\pi}{2} + k\pi, \\ \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega \leq 2 - 3k, \\ \omega \leq \frac{1}{2} + \frac{3k}{2}. \end{cases}$

因为 $\omega > 0$, 所以 $\begin{cases} 2 - 3k > 0, \\ \frac{1}{2} + \frac{3k}{2} > 0 \end{cases} \Rightarrow -\frac{1}{3} < k < \frac{2}{3}$.

因为 $k \in \mathbb{Z}$, 所以 $k=0$, 则 $0 < \omega \leq \frac{1}{2}$.

所以实数 ω 的最大值为 $\frac{1}{2}$, 故选 B.

6. C 【解析】因为 $\chi^2 > x_{0.010}$, 所以根据小概率值 $\alpha =$
 0.010 的独立性检验, 认为“该种药物有预防疾病的效果”, 故①正确;

因为 $\chi^2 > x_{0.005}$, 所以根据小概率值 $\alpha = 0.005$ 的独立性

检验, 认为“该种药物有预防疾病的效果”, 故②正确,

③错误;

因为 $\chi^2 < x_{0.001}$, 所以根据小概率值 $\alpha = 0.001$ 的独立性
检验, 认为“该种药物没有预防疾病的效果”, 故④
正确.

所以正确的判断共 3 个, 故选 C.

7. C 【解析】由图可知, 函数 $f(x)$ 为偶函数,

因此排除选项 B 和 D, 因为它们都是奇函数.

因为在选项 C 中, 当 $x \rightarrow 0^+$ 时, $f(x) > 0$, 符合题中所给
图象.

而在选项 A 中, 当 $x \rightarrow 0^+$ 时, $f(x) < 0$, 不符合题意.

故选 C.

8. A 【解析】设 P 在 x 轴上的射影为 H , 双曲线的半焦
距为 c ,

因为 $|PQ| = 2|QF_1|$,

所以 $|OH| = 2|OF_1| = 2|OF_2|$.

所以 $|F_2H| = \frac{1}{2}|OH| = \frac{1}{2}|F_1F_2|$.

因为 $\triangle PF_1F_2$ 为等腰三角形,

所以 $|F_1F_2| = |PF_2|$.

所以 $|F_2H| = \frac{1}{2}|PF_2|$.

所以 $\angle PF_2H = 60^\circ$.

所以 $|PF_1| = \sqrt{3}|PF_2| = \sqrt{3}|F_1F_2| = 2\sqrt{3}c$.

所以 $2a = |PF_1| - |PF_2| = (2\sqrt{3} - 2)c$.

所以双曲线的离心率为 $\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$, 故选 A.

9. D 【解析】因为 $|FP_n| \cos \theta_n + \frac{p}{2} + \frac{p}{2} = |FP_n|$,

$$\text{所以 } r_n = |FP_n| = \frac{p}{1 - \cos \theta_n} = \frac{3}{1 - \cos \theta_n}.$$

$$\text{所以 } \frac{n}{r_n} = \frac{n - n \cos \theta_n}{3}.$$

$$\text{因为 } \theta_n = \frac{\pi}{3} + (n-1) \times \frac{2\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}n - \frac{\pi}{3},$$

$$\text{所以 } \frac{n}{r_n} = \frac{n - n \cos \frac{(2n-1)\pi}{3}}{3}.$$

$$\text{所以 } \frac{3k-2}{r_{3k-2}} + \frac{3k-1}{r_{3k-1}} + \frac{3k}{r_{3k}} = \frac{(3k-2) - (3k-2) \cdot \frac{1}{2}}{3} +$$

$$\frac{(3k-1) - (3k-1) \cdot (-1)}{3} + \frac{3k - 3k \cdot \frac{1}{2}}{3} = 3k-1.$$

$$\text{所以 } \sum_{k=1}^{40} \frac{k}{r_k} = \frac{(3 \times 1 - 1 + 3 \times 40 - 1) \times 40}{2} = 2420, \text{ 故}$$

选 D.

10. $\frac{\sqrt{10}}{2}$ 【解析】因为 $z = \frac{1+2i}{1+i} = \frac{(1+2i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{3}{2} +$

$$\frac{1}{2}i, \text{ 所以 } |z| = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{10}}{2}.$$

11. 60 【解析】 $(\sqrt{x} - \frac{2}{x})^5$ 的展开式的通项为 $T_{k+1} =$

$$C_5^k (\sqrt{x})^{5-k} \left(-\frac{2}{x}\right)^k = (-2)^k C_5^k x^{5-\frac{k}{2}-k} =$$

$$\text{令 } 5 - \frac{3k}{2} = 0, \text{ 得 } k=2,$$

$$\text{所以展开式中的常数项为 } (-2)^2 C_5^2 = 60.$$

12. $2+\sqrt{3}$ 【解析】因为 $m+2n=2$,

$$\text{所以 } \frac{1}{mn} + \frac{1}{n} = \frac{1+m}{mn} = \frac{4+4m}{4mn} = \frac{(m+2n)^2 + 2m(m+2n)}{4mn}$$

$$= \frac{3m^2 + 8mn + 4n^2}{4mn} \geq \frac{4\sqrt{3}mn + 8mn}{4mn} = 2 + \sqrt{3},$$

当且仅当 $m=\sqrt{3}-1, n=\frac{3-\sqrt{3}}{2}$ 时, 等号成立.

所以 $\frac{1}{mn} + \frac{1}{n}$ 的最小值为 $2+\sqrt{3}$.

13. 0.052 5, $\frac{2}{7}$ 【解析】设 $B =$ “任意采访一位学生为艺

术特长生”,

$A_i =$ “该学生来自第 i 所中学” ($i=1, 2, 3$),

则 $\Omega = A_1 \cup A_2 \cup A_3$, 且 A_1, A_2, A_3 两两互斥.

根据题意, 得 $P(A_1) = 0.25, P(A_2) = 0.3, P(A_3) =$

$$0.45,$$

$$P(B|A_1) = 0.06, P(B|A_2) = P(B|A_3) = 0.05.$$

由全概率公式, 得

$$P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + P(A_3)P(B|A_3)$$

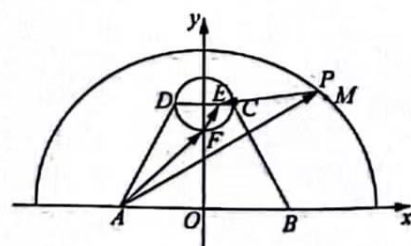
$$= 0.25 \times 0.06 + 0.3 \times 0.05 + 0.45 \times 0.05 = 0.0525,$$

$$P(A_1|B) = \frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(B)} = \frac{0.25 \times 0.06}{0.0525} = \frac{2}{7}.$$

14. $1-2\sqrt{5}$ 【解析】如图, 以 O 为原点, $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{OF}$ 的方向

分别为 x 轴、 y 轴的正方向, 建立平面直角坐标系, 则

$$A(-3, 0), F(0, 3),$$



$$\text{设 } P(x_0, y_0), \text{ 则 } x_0^2 + y_0^2 = 36.$$

$$\text{因为 } \overrightarrow{AF} = (3, 3), \overrightarrow{AP} = (x_0 + 3, y_0),$$

$$\text{则 } \overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{AP} = 3(x_0 + 3) + 3y_0 = 21 + 6\sqrt{5},$$

$$\text{则 } x_0 + y_0 = 4 + 2\sqrt{5}, \text{ 与 } x_0^2 + y_0^2 = 36 \text{ 联立,}$$

因为点 P 在点 M 的左侧, 所以解得 $x_0 = 4, y_0 = 2\sqrt{5}$,

$$\text{所以 } P(4, 2\sqrt{5}).$$

$$\text{设 } E(t, 4), t \in [-1, 1],$$

$$\text{因为 } \overrightarrow{FE} = (t, 1), \overrightarrow{PE} = (t-4, 4-2\sqrt{5}),$$

$$\text{所以 } \overrightarrow{FE} \cdot \overrightarrow{PE} = t(t-4) + 4 - 2\sqrt{5} = (t-2)^2 - 2\sqrt{5}.$$

$$\text{因为 } t \in [-1, 1],$$

$$\text{所以当 } t=1 \text{ 时, } \overrightarrow{FE} \cdot \overrightarrow{PE} \text{ 取得最小值为 } 1-2\sqrt{5}.$$

15. 13 【解析】因为 $f(x) = 2 - f(2-x)$,

所以曲线 $y = f(x)$ 关于 $(1, 1)$ 对称.

因为 $y = f(x) - 1$ 为 $\mathbb{R}$ 上的奇函数,

所以曲线 $y = f(x)$ 关于 $(0, 1)$ 对称,

$$\text{且 } f(x) - 1 = -f(-x) + 1.$$

所以 $f(-x) = f(2-x)$, 即 2 为 $y = f(x)$ 的一个

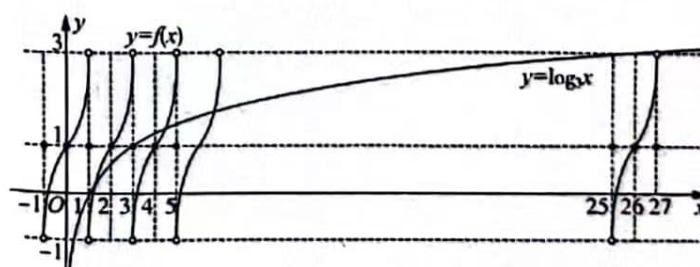
周期.

$$\text{因为 } f(1) = 2 - f(1), \text{ 所以 } f(1) = 1.$$

$$\text{因为当 } x \in (-1, 1) \text{ 时, } f(x) = x^3 + 2\sin \frac{\pi}{6}x + 1,$$

所以易知 $f(x)$ 在 $(-1, 1)$ 上单调递增.

所以 $y = f(x)$ 及 $y = \log_3 x$ 的大致图象如下:



由于两条曲线有 13 个不同的公共点, 所以方程 $f(x) =$

$\log_3 x$ 的实数解的个数为 13.

16. 解: (I) 因为 $2a \cos(\frac{\pi}{3} - B) = b + c$,

所以由正弦定理, 得

$$2 \sin A \left(\frac{1}{2} \cos B + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin B \right) = \sin B + \sin C.$$

$$\text{所以 } \sqrt{3} \sin A \sin B + \sin A \cos B = \sin B + \sin(A+B).$$

$$\text{所以 } \sqrt{3} \sin A \sin B = \sin B + \cos A \sin B.$$

$$\text{所以 } \sqrt{3} \sin A = 1 + \cos A, \text{ 所以 } 2 \sin(A - \frac{\pi}{6}) = 1.$$

$$\text{所以 } \sin(A - \frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}.$$

$$\text{因为 } A - \frac{\pi}{6} \in (-\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}),$$

$$\text{所以 } A - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}, \text{ 所以 } A = \frac{\pi}{3}.$$

(II) 设 BC 边上的中点为 M , 则 $2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$,

$$\text{所以 } 4|\overrightarrow{AM}|^2 = |\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{AC}|^2 + 2|\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}| \cos \frac{\pi}{3}.$$

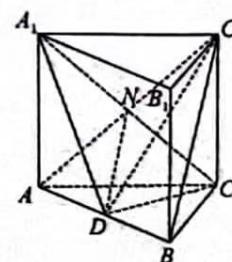
$$\text{所以 } 13 = 9 + b^2 + 6b \cdot \frac{1}{2}, \text{ 解得 } b = 1 \text{ (负值舍去).}$$

$$\text{所以 } a^2 = c^2 + b^2 - 2cb \cos A = 9 + 1 - 2 \times 3 \times 1 \times \frac{1}{2} =$$

$$7, a = \sqrt{7}.$$

$$\text{所以 } \triangle ABC \text{ 的周长为 } 4 + \sqrt{7}.$$

17. (I) 证明: 如图, 连接 AC_1 交 A_1C 于点 N , 连接 ND ,



因为四边形 A_1ACC_1 为平行四边形,

所以 $AN=NC_1$.

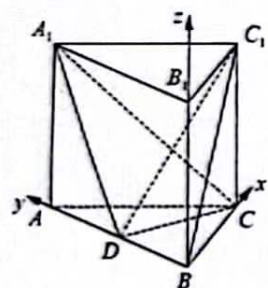
又 $AD=DB$,

所以 $ND \parallel BC_1$.

因为 $ND \subset$ 平面 A_1CD , $BC_1 \not\subset$ 平面 A_1CD ,

所以 $BC_1 \parallel$ 平面 A_1CD .

(II)解:以 B 为原点,分别以 $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BB_1}$ 的方向为 x 轴、 y 轴、 z 轴的正方向,建立如图所示的空间直角坐标系,



则 $A_1(0, 2, 2)$, $C_1(2, 0, 2)$, $D(0, 1, 0)$, $C(2, 0, 2)$,

则 $\overrightarrow{DC} = (2, -1, 0)$, $\overrightarrow{DA_1} = (0, 1, 2)$, $\overrightarrow{CC_1} = (0, 0, 2)$.

设 $n_1 = (x, y, z)$ 为平面 A_1CD 的法向量,

$$\begin{cases} n_1 \cdot \overrightarrow{DC} = 0, \\ n_1 \cdot \overrightarrow{DA_1} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - y = 0, \\ y + 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{y}{2}, \\ z = -\frac{y}{2}. \end{cases}$$

取 $y=2$, 则 $x=1, z=-1$.

所以 $n_1 = (1, 2, -1)$.

设 $n_2 = (x, y, z)$ 为平面 C_1DC 的法向量,

$$\begin{cases} n_2 \cdot \overrightarrow{DC} = 0, \\ n_2 \cdot \overrightarrow{CC_1} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - y = 0, \\ 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2x, \\ z = 0. \end{cases}$$

取 $x=1$, 则 $y=2$. 所以 $n_2 = (1, 2, 0)$,

$$\text{则 } \cos \langle n_1, n_2 \rangle = \frac{n_1 \cdot n_2}{|n_1| |n_2|} = \frac{1+4}{\sqrt{6} \times \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{30}}{6},$$

所以平面 A_1CD 与平面 C_1DC 夹角的余弦值为 $\frac{\sqrt{30}}{6}$.

(III)解:因为在 $Rt\triangle BCD$ 中, $BD=1, BC=2$,

所以由勾股定理得 $CD=\sqrt{5}$.

$$\text{所以 } S_{\triangle C_1DC} = \frac{1}{2} \times \sqrt{5} \times 2 = \sqrt{5}.$$

因为 $\overrightarrow{DA_1} = (0, 1, 2)$, $n_2 = (1, 2, 0)$ 为平面 C_1DC 的一个法向量,

所以点 A_1 到平面 C_1DC 的距离为 $\frac{|\overrightarrow{DA_1} \cdot n_2|}{|n_2|} =$

$$\frac{|0+2+0|}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

$$\text{所以 } V_{\text{三棱锥 } C_1-A_1DC} = V_{\text{三棱锥 } A_1-C_1DC} = \frac{1}{3} \times \sqrt{5} \times \frac{2\sqrt{5}}{5} = \frac{2}{3}.$$

18. 解:(I)由已知, $2c=2\sqrt{5}$, 所以 $c=\sqrt{5}$.

设 $M(x_0, y_0)$, 则 $b^2 x_0^2 + a^2 y_0^2 = a^2 b^2$.

因为直线 MA_1 与 MA_2 的斜率之积为 $-\frac{4}{9}$,

$$\text{且 } A_1(-a, 0), A_2(a, 0), \text{ 所以 } \frac{y_0}{x_0+a} \cdot \frac{y_0}{x_0-a} = -\frac{4}{9},$$

$$\text{所以 } \frac{y_0^2}{x_0^2 - a^2} = -\frac{4}{9}.$$

$$\text{所以 } \frac{a^2 y_0^2}{a^2 (x_0^2 - a^2)} = -\frac{4}{9}, \text{ 所以 } \frac{b^2 (a^2 - x_0^2)}{a^2 (x_0^2 - a^2)} = -\frac{4}{9},$$

$$\text{所以 } \frac{b^2}{a^2} = \frac{4}{9}.$$

因为 $a^2 - b^2 = 5$, 所以解得 $a=3, b=2$.

所以椭圆 E 的标准方程为 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$.

(II)易知直线 l 的斜率一定存在, 设直线 l 的方程为

$$y = k(x-3).$$

将 $y = k(x-3)$ 与 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ 联立,

整理, 得 $(9k^2+4)x^2 - 54k^2x + 81k^2 - 36 = 0$.

由根与系数的关系, 得 $x_A \cdot x_P = \frac{81k^2 - 36}{9k^2 + 4}$.

$$\text{因为 } x_A = 3, \text{ 所以 } x_P = \frac{27k^2 - 12}{9k^2 + 4}.$$

$$\text{所以 } y_P = k(x_P - 3) = -\frac{24k}{9k^2 + 4}.$$

$$\text{所以 } P\left(\frac{27k^2 - 12}{9k^2 + 4}, -\frac{24k}{9k^2 + 4}\right).$$

又 $B(0, 2)$,

$$\text{所以直线 } BP: \left(2 + \frac{24k}{9k^2 + 4}\right)(x-0) + \frac{27k^2 - 12}{9k^2 + 4}(y-2) = 0.$$

$$\text{令 } y=0, \text{ 得 } x = \frac{3(3k-2)}{3k+2}, \text{ 所以 } Q\left(\frac{3(3k-2)}{3k+2}, 0\right).$$

因为 $x_A + x_P = \frac{54k^2}{9k^2 + 4}$, N 为线段 A_2P 的中点,

$$\text{所以 } x_N = \frac{27k^2}{9k^2 + 4}.$$

$$\text{所以 } y_N = k(x_N - 3) = -\frac{12k}{9k^2 + 4}.$$

$$\text{所以 } N\left(\frac{27k^2}{9k^2 + 4}, -\frac{12k}{9k^2 + 4}\right).$$

因为 $NQ \perp A_2P$, 所以 $k_{NQ} \cdot k_{A_2P} = -1$.

$$\text{所以 } \frac{\frac{12k}{9k^2 + 4}}{\frac{3(3k-2)}{3k+2} - \frac{27k^2}{9k^2 + 4}} \cdot k = -1.$$

整理, 得 $3k^3 - 7k^2 + 3k - 2 = 0$,

所以 $(k-2)(3k^2 - k + 1) = 0$, 解得 $k=2$.

所以直线 l 的方程为 $y=2x-6$.

19. (I)解: 设数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d .

因为 $b_1 + b_2 = S_3$, 所以 $b_1 + b_2 = 3a_2$.

因为数列 $\{b_n\}$ 的公比为 2,

所以 $b_1 + 2b_1 = 3a_2$, 所以 $b_1 = a_2$.

所以 $b_1 = 1 + d$. ①

因为 $a_1 + b_3 = a_1^2$, 所以 $1 + 4b_1 = (1 + 2d)^2$.

所以 $b_1 = d + d^2$. ②

联立①、②, 得 $d^2 = 1$.

因为 $d > 0$, 所以 $d=1$, 所以 $b_1=2$.

所以 $a_n = 1 + (n-1) \times 1 = n$, $b_n = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$.

所以数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 的通项公式分别为 $a_n = n$, $b_n = 2^n$.

(II)证明: 由(I), $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$.

$$\text{①当 } n \text{ 为奇数时, } c_n = \frac{4(2n+3)}{n(n+1)(n+2)(n+3)} =$$

$$2\left[\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+2)(n+3)}\right],$$

$$\text{所以 } c_1 + c_3 + \dots + c_{2n-1} = 2\left[\frac{1}{1 \times 2} - \frac{1}{3 \times 4} + \frac{1}{3 \times 4} -$$

$$\frac{1}{5 \times 6} + \dots + \frac{1}{(2n-1)2n} - \frac{1}{(2n+1)(2n+2)}\right]$$

$$= 2\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{(2n+1)(2n+2)}\right] < 2 \times \frac{1}{2} = 1.$$

$$\text{②当 } n \text{ 为偶数时, } c_n = \frac{n}{2^n + 1} < \frac{n}{2^n},$$

$$\text{设 } R = 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 + 6 \times \left(\frac{1}{2}\right)^6 + \dots + 2n \cdot$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}, \text{ ③}$$

$$\text{则 } \frac{1}{4}R = 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 + 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^6 + \dots + (2n-2) \cdot$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{2n} + 2n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+2}, \textcircled{4}$$

③-④,得

$$\frac{3}{4}R = \frac{1}{2} + 2 \times \left[\left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^6 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} \right] - 2n \cdot$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+2} = \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{16} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{4}} - 2n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+2}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{6} - \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} - 2n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+2} < \frac{1}{2} + \frac{1}{6}$$

$$= \frac{2}{3},$$

$$\text{所以 } R < \frac{2}{3} \times \frac{4}{3} = \frac{8}{9}.$$

$$\text{所以 } \sum_{i=1}^n c_i < 1 + \frac{8}{9} = \frac{17}{9}.$$

$$\text{(III)解:由(I), } d_n = \begin{cases} 2^n, n=3k-2, \\ 2^{n+1}, n=3k-1, \\ n, n=3k, \end{cases}$$

$$\text{所以 } d_{3k-2}d_{3k-1} + d_{3k-1}d_{3k} + d_{3k}d_{3k+1}$$

$$= 2^{3k-2} \cdot 2^{3k} + 2^{3k} \cdot 3k + 3k \cdot 2^{3k+1}$$

$$= 2^{6k-2} + 3k(2^{3k} + 2^{3k+1})$$

$$= 4^{3k-1} + 9k \cdot 8^k.$$

$$\text{所以 } \sum_{i=1}^n d_i d_{i+1} = \sum_{i=1}^n 4^{3i-1} + 9 \sum_{i=1}^n k \cdot 8^k.$$

$$\text{设 } S = \sum_{i=1}^n k \cdot 8^k,$$

$$\text{则 } S = 1 \times 8^1 + 2 \times 8^2 + \cdots + n \cdot 8^n,$$

$$\text{则 } 8S = 1 \times 8^2 + \cdots + (n-1) \cdot 8^n + n \cdot 8^{n+1}.$$

$$\text{所以 } -7S = 8^1 + 8^2 + \cdots + 8^n - n \cdot 8^{n+1} = 8 \cdot \frac{1-8^n}{1-8} -$$

$$n \cdot 8^{n+1} = \frac{1-7n}{7} \cdot 8^{n+1} - \frac{8}{7}.$$

$$\text{所以 } S = \frac{8}{49} + \frac{7n-1}{49} \cdot 8^{n+1}.$$

$$\text{因为 } \sum_{i=1}^n 4^{3i-1} = 16 \cdot \frac{1-64^n}{1-64} = \frac{1}{63} \cdot 4^{3n+2} - \frac{16}{63},$$

$$\text{所以 } \sum_{i=1}^n d_i d_{i+1} = \frac{63n-9}{49} \cdot 8^{n+1} + \frac{1}{63} \cdot 4^{3n+2} + \frac{536}{441}.$$

20. (I)解:由已知, $f'(x) = 2ae^{2x} + (a-2)e^x - 1 = (2e^x + 1)(ae^x - 1)$.

①当 $a \leq 0$ 时, $f'(x) \leq (2e^x + 1) \cdot (-1) < 0$,

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递减.

②当 $a > 0$ 时, 令 $f'(x) = 0$, 得 $x = -\ln a$.

当 x 变化时, $f'(x)$, $f(x)$ 的变化情况如下表:

x	$(-\infty, -\ln a)$	$-\ln a$	$(-\ln a, +\infty)$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	极小值	$\nearrow$

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, -\ln a)$ 上单调递减, 在 $(-\ln a, +\infty)$ 上单调递增.

(II)解:由(I), 当 $a \leq 0$ 时, $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递减, 所以 $f(x)$ 至多有一个零点, 不符合条件, 因此, $a > 0$.

因为当 $x = -\ln a$ 时, $f(x)$ 取得最小值,

因此 $f(-\ln a) < 0$, 所以 $\ln a - \frac{1}{a} + 1 < 0$.

设 $g(x) = \ln x - \frac{1}{x} + 1 (x > 0)$,

则 $g'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} > 0$,

所以 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增.

因为 $g(1) = 0$, 所以当 $x \in (0, 1)$ 时, $g(x) < 0$.

所以 $f(x)$ 在 $(-\ln a, \ln(\frac{3}{a}-1))$ 上恰有 1 个零点.

综上, 当 $a \in (0, 1)$ 时, $f(x)$ 恰有两个零点.

(III)证明:要证 $ex^3 + (3e+6)x + 2e < 6e^{2x}$,

即证 $e^{2x} - x > \frac{e}{6}(x^3 + 3x + 2)$.

当 $a = 1$ 时, $f(x) = e^{2x} - e^x - x$.

由(I), $f(x) \geq f(0) = 0$, 所以 $e^{2x} - x \geq e^x$.

下面证 $e^x \geq \frac{e}{6}(x^3 + 3x + 2)$, 即证 $6e^{x-1} \geq x^3 + 3x + 2$.

设 $h(x) = 6e^{x-1} - x^3 - 3x - 2$,

则 $h'(x) = 6e^{x-1} - 3x^2 - 3$.

因此 $a \in (0, 1)$.

因为 $f(-2) = ae^{-1} + (a-2)e^{-2} + 2 > -2e^{-2} + 2 > 0$,

所以 $f(x)$ 在 $(-2, -\ln a)$ 上恰有 1 个零点.

设 $u(x) = x - 1 - \ln x (x > 0)$,

则 $u'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$.

当 x 变化时, $u'(x)$, $u(x)$ 的变化情况如下表:

x	$(0, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$u'(x)$	-	0	+
$u(x)$	$\searrow$	极小值	$\nearrow$

因此, $u(x) \geq u(1) = 0$, 所以 $x - \ln x \geq 1 > 0$.

所以 $f(\ln(\frac{3}{a}-1)) = ae^{2\ln(\frac{3}{a}-1)} + (a-2)e^{\ln(\frac{3}{a}-1)} -$

$\ln(\frac{3}{a}-1) = \frac{3-a}{a} - \ln \frac{3-a}{a} > 0$.

因为 $\ln(\frac{3}{a}-1) > -\ln a$,

所以 $f(x)$ 在 $(-\ln a, \ln(\frac{3}{a}-1))$ 上恰有 1 个零点.

综上, 当 $a \in (0, 1)$ 时, $f(x)$ 恰有两个零点.

(III)证明:要证 $ex^3 + (3e+6)x + 2e < 6e^{2x}$,

即证 $e^{2x} - x > \frac{e}{6}(x^3 + 3x + 2)$.

当 $a = 1$ 时, $f(x) = e^{2x} - e^x - x$.

由(I), $f(x) \geq f(0) = 0$, 所以 $e^{2x} - x \geq e^x$.

下面证 $e^x \geq \frac{e}{6}(x^3 + 3x + 2)$, 即证 $6e^{x-1} \geq x^3 + 3x + 2$.

设 $h(x) = 6e^{x-1} - x^3 - 3x - 2$,

则 $h'(x) = 6e^{x-1} - 3x^2 - 3$.

设 $m(x) = 6e^{x-1} - 3x^2 - 3$, 则 $m'(x) = 6e^{x-1} - 6x$,

由(II)知, $x - 1 - \ln x \geq 0$,

则 $e^{x-1} - x \geq 0$, 所以 $m'(x) \geq 0$.

所以 $m(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递增. 又 $m(1) = 0$,

当 x 变化时, $h'(x)$, $h(x)$ 的变化情况如下表:

x	$(-\infty, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$h'(x)$	-	0	+
$h(x)$	$\searrow$	极小值	$\nearrow$

所以 $h(x) \geq h(1) = 0$, 所以 $6e^{x-1} - x^3 - 3x - 2 \geq 0$.

所以 $6e^{x-1} \geq x^3 + 3x + 2$, 所以 $e^x \geq \frac{e}{6}(x^3 + 3x + 2)$.

因为当且仅当 $x = 0$ 时, $e^{2x} - x = e^x$, 当且仅当 $x = 1$

时, $e^x = \frac{e}{6}(x^3 + 3x + 2)$,

所以 $e^{2x} - x > \frac{e}{6}(x^3 + 3x + 2)$.

所以 $ex^3 + (3e+6)x + 2e < 6e^{2x}$.

2024 年普通高等学校招生全国统一考试(天津卷)抢分卷 数学(2-押题卷)

1. C 【解析】因为 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $B = \{1, 2, 3,$

$4\}$, 所以 $\complement_U B = \{5, 6, 7\}$,

因为 $A = \{1, 3, 5\}$, 所以 $A \cap (\complement_U B) = \{5\}$, 故选 C.

2. A 【解析】解不等式 $2x^2 + x - 1 > 0$, 得 $x < -1$ 或 $x >$

$\frac{1}{2}$, 因此“ $x > \frac{1}{2}$ ”是“ $2x^2 + x - 1 > 0$ ”的充分不必要条

件, 故选 A.

3. A 【解析】函数 $y = \sin x - \frac{1}{x}$ 是定义在 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 上的奇函数, 其图象关于原点对称,

故排除选项 B, D.

当 $x \in (0, \frac{\pi}{6})$ 时, $\sin x \in (0, \frac{1}{2})$, $\frac{1}{x} \in (\frac{6}{\pi}, +\infty)$,

故 $\sin x - \frac{1}{x} < 0$, 排除 C, 故选 A.

4. B 【解析】因为 $1 > a = e^{-\frac{1}{e}} = \frac{1}{\sqrt{e}} > \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}$,

$$b = \log_3 2 < \log_3 \sqrt{5} = \log_3 5^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2},$$

$$c = \ln 3 > \ln e = 1,$$

所以 $c > a > b$, 故选 B.

5. B 【解析】双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左顶点为

$$(-a, 0), \text{渐近线方程为 } y = \pm \frac{b}{a}x,$$

抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点为 $(\frac{p}{2}, 0)$, 准线方程为

$$x = -\frac{p}{2},$$

$$\text{由条件可得 } a + \frac{p}{2} = 4, -\frac{p}{2} = -3, \frac{b}{a} = \frac{1}{3},$$

$$\text{解得 } p = 6, a = 1, b = \frac{1}{3}.$$

$$\text{所以 } c = \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{\sqrt{10}}{3}.$$

所以双曲线的焦距为 $\frac{2\sqrt{10}}{3}$, 故选 B.

6. A 【解析】设正方体棱长为 a , 外接球半径为 R ,

$$\text{则 } 2R = \sqrt{3}a, \frac{4\pi R^3}{3} = \sqrt{6}\pi,$$

$$\text{解得 } R^3 = \frac{3\sqrt{6}}{4}, a^3 = 2\sqrt{2}.$$

$$\text{所以 } V_{\text{三棱锥 } A-B_1CD} = V_{\text{三棱锥 } B_1-ACD} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}a^2 \times a = \frac{1}{6}a^3 =$$

$$\frac{\sqrt{2}}{3}, \text{ 故选 A.}$$

7. B 【解析】根据独立性检验, 得到的 $\chi^2 \approx 32.6239 >$

3.841, 因此可以推断性别和锻炼经常性两者之间独立的假设是不成立的, 也就是说两者之间是有关联的, 即

性别因素对本校学生体育锻炼的经常性有影响, 犯错

误的概率不超过 0.05, 因此选 B.

8. C 【解析】因为 $m \perp$ 平面 α , 直线 l 满足 $l \perp m$, 且 $l \not\subset \alpha$,

所以 $l \parallel \alpha$.

又 $n \perp$ 平面 β , 直线 l 满足 $l \parallel n$, $l \not\subset \beta$, 所以 $l \perp \beta$.

因为 $m \perp$ 平面 α , $l \perp$ 平面 β , $l \perp m$,

所以 $\alpha \perp \beta$. 故选 C.

9. B 【解析】设水平方向与 OP_0 的夹角为 θ ,

由已知, 得 $25\sin\theta + 30 = 50$,

$$\text{可得 } \sin\theta = \frac{4}{5}, \cos\theta = \frac{3}{5}.$$

9 分钟后轿厢 M 距地面的距离为

$$25\sin(\theta + 9 \times \frac{\pi}{12}) + 30 = \frac{25\sqrt{2}}{2}(\cos\theta - \sin\theta) + 30$$

$$= 30 - \frac{5\sqrt{2}}{2}. \text{ 故选 B.}$$

$$10. 5-3i \quad \text{【解析】} \frac{8+2i}{1+i} = \frac{(8+2i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{8-8i+2i+2}{2}$$

$$= 5-3i.$$

11. -10 【解析】 $(\sqrt{x} - \frac{2}{x^2})^6$ 的展开式的通项为 $T_{k+1} =$

$$C_6^k (\sqrt{x})^{6-k} \left(-\frac{2}{x^2}\right)^k = (-2)^k C_6^k x^{\frac{6-k}{2}-2k},$$

$$\text{令 } \frac{5-5k}{2} = 0, \text{ 得 } k = 1,$$

所以展开式中的常数项为 $(-2)^1 C_6^1 = -10$.

12. $\sqrt{5}$ 【解析】设圆心为 $C(a, b)$,

由已知, 得点 C 在直线 $(x-3) - 2(y-2) = 0$ 上,

$$\text{即 } a - 2b + 1 = 0.$$

又点 C 在直线 $x + y - 2 = 0$ 上,

$$\text{则 } a + b - 2 = 0.$$

联立, 可得 $a = b = 1$, 即圆心 C 为 $(1, 1)$.

$$\text{所以圆的半径 } r = |CA| = \sqrt{(3-1)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{5}.$$

13. $\frac{5}{6}, \frac{1}{3}$ 【解析】记“两个骰子点数不同”为事件 A,

$$\text{则有 } P(A) = \frac{6 \times 5}{6^2} = \frac{5}{6}.$$

记“一个骰子的点数为 6”为事件 B,

则 AB 表示两个骰子点数不同, 且有一个为 6,

$$\text{故 } P(AB) = \frac{1 \times 5 + 5 \times 1}{6^2} = \frac{5}{18},$$

$$\text{所以 } P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{1}{3}.$$

14. $\frac{\sqrt{3}}{6}, [\frac{1}{3}, 1]$ 【解析】设正三角形 ABC 的内心为 I,

$$\text{记 } \overrightarrow{AB} = a, \overrightarrow{AC} = b,$$

$$\text{所以 } \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IP}, \overrightarrow{AP}^2 = \overrightarrow{AI}^2 + \overrightarrow{IP}^2 + 2\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{IP}.$$

$$\text{由正三角形的性质, 得 } |\overrightarrow{AI}| = \frac{\sqrt{3}}{3}, |\overrightarrow{IP}| = \frac{\sqrt{3}}{6},$$

$$\text{因此 } \overrightarrow{AP}^2 \text{ 的最小值为 } \frac{1}{3} + \frac{1}{12} - 2 \times \frac{\sqrt{3}}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{6} = \frac{1}{12},$$

$$\text{所以 } |\overrightarrow{AP}| \text{ 的最小值为 } \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

$$\text{由 } \overrightarrow{AI} = \frac{a}{3} + \frac{b}{3}, \overrightarrow{AP} = \lambda \overrightarrow{AB} + \mu \overrightarrow{AC} = \lambda a + \mu b,$$

$$\text{可得 } \overrightarrow{IP} = \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AI} = \left(\lambda - \frac{1}{3}\right)a + \left(\mu - \frac{1}{3}\right)b.$$

$$\text{因为 } |\overrightarrow{IP}| = \frac{\sqrt{3}}{6},$$

$$\text{所以 } \left(\lambda - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(\mu - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(\lambda - \frac{1}{3}\right)\left(\mu - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{12},$$

$$\text{整理, 得 } \lambda^2 + \mu^2 + \lambda\mu - (\lambda + \mu) + \frac{1}{4} = 0.$$

$$\text{因为 } \lambda^2 + \mu^2 + \lambda\mu - (\lambda + \mu) + \frac{1}{4} = (\lambda + \mu)^2 - (\lambda + \mu) -$$

$$\lambda\mu + \frac{1}{4} \geq (\lambda + \mu)^2 - \left(\frac{\lambda + \mu}{2}\right)^2 - (\lambda + \mu) + \frac{1}{4},$$

$$\text{设 } \lambda + \mu = t, \text{ 即 } \frac{3}{4}t^2 - t + \frac{1}{4} \leq 0, \text{ 解得 } \frac{1}{3} \leq t \leq 1.$$

$$\text{当 } \lambda = \mu = \frac{1}{6} \text{ 和 } \lambda = \mu = \frac{1}{2} \text{ 时, } \lambda + \mu \text{ 分别取到 } \frac{1}{3} \text{ 和 } 1,$$

$$\text{因此, } \lambda + \mu \text{ 的取值范围是 } \left[\frac{1}{3}, 1\right].$$

15. $(-3, \frac{1}{3})$ 【解析】令 $g(x) = f(x) - \frac{x}{2}$,

$$\text{则 } g'(x) = f'(x) - \frac{1}{2},$$

由已知得当 $x \in (-\infty, 0]$ 时, $g'(x) < 0$,

故 $g(x)$ 在 $(-\infty, 0]$ 上单调递减.

因为 $f(x) - f(-x) = x$, 可得 $g(x) - g(-x) = 0$,

即 $g(x)$ 为偶函数, 故 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增.

$$\text{由 } f(2x+1) - f(x-2) < \frac{x+3}{2}, \text{ 可得}$$

$$g(2x+1) + \frac{2x+1}{2} - g(x-2) - \frac{x-2}{2} < \frac{x+3}{2}.$$

$$\text{整理, 得 } g(2x+1) < g(x-2),$$

$$\text{所以 } |2x+1| < |x-2|, \text{ 解得 } -3 < x < \frac{1}{3}.$$

故不等式的解集为 $(-3, \frac{1}{3})$.

16. 解: (I) 在 $\triangle ABD$ 中, 由余弦定理, 得

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cos \angle BAD = (\sqrt{3} + 1)^2 + (\sqrt{6})^2 - 2(\sqrt{3} + 1) \times \sqrt{6} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 4.$$

所以 $BD = 2$.

(II) 在 $\triangle ABD$ 中, 由正弦定理, 得

$$\sin \angle ADB = \frac{AB \cdot \sin \angle BAD}{BD} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.$$

$$\text{所以 } \sin \angle ADC = \sin \angle ADB = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.$$

在 $\triangle ADC$ 中, 由正弦定理, 得

$$\sin C = \frac{AD \cdot \sin \angle ADC}{AC} = \frac{3}{5}.$$

(III) 因为 $BD^2 + AD^2 - AB^2 > 0$, 故 $\angle ADB$ 为锐角,

可得 $\angle C$ 为锐角, 所以 $\cos C = \sqrt{1 - \sin^2 C} = \frac{4}{5}$.

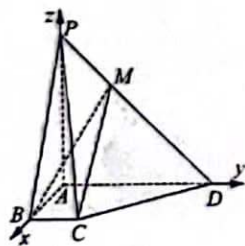
$$\text{又 } \sin 2C = 2 \sin C \cos C = \frac{24}{25}, \cos 2C = 1 - 2 \sin^2 C$$

$$= \frac{7}{25},$$

$$\text{所以 } \cos(2C + \frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2} \cos 2C - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2C = \frac{7 - 24\sqrt{3}}{50}.$$

17. 解: 以 A 为原点, AB, AD, AP 所在直线分别为 x 轴、

y 轴、 z 轴, 建立如图所示的空间直角坐标系,



则 $A(0,0,0), B(2,0,0), C(2,1,0), D(0,3,0),$

$P(0,0,3), M(0,1,2).$

所以 $\overrightarrow{CM} = (-2, 0, 2), \overrightarrow{AD} = (0, 3, 0), \overrightarrow{BC} = (0, 1, 0),$

$\overrightarrow{PM} = (0, 1, -1), \overrightarrow{AP} = (0, 0, 3).$

(I) 证明: 由题意, 得 $\overrightarrow{AD}$ 是平面 PAB 的一个法向量.

因为 $\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$, 且 $CM \not\subset$ 平面 PAB ,

所以 $CM \parallel$ 平面 PAB .

(II) 解: 设平面 BCM 的法向量为 $n = (x, y, z),$

$$\text{则 } \begin{cases} n \cdot \overrightarrow{BC} = 0, \\ n \cdot \overrightarrow{CM} = 0, \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} y = 0, \\ -2x + 2z = 0. \end{cases} \text{ 所以 } \begin{cases} y = 0, \\ x = z. \end{cases}$$

取 $z = 1$, 则 $x = 1, y = 0$. 所以 $n = (1, 0, 1)$ 是平面 BCM 的一个法向量.

设平面 CPM 的法向量为 $m = (x, y, z),$

$$\text{则 } \begin{cases} m \cdot \overrightarrow{PM} = 0, \\ m \cdot \overrightarrow{CM} = 0, \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} y - z = 0, \\ -2x + 2z = 0. \end{cases} \text{ 所以 } \begin{cases} y = z, \\ x = z. \end{cases}$$

取 $z = 1$, 则 $x = 1, y = 1$. 所以 $m = (1, 1, 1)$ 是平面

CPM 的一个法向量.

设平面 BCM 和平面 CPM 的夹角为 $\theta,$

$$\text{则 } \cos \theta = |\cos \langle n, m \rangle| = \frac{|n \cdot m|}{|n| |m|} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

所以平面 BCM 和平面 CPM 夹角的余弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

(III) 解: 设点 A 到平面 CPM 的距离为 $d,$

因为 $\overrightarrow{AP} = (0, 0, 3), m = (1, 1, 1)$ 是平面 CPM 的一个法向量,

$$\text{所以 } d = \frac{|\overrightarrow{AP} \cdot m|}{|m|} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}.$$

即点 A 到平面 CPM 的距离为 $\sqrt{3}$.

18. (I) 解: 由已知有 $\frac{a+c}{a-c} = 3$, 即 $a = 2c.$

$$\text{又 } \frac{1}{2}(a+c)b = \frac{3\sqrt{3}}{2}, \text{ 则 } bc = \sqrt{3}.$$

因为 $a^2 = b^2 + c^2,$

所以 $a = 2, b = \sqrt{3}, c = 1.$

所以椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1.$

(II) (I) 解: 由题意可知直线 A_1P 的斜率存在,

设直线 A_1P 的方程为 $y = k(x+2),$

由已知 $k \neq 0$. 令 $x = n$, 得 $y = k(n+2),$

则 $M(n, \frac{k(n+2)}{2})$, 故直线 OM 的斜率为 $\frac{k(n+2)}{2n}.$

由 $OM \parallel A_1P$, 可得 $\frac{k(n+2)}{2n} = k$, 解得 $n = 2.$

$$\text{(II) 证明: 联立 } \begin{cases} y = k(x+2), \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1, \end{cases}$$

消去 y , 整理得 $(4k^2 + 3)x^2 + 16k^2x + 16k^2 - 12 = 0,$

因为 $-2x_P = \frac{16k^2 - 12}{4k^2 + 3}$, 故有 $x_P = \frac{-8k^2 + 6}{4k^2 + 3},$

进而可得 $y_P = \frac{12k}{4k^2 + 3}$, 即 $P(\frac{-8k^2 + 6}{4k^2 + 3}, \frac{12k}{4k^2 + 3}).$

由 (I) 知 $F_2(1, 0)$, 设直线 PF_2 的方程为 $x = my + 1,$

则 $\frac{-8k^2 + 6}{4k^2 + 3} = \frac{12km}{4k^2 + 3} + 1$, 得 $m = \frac{1 - 4k^2}{4k}.$

故直线 PF_2 的方程为 $x = \frac{1 - 4k^2}{4k}y + 1,$

即 $4kx + (4k^2 - 1)y - 4k = 0.$

所以圆心 $M(2, 2k)$ 到直线 PF_2 的距离为 $d =$

$$\frac{|8k^3 + 2k|}{\sqrt{16k^2 + (4k^2 - 1)^2}} = \frac{2|k|(4k^2 + 1)}{\sqrt{(4k^2 + 1)^2}} = 2|k|.$$

又圆的半径恰为 $2|k|,$

故以 NQ 为直径的圆和直线 PF_2 相切.

19. (I) 解: 设数列 $\{a_n\}$ 的公差为 $d,$

则 $a_k = a_1 + (k-1)d.$

因为 $\{A_n^{(k)}\}$ 是以 a_k 为首项, q 为公比的等比数列,

所以 $A_n^{(k)} = a_k q^{n-1} = [a_1 + (k-1)d]q^{n-1}.$

由已知有 $A_1^{(1)} = a_1 + 2d = 5, A_2^{(2)} = (a_1 + d)q = 9,$

$A_4^{(2)} = (a_1 + d)q^3, A_7^{(3)} = (a_1 + 4d)q^6,$

故 $(a_1 + d)^2 = a_1 + 4d,$

由此可得 $(5-d)^2 = 5 + 2d$, 解得 $d = 2$ 或 $d = 10.$

当 $d = 10$ 时, 解得 $a_1 = -15$, 不合题意, 舍去.

当 $d = 2$ 时, 解得 $a_1 = 1$, 进而解得 $q = 3.$

(II) 证明: 由 (I) 有 $A_n^{(n)} = [a_1 + (n-1)d]q^{n-1} = 2 \times$

$3^{n-1}n - 3^{n-1}.$

故 $A_n^{(n+1)} - A_n^{(n)} = 2 \times 3^{n-1}$, 为常数,

因为 $A_1^{(1)} = 2 \times 3^{1-1} - 3^{1-1} = 3^{1-1},$

所以数列 $\{A_n^{(n)}\}$ 是以 3^{1-1} 为首项, $2 \times 3^{n-1}$ 为公差的等

差数列.

记数列 $\{A_n^{(n)}\}$ 的前 n 项和为 $S_n,$

$$\text{则有 } S_n = \frac{(3^{1-1} + 2 \times 3^{n-1}n - 3^{n-1}) \times n}{2} = 3^{n-1}n^2.$$

(III) 解: 由 (I) 有 $A_n^{(n)} = [a_1 + (n-1)d]q^{n-1} = (2n-1)3^{n-1}.$

故有 $\sum_{k=1}^n A_k^{(k)} = 1 \times 3^0 + 3 \times 3^1 + \dots + (2n-1) \cdot 3^{n-1},$

$$3 \sum_{k=1}^n A_k^{(k)} = 1 \times 3^1 + 3 \times 3^2 + \dots + (2n-3) \cdot 3^{n-1} + (2n-1) \cdot 3^n.$$

$$1) \cdot 3^n,$$

两式相减,可得

$$-2 \sum_{i=1}^n A_i^{(n)} = 1 + 2 \times 3^1 + \cdots + 2 \times 3^{n-1} - (2n-1) \cdot 3^n =$$

$$1 + 2 \times \frac{3(1-3^{n-1})}{1-3} - (2n-1) \cdot 3^n = -(2n-2) \cdot$$

$$3^n - 2,$$

$$\text{整理,得} \sum_{i=1}^n A_i^{(n)} = (n-1) \cdot 3^n + 1.$$

20. (I) 解: 当 $a=e$ 时, $f(x)=e^x-ex-1$,

$$\text{可得 } f'(x)=e^x-e,$$

当 x 变化时, $f'(x)$, $f(x)$ 的变化情况如下表:

x	$(-\infty, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	极小值	$\nearrow$

所以 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(-\infty, 1)$, 单调递增区间为 $(1, +\infty)$.

(II) 解: 令 $g(x)=f(x+s)+as$, 即 $g(x)=a^{x+s}-ax-1$,

$$\text{由此可得 } g'(x)=\ln a \cdot a^{x+s}-a.$$

因为对于任意 $x \in [0, 1]$, $g(x) \leq 0$ 成立,

$$\text{故 } g(0)=a^s-1 \leq 0, \text{ 可得 } s \leq 0.$$

下面证明 $s=0$ 时满足题意.

$$\text{当 } s=0 \text{ 时, } g(x)=f(x)=a^x-ax-1,$$

$$f'(x)=\ln a \cdot a^x-a,$$

因为 $a>1$, 所以 $f'(x)$ 在 $[0, 1]$ 上单调递增.

$$\text{又 } f'(0)=\ln a-a<0, f'(1)=a(\ln a-1).$$

$$\text{①当 } a \leq e \text{ 时, 有 } f'(1) \leq 0.$$

$$\text{故当 } x \in [0, 1] \text{ 时, } f'(x) \leq 0,$$

所以 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上单调递减.

$$\text{由此可得 } f(x) \leq f(0)=0, \text{ 符合题意.}$$

$$\text{②当 } a>e \text{ 时, 有 } f'(1)>0.$$

$$\text{故存在 } x_0 \in [0, 1], \text{ 使得 } f'(x_0)=0,$$

则 $f(x)$ 在 $[0, x_0]$ 上单调递减, 在 $[x_0, 1]$ 上单调递增.

$$\text{由于 } f(0)=0, f(1)=-1<0,$$

$$\text{所以 } \forall x \in [0, 1], f(x) \leq 0, \text{ 符合题意.}$$

综上, 当 $s=0$ 时满足题意, 故实数 s 的最大值为 0.

(III) 证明: ①当 $n=2$ 时, $1>\frac{1}{2}$ 显然成立.

$$\text{②当 } n>2, \text{ 且 } n \in \mathbb{N}^* \text{ 时,}$$

由 (II) 得, 当 $x \in [0, 1]$, 且 $a>1$ 时, 有 $a^x \leq ax+1$ (当

且仅当 $x=0$ 时取等).

$$\text{取 } a=k, x=\frac{1}{n-k}, \text{ 其中 } k \in \{2, 3, \dots, n-1\},$$

$$\text{则有 } k^{\frac{1}{n-k}} \leq \frac{k}{n-k} + 1 = \frac{n}{n-k}.$$

$$\text{两边取倒数, 有 } \left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{n-k}} \geq \frac{n-k}{n} = 1 - \frac{k}{n}.$$

$$\text{因此, } 1^{\frac{1}{n-1}} + \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n-2}} + \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{n-3}} + \cdots + \left(\frac{1}{n-1}\right)^{\frac{1}{n-(n-1)}} \geq 1 +$$

$$(n-2) - \frac{(n+1)(n-2)}{2n} = \frac{n-1}{2} + \frac{1}{n} > \frac{n-1}{2}.$$

$$\text{综上, } 1^{\frac{1}{n-1}} + \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n-2}} + \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{n-3}} + \cdots + \left(\frac{1}{n-1}\right)^{\frac{1}{n-(n-1)}} > \frac{n-1}{2}$$

$$(n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2).$$

2024 年普通高等学校招生全国 统一考试(天津卷)抢分卷 数学(3-信心卷)

1. B 【解析】因为 $A=\{-1, 0, 2\}$, $B=\{0, 2, 4\}$,

$$\text{所以 } A \cup B = \{-1, 0, 2, 4\}.$$

$$\text{又 } U = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\},$$

$$\text{所以 } \complement_U(A \cup B) = \{1, 3\}, \text{ 故选 B.}$$

2. C 【解析】由 $|x-2|<2$, 解得 $0<x<4$.

$$\text{由 } x^2-4x-21=(x+3)(x-7)<0, \text{ 解得 } -3<x<7.$$

因为 $0<x<4$ 能推出 $-3<x<7$, 但 $-3<x<7$ 推不出

$0<x<4$, 所以 “ $|x-2|<2$ ” 是 “ $x^2-4x-21<0$ ” 的充分

不必要条件, 故选 C.

3. A 【解析】由图知函数图象关于 y 轴对称, 得 $f(x)$ 为偶函数,

$$\text{且 } f(\pi)=f(-\pi)=0, f\left(\frac{\pi}{2}\right)=f\left(-\frac{\pi}{2}\right)>0.$$

$$\text{因为 } (-x)^3 \cos(-x) = -x^3 \cos x, x \in \mathbb{R},$$

所以 B 中的函数为奇函数, 排除 B.

$$\text{因为 } \left(\frac{\pi}{2}\right)^3 \sin \pi = 0, \text{ 排除 C.}$$

$$\text{因为 } \pi^3 \sin \frac{\pi}{2} = \pi^3 \neq 0, \text{ 排除 D. 故选 A.}$$

4. A 【解析】因为 $c=\log_{\sqrt{3}} 3=2\log_3 3=\log_3 9$,

由 $y=\log_3 x$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

$$\text{可知 } 1=\log_3 2 < b=\log_3 7 < c=\log_3 9.$$

$$\text{由 } y=\left(\frac{1}{2}\right)^x \text{ 在 } \mathbb{R} \text{ 上单调递减,}$$

$$\text{可知 } a=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} < \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1.$$

所以 $a<b<c$, 故选 A.

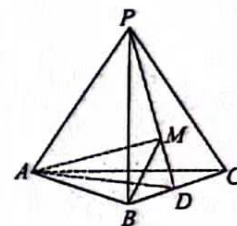
5. D 【解析】由题意可得, 募捐活动每天收到的捐款构成

以 20 为首项, 2 为公比的等比数列.

$$\text{募捐活动一共进行了 7 天, 则共募捐了 } \frac{20 \times (1-2^7)}{1-2} =$$

$$2540(\text{元}). \text{ 故选 D.}$$

6. C 【解析】如图,



$$V_{P-ABM} = V_{B-APM} = \frac{2}{3} V_{B-APD} = \frac{2}{3} V_{P-ABD}$$

$$= \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} V_{P-ABC} = \frac{1}{3} V_{P-ABC},$$

$$\text{所以 } \frac{V_{P-ABM}}{V_{P-ABC}} = \frac{1}{3}, \text{ 故选 C.}$$

7. D 【解析】根据成对数据的独立性检验,

$$\text{因为 } \chi^2 = 2.974 < \chi_{0.05} = 3.841,$$

所以可以认为变量 x 与 y 独立, A 正确;

$$\text{根据已知条件得 } b = -2a + 1, \text{ 所以 } 2a + b = 1,$$

$$\text{进而 } 2ab \leq \left(\frac{2a+b}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}, \text{ 解得 } ab \leq \frac{1}{8}, \text{ 当且仅当 } a =$$

$$\frac{1}{4}, b = \frac{1}{2} \text{ 时, 等号成立, B 正确;}$$

由 $X \sim N(1, \sigma^2)$, 知 $\mu=1$, 即正态曲线关于直线 $x=1$

对称,

所以 $P(X < -1) = P(X > 3) = 0.3$,

则 $P(-1 < X < 3) = 1 - 2P(X > 3) = 0.4$, C 正确;

因为 $10 \times 0.6 = 6$, 则数据 0, 2, 3, 4, 7, 9, 11, 16, 20, 21

的第 60 百分位数为 $\frac{9+11}{2} = 10$, D 错误. 故选 D.

8. C 【解析】根据双曲线和圆的对称性, 不妨设点 P 在第一象限.

因为 $S_{\triangle OF_1P} = \frac{1}{2} |OF_1| |y_P| = \frac{5}{2} |y_P| = 5$,

所以 $y_P = 2$.

因为点 P 在圆 $x^2 + y^2 = 25$ 上,

所以 $x_P = \sqrt{21}$.

又点 P 在双曲线上,

$$\text{所以 } \begin{cases} \frac{21}{a^2} - \frac{4}{b^2} = 1, \\ a^2 + b^2 = 25, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} a^2 = 15, \\ b^2 = 10. \end{cases}$$

则双曲线的方程为 $\frac{x^2}{15} - \frac{y^2}{10} = 1$. 故选 C.

9. A 【解析】因为 $f(x) = \cos(2\omega x - \frac{\pi}{3}) - \sin(2\omega x +$

$$\frac{\pi}{2}) + 1$$

$$= \frac{1}{2} \cos 2\omega x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2\omega x - \cos 2\omega x + 1$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2\omega x - \frac{1}{2} \cos 2\omega x + 1$$

$$= \sin(2\omega x - \frac{\pi}{6}) + 1,$$

所以 $f(x)$ 的值域是 $[0, 2]$. 因为当 $f(x_1)f(x_2) = 4$ 时,

$|x_1 - x_2|_{\min} = \pi$, 所以 $f(x)$ 的最小正周期 $T = \pi$, ①

正确;

因为 $T = \frac{2\pi}{\omega} = \pi$, 所以 $\omega = 1$.

则 $f(x) = \sin(2x - \frac{\pi}{6}) + 1$, 而 $f(x) - 1 = \sin(2x -$

$\frac{\pi}{6})$ 不是奇函数, ② 错误;

当 $x \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ 时, 令 $t = 2x - \frac{\pi}{6} \in [-\frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{3}]$,

而 $y = \sin t$ 在 $[-\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{2}]$ 上单调递减, 在

$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}]$ 上单调递增, 所以 $f(x)$ 在区间 $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ 上

不单调, ③ 错误;

将 $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度, 得到 $y =$

$\sin[2(x + \frac{\pi}{6}) - \frac{\pi}{6}] + 1 = \sin(2x + \frac{\pi}{6}) + 1$ 的图象, 再

向下平移 1 个单位长度, 得到 $y = \sin(2x + \frac{\pi}{6})$ 的图象,

④ 错误. 故选 A.

10. $\frac{9}{25} - \frac{12}{25}i$ 【解析】由题意, 可得

$$\frac{2-i}{3+4i} = \frac{3}{3+4i} = \frac{3(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)} = \frac{9-12i}{25} = \frac{9}{25} - \frac{12}{25}i.$$

11. 112 【解析】 $(2\sqrt{x} - \frac{1}{4x})^8$ 的展开式的通项为 $T_{k+1} =$

$$C_8^k (2\sqrt{x})^{8-k} \left(-\frac{1}{4x}\right)^k = \left(-\frac{1}{4}\right)^k 2^{8-k} C_8^k x^{4-\frac{k}{2}},$$

令 $4 - \frac{k}{2} = 1$, 得 $k = 6$,

则展开式中 x 的系数为 $\left(-\frac{1}{4}\right)^6 2^{8-6} C_8^6 = 112$.

12. 2 【解析】设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$,

$$\text{联立 } \begin{cases} x = \frac{1}{2}y + 1, \\ y^2 = 2px, \end{cases} \text{ 得 } y^2 - py - 2p = 0,$$

$$\text{所以 } \begin{cases} \Delta = p^2 + 8p > 0, \\ y_1 + y_2 = p, \\ y_1 y_2 = -2p. \end{cases}$$

因为 $MA \perp MB$,

$$\text{所以 } \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = (x_1 + 1, y_1 - 1) \cdot (x_2 + 1, y_2 - 1)$$

$$= \left(\frac{1}{2}y_1 + 2, y_1 - 1\right) \cdot \left(\frac{1}{2}y_2 + 2, y_2 - 1\right) = \frac{5}{4}y_1 y_2 + 5$$

$$= \frac{5}{4} \times (-2p) + 5 = 0,$$

解得 $p = 2$.

13. $\frac{6}{125}, \frac{9}{24}$ 【解析】设 $B =$ “任取一个产品为次品”, $A_1 =$

“产品为甲车间加工”, $A_2 =$ “产品为乙车间加工”, $A_3 =$

“产品为丙车间加工”,

则 $\Omega = A_1 \cup A_2 \cup A_3$, 且 A_1, A_2, A_3 两两互斥.

根据题意得 $P(A_1) = 0.2, P(A_2) = 0.5, P(A_3) = 0.3$.

$P(B|A_1) = 0.05, P(B|A_2) = 0.04, P(B|A_3) = 0.06$.

根据全概率公式, 得

$$P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + P(A_3)P(B|A_3)$$

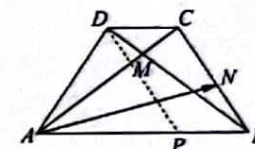
$$= 0.2 \times 0.05 + 0.5 \times 0.04 + 0.3 \times 0.06 =$$

$$0.048 = \frac{6}{125}.$$

$$P(A_1|B) = \frac{P(A_1B)}{P(B)} = \frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(B)} = \frac{0.2 \times 0.05}{0.048}$$

$$= \frac{5}{24}.$$

14. $\frac{1}{4}a + \frac{3}{4}b; [-\frac{9}{16}, 1]$ 【解析】如图,



因为 $\triangle ABM \sim \triangle CDM$, 且 $\frac{AM}{CM} = \frac{AB}{CD} = \frac{BM}{DM} = 3$,

$$\text{所以 } \overrightarrow{AM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AD} = \frac{1}{4}a + \frac{3}{4}b.$$

设点 P 是线段 AB 上靠近点 B 的一个三等分点, 连接

DP, 则四边形 BCDP 是平行四边形.

设 $\overrightarrow{BN} = \lambda \overrightarrow{BC}, \lambda \in [0, 1]$,

$$\text{则 } \overrightarrow{BN} = \lambda \overrightarrow{PD} = \lambda (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AP}) = \lambda \left(b - \frac{2}{3}a\right) = -\frac{2\lambda}{3}a$$

$$+ \lambda b,$$

$$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} = a - \frac{2\lambda}{3}a + \lambda b = \frac{3-2\lambda}{3}a + \lambda b,$$

$$\text{所以 } \overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{BN} = \left(\frac{3-2\lambda}{3}a + \lambda b\right) \cdot \left(-\frac{2\lambda}{3}a + \lambda b\right)$$

$$= \frac{4\lambda^2 - 6\lambda}{9}a^2 + \frac{3\lambda - 4\lambda^2}{3}a \cdot b + \lambda^2 b^2.$$

由等腰梯形的性质, 可知 $\angle BAD = 60^\circ$,

$$\text{所以 } a \cdot b = |a||b|\cos \angle BAD = 3.$$

将 $a^2 = 9, b^2 = 4, a \cdot b = 3$ 代入上式,

$$\text{化简得 } \overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{BN} = 4\lambda^2 - 3\lambda.$$

因为 $f(\lambda) = 4\lambda^2 - 3\lambda$ 在 $[0, \frac{3}{8}]$ 上单调递减, 在

$[\frac{3}{8}, 1]$ 上单调递增,

则 $f(\lambda)_{\min} = f(\frac{3}{8}) = -\frac{9}{16}$, $f(\lambda)_{\max} = f(1) = 1$,

所以 $\overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{BN}$ 的取值范围为 $[-\frac{9}{16}, 1]$.

15. $[-4, -3]$ 【解析】当 $a \geq 0$ 时, $\forall x < 0, f(x) = x^2 -$

$2(a-1)x + a^2 + 1$ 在 $(-\infty, 0)$ 内至多有 2 个零点, 不

符合题意, 所以 $a < 0$.

令 $g(x) = x^2 - 2(a-1)x + a^2 + 1$,

$g(x)$ 的对称轴为 $x = a-1 < a$.

所以 $g(x)_{\min} = g(a-1) = (a-1)^2 - 2(a-1)^2 + a^2 + 1$

$= 2a < 0$, $g(a) = a^2 - 2a(a-1) + a^2 + 1 = 2a + 1$.

令 $h(x) = \sin[\pi(x-a)]$,

令 $h(x) = 0$, 则 $\pi(x-a) = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

得 $x = a + k, k \in \mathbb{Z}$.

所以 $h(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 的零点依次为 $a, a+1, a+2,$

$a+3, a+4, \dots$.

① 当 $2a+1 > 0$, 即 $-\frac{1}{2} < a < 0$ 时,

$g(x)$ 在 $(-\infty, a)$ 有 2 个零点, 要满足题意, 则 $h(x)$ 在

$[a, 0)$ 需有 3 个零点,

所以 $a+2 < 0 \leq a+3$, 即 $-3 \leq a < -2$, 此时无解;

② 当 $2a+1 \leq 0$, 即 $a \leq -\frac{1}{2}$ 时,

$g(x)$ 在 $(-\infty, a)$ 有 1 个零点, 要满足题意, 则 $h(x)$ 在

$[a, 0)$ 需有 4 个零点,

所以 $a+3 < 0 \leq a+4$, 解得 $-4 \leq a < -3$.

综上, a 的取值范围是 $[-4, -3]$.

16. 解: (I) 由余弦定理 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$,

即 $c^2 = 5^2 + (2\sqrt{3})^2 - 2 \times 5 \times 2\sqrt{3} \times \cos 30^\circ$,

解得 $c = \sqrt{7}$.

(II) 由正弦定理 $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$,

即 $\frac{2\sqrt{3}}{\sin B} = \frac{\sqrt{7}}{\sin 30^\circ}$, 解得 $\sin B = \frac{\sqrt{21}}{7}$.

(III) 因为 $b < a$, 所以 B 为锐角,

所以 $\cos B = \sqrt{1 - \sin^2 B} = \frac{2\sqrt{7}}{7}$.

因为 $\sin 2B = 2 \sin B \cos B = 2 \times \frac{\sqrt{21}}{7} \times \frac{2\sqrt{7}}{7} = \frac{4\sqrt{3}}{7}$,

$\cos 2B = 1 - 2 \sin^2 B = 1 - 2 \times (\frac{\sqrt{21}}{7})^2 = \frac{1}{7}$,

所以 $\sin(A-B) = \sin(180^\circ - C - B - B) = \sin(2B +$

$C) = \sin 2B \cos 30^\circ + \cos 2B \sin 30^\circ$

$= \frac{4\sqrt{3}}{7} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{7} \times \frac{1}{2} = \frac{13}{14}$.

17. (I) 证明: 连接 CM ,

因为 $\triangle ABC$ 是等边三角形, M 是 AB 的中点,

所以 $CM \perp AB$.

因为平面 $ABC \perp$ 平面 ABB_1A_1 , 平面 $ABC \cap$ 平面

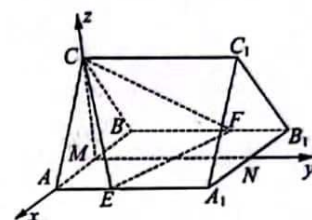
$ABB_1A_1 = AB, CM \subset$ 平面 ABC ,

所以 $CM \perp$ 平面 ABB_1A_1 .

(II) 解: 取 A_1B_1 的中点 N , 以 M 为坐标原点, $\overrightarrow{MA_1}$,

$\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MC}$ 的方向分别为 x 轴、 y 轴、 z 轴的正方向, 建

立如图所示的空间直角坐标系.



则 $A(1, 0, 0), B(-1, 0, 0), A_1(1, 3, 0), B_1(-1, 3,$

$0), E(1, 1, 0), F(-1, 2, 0), C(0, 0, \sqrt{3}), C_1(0, 3,$

$\sqrt{3})$. 所以 $\overrightarrow{EF} = (-2, 1, 0), \overrightarrow{CE} = (1, 1, -\sqrt{3})$.

设平面 CEF 的法向量为 $n = (x, y, z)$,

则 $\begin{cases} \overrightarrow{EF} \cdot n = -2x + y = 0, \\ \overrightarrow{CE} \cdot n = x + y - \sqrt{3}z = 0, \end{cases}$

不妨取 $x = 1$, 则 $n = (1, 2, \sqrt{3})$.

因为 $CM \perp$ 平面 ABB_1A_1 ,

所以 $\overrightarrow{MC} = (0, 0, \sqrt{3})$ 是平面 ABB_1A_1 的一个法向量.

设平面 ABB_1A_1 与平面 CEF 的夹角为 θ ,

则 $\cos \theta = |\cos \langle n, \overrightarrow{MC} \rangle| = \frac{|n \cdot \overrightarrow{MC}|}{|n| |\overrightarrow{MC}|} = \frac{3}{2\sqrt{2} \times \sqrt{3}}$

$= \frac{\sqrt{6}}{4}$.

所以平面 ABB_1A_1 与平面 CEF 夹角的余弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{4}$.

(III) 解: 因为 $\overrightarrow{CC_1} = (0, 3, 0)$,

所以点 C_1 到平面 CEF 的距离为 $\frac{|\overrightarrow{CC_1} \cdot n|}{|n|} = \frac{6}{2\sqrt{2}}$

$= \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

18. 解: (I) 由题知 $\begin{cases} 2a = 4, \\ \frac{c}{a} = \frac{1}{2}, \\ a^2 = b^2 + c^2, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a = 2, \\ b = \sqrt{3}, \\ c = 1, \end{cases}$

所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$.

(II) 由 (I) 知 $F_1(-1, 0), A(2, 0)$.

由题知直线 l 的斜率一定不为 0,

设 $l: x = my - 1, M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$.

联立 $\begin{cases} x = my - 1, \\ 3x^2 + 4y^2 = 12, \end{cases}$ 得 $(3m^2 + 4)y^2 - 6my - 9 = 0$,

所以 $\begin{cases} \Delta = 36m^2 + 36(3m^2 + 4) > 0, \\ y_1 + y_2 = \frac{6m}{3m^2 + 4}, \\ y_1 y_2 = \frac{-9}{3m^2 + 4}. \end{cases}$

因 $l_{AM}: x = \frac{x_1 - 2}{y_1}y + 2$,

令 $x = 0$, 解得 $y_P = \frac{-2y_1}{x_1 - 2} = \frac{2y_1}{3 - my_1}$,

同理 $y_Q = \frac{2y_2}{3 - my_2}$.

$$\text{因为 } \frac{S_{\triangle AMN}}{S_{\triangle APQ}} = \frac{\frac{1}{2}|AM||AN|\sin\angle MAN}{\frac{1}{2}|AP||AQ|\sin\angle PAQ} =$$

$$\frac{|AM||AN|}{|AP||AQ|} = 1, \text{ 所以 } \frac{|y_1|}{|y_P|} \cdot \frac{|y_2|}{|y_Q|} = 1.$$

因为点M和点P在x轴的同侧,点N和点Q也在x轴的同侧,所以上式等价于 $y_1 y_2 = y_P y_Q$, 即 $y_1 y_2 =$

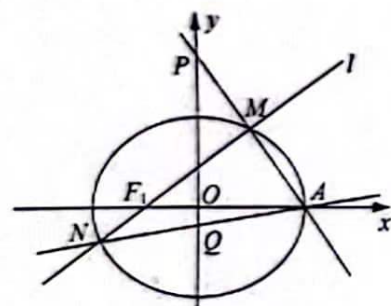
$$\frac{2y_1}{3-my_1} \cdot \frac{2y_2}{3-my_2} \Leftrightarrow m^2 y_1 y_2 - 3m(y_1 + y_2) + 5 = 0,$$

$$\text{代入 } y_1 y_2, y_1 + y_2, \text{ 化简得 } m^2 = \frac{5}{3},$$

$$\text{则 } m = \pm \frac{\sqrt{15}}{3}.$$

$$\text{所以直线 } l \text{ 的方程为 } x = \pm \frac{\sqrt{15}}{3}y - 1,$$

$$\text{即 } 3x - \sqrt{15}y + 3 = 0 \text{ 或 } 3x + \sqrt{15}y + 3 = 0.$$



19. (I) 解: 设 $\{a_n\}$ 的公差为 d , $\{b_n\}$ 的公比为 q .

$$\text{由题知 } \begin{cases} 2+3d=2 \times 2q, \\ 2q^2-2q=2+d, \end{cases}$$

$$\text{化简得 } 3q^2-5q-2=(3q+1)(q-2)=0.$$

$$\text{因为 } q>0, \text{ 所以 } q=2, d=2.$$

$$\text{所以 } a_n = 2+2(n-1)=2n, b_n = 2 \times 2^{n-1} = 2^n.$$

$$(II) \text{ 解: 当 } n \text{ 为奇数时, } c_n = 2n \times 2^n = n \times 2^{n+1}.$$

$$\text{记 } A_{n+1} = c_1 + c_3 + c_5 + \dots + c_{2n-1} + c_{2n+1},$$

$$\text{则 } A_{n+1} = 1 \times 2^2 + 3 \times 2^4 + \dots + (2n+1) \times 2^{2n+2}, \text{ ①}$$

$$4A_{n+1} = 1 \times 2^4 + \dots + (2n-1) \times 2^{2n+2} + (2n+1) \times 2^{2n+4}, \text{ ②}$$

$$\text{①}-\text{②}, \text{ 得}$$

$$-3A_{n+1} = 4 + (2^5 + 2^7 + \dots + 2^{2n+3}) - (2n+1) \times 2^{2n+4}$$

$$= 4 + \frac{32-2^{2n+5}}{1-4} - (2n+1) \times 2^{2n+4}$$

$$= -\frac{20}{3} - \frac{6n+1}{3} \times 4^{n+2},$$

$$\text{所以 } A_{n+1} = \frac{20}{9} + \frac{6n+1}{9} \times 4^{n+2}.$$

$$\text{当 } n \text{ 为偶数时, } c_n = \frac{6n+13}{(2n-1)(2n+3) \times 2^{n+1}} =$$

$$\frac{1}{(2n-1) \times 2^{n-1}} - \frac{1}{(2n+3) \times 2^{n+1}}.$$

$$\text{记 } B_n = c_2 + c_4 + \dots + c_{2n},$$

$$\text{则 } B_n = \left(\frac{1}{3 \times 2^2} - \frac{1}{7 \times 2^3} \right) + \left(\frac{1}{7 \times 2^3} - \frac{1}{11 \times 2^5} \right) + \dots$$

$$+ \left[\frac{1}{(4n-1) \times 2^{2n-1}} - \frac{1}{(4n+3) \times 2^{2n+1}} \right]$$

$$= \frac{1}{6} - \frac{1}{(4n+3) \times 2^{2n+1}},$$

$$\text{所以 } \sum_{i=1}^{2n+1} c_i = A_{n+1} + B_n = \frac{(6n+1) \times 4^{n+2}}{9} -$$

$$\frac{1}{(4n+3) \times 2^{2n+1}} + \frac{43}{18}.$$

$$(III) \text{ 证明: } d_n = 4n^2 + 4n - 1,$$

$$\text{因为 } \frac{1}{d_n} = \frac{1}{4n^2 + 4n - 1} < \frac{1}{4n^2 + 4n - 3} =$$

$$\frac{1}{(2n-1)(2n+3)} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+3} \right),$$

$$\text{所以 } \frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} + \dots + \frac{1}{d_n} < \frac{1}{4} \left[\left(1 - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{7} \right) + \right.$$

$$\left. \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{9} \right) + \dots + \left(\frac{1}{2n-3} - \frac{1}{2n+1} \right) + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+3} \right) \right]$$

$$= \frac{1}{4} \times \left(1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3} \right) < \frac{1}{3}.$$

$$\text{因为 } \frac{1}{d_n} = \frac{1}{4n^2 + 4n - 1} > \frac{1}{4n^2 + 4n} = \frac{1}{4n(n+1)} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right),$$

$$\text{所以 } \frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} + \dots + \frac{1}{d_n} > \frac{1}{4} \left[\left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \right] = \frac{1}{4} \times \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = \frac{n}{4(n+1)}.$$

$$\text{综上, } \frac{n}{4(n+1)} < \frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} + \dots + \frac{1}{d_n} < \frac{1}{3}.$$

$$20. (I) \text{ 解: 当 } a=1 \text{ 时, } f(x) = x \ln x - x^2 + 1, f(1)=0.$$

$$\text{因为 } f'(x) = \ln x + 1 - 2x, f'(1) = -1,$$

$$\text{所以 } f(x) \text{ 在 } (1, f(1)) \text{ 处的切线方程为 } y = -(x-1), \text{ 即 } x+y-1=0.$$

$$(II) \text{ 解: 注意到 } f(1)=0, f'(x) = \ln x + 1 - 2ax,$$

$$f'(1) = 1 - 2a.$$

$$\text{① 当 } 1-2a>0, \text{ 即 } a<\frac{1}{2} \text{ 时, 此时 } f'(1)>0,$$

$$\text{则 } \exists \delta>0, \text{ 使得当 } x \in (1, 1+\delta) \text{ 时, } f'(x)>0,$$

$$\text{即 } f(x) \text{ 在 } (1, 1+\delta) \text{ 上单调递增.}$$

$$\text{所以 } \forall x \in (1, 1+\delta), f(x) > f(1) = 0, \text{ 不符合题意;}$$

$$\text{② 当 } 1-2a \leq 0, \text{ 即 } a \geq \frac{1}{2} \text{ 时,}$$

$$\text{先证: 当 } x \geq 1 \text{ 时, } \ln x \leq x-1.$$

$$\text{令 } g(x) = \ln x - x + 1, \text{ 则 } g'(x) = \frac{1}{x} - 1 \leq 0,$$

$$\text{所以 } g(x) \text{ 在 } [1, +\infty) \text{ 上单调递减, } g(x) \leq g(1) = 0,$$

$$\text{即 } \ln x \leq x-1.$$

$$\text{因为 } f'(x) = \ln x + 1 - 2ax \leq x-1+1-2ax = (1-2a)x \leq 0,$$

$$\text{所以 } f(x) \text{ 在 } [1, +\infty) \text{ 上单调递减,}$$

$$f(x) \leq f(1) = 0, \text{ 符合题意.}$$

$$\text{综上, } a \text{ 的取值范围为 } \left[\frac{1}{2}, +\infty \right).$$

$$(III) \text{ 证明: 由 (II) 知, 当 } x \geq 1 \text{ 时,}$$

$$x \ln x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} \leq 0,$$

$$\text{即 } 2 \ln x \leq x - \frac{1}{x} \Leftrightarrow \ln x^2 \leq x - \frac{1}{x} \Leftrightarrow \ln x \leq \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow$$

$$\ln^2 x \leq \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right)^2 = x + \frac{1}{x} - 2.$$

$$\text{令 } x = \frac{2i+1}{2i-1} > 1,$$

$$\text{得 } \ln^2 \left(\frac{2i+1}{2i-1} \right) \leq \frac{2i+1}{2i-1} + \frac{2i-1}{2i+1} - 2 = \frac{2}{2i-1} - \frac{2}{2i+1}.$$

$$\text{所以 } \sum_{i=1}^n \ln^2 \frac{2i+1}{2i-1} \leq 2 \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{4n+1} \right) = 2 \left(1 - \frac{1}{4n+1} \right) < 2.$$