



试卷整体分析

本试卷分为第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分,共150分,考试用时120分钟。第

Ⅰ卷1至2页,第Ⅱ卷3至4页。

答卷前,考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上,并在规定位置粘贴考试用条形码。

答卷时,考生务必将答案涂写在答题卡上,答在试卷上的无效。考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

祝各位考生考试顺利!

第Ⅰ卷

注意事项:

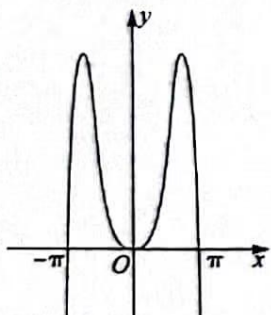
1. 每小题选出答案后,用铅笔将答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。
2. 本卷共9小题,每小题5分,共45分。

参考公式:

- 如果事件 A 与事件 B 互斥,那么 $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ 。
- 如果事件 A 与事件 B 相互独立,那么 $P(AB) = P(A)P(B)$ 。
- 棱柱的体积公式 $V = Sh$,其中 S 表示棱柱的底面面积, h 表示棱柱的高。
- 棱锥的体积公式 $V = \frac{1}{3}Sh$,其中 S 表示棱锥的底面面积, h 表示棱锥的高。

一. 选择题:在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $U = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$, $A = \{-1, 0, 2\}$, $B = \{0, 2, 4\}$, 则 $\complement_U(A \cup B) =$ ()
 (A) $\{-1, 0, 2, 4\}$ (B) $\{1, 3\}$
 (C) $\{0, 2\}$ (D) $\{-1, 1, 3, 4\}$
2. 设 $x \in \mathbb{R}$, 则“ $|x-2| < 2$ ”是“ $x^2 - 4x - 21 < 0$ ”的 ()
 (A) 充要条件 (B) 必要不充分条件
 (C) 充分不必要条件 (D) 既不充分也不必要条件
3. 已知 $f(x)$ 的大致图象如图所示, 则 $f(x)$ 的解析式可能是 ()



(A) $f(x) = x^3 \sin x$

(B) $f(x) = x^3 \cos x$

(C) $f(x) = x^3 \sin 2x$

(D) $f(x) = x^3 \sin \frac{x}{2}$

4. 设 $a = (\frac{1}{2})^{\frac{1}{3}}$, $b = \log_2 7$, $c = \log_{\sqrt{2}} 3$, 则 a, b, c 的大小关系为 ()

(A) $a < b < c$

(B) $a < c < b$

(C) $c < a < b$

(D) $c < b < a$

5. 某中学的“希望工程”募捐小组暑假期间走上街头进行了一次为期一周的募捐活动,他们第一天只得到了20元,之后积极采取措施,从第二天起,每一天收到的捐款都是前一天的两倍,这次募捐活动共收到捐款为 ()

(A) 1 270 元

(B) 2 560 元

(C) 1 280 元

(D) 2 540 元

6. 在三棱锥 $P-ABC$ 中, D 是棱 BC 的中点, 线段 PD 上的点 M 满足 $PM = \frac{2}{3}PD$, 则三棱锥 $P-ABM$ 和三棱锥 $P-ABC$ 的体积之比为 ()

(A) $\frac{1}{6}$

(B) $\frac{2}{3}$

(C) $\frac{1}{3}$

(D) $\frac{1}{4}$

7. 下列命题错误的是 ()

(A) 根据分类变量 x 与 y 的成对样本数据, 计算得到 $\chi^2 = 2.974$. 依据小概率值 $\alpha = 0.05$ 的 χ^2 独立性检验 ($\chi_{0.05}^2 = 3.841$), 可以认为变量 x 与 y 独立

(B) 已知一组数据 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 的平均数为 a , 另一组数据 $-2x_1+1, -2x_2+1, \dots, -2x_n+1$ 的平均数为 b , 则 ab 的最大值为 $\frac{1}{8}$

(C) 若随机变量 $X \sim N(1, \sigma^2)$, 且 $P(X > 3) = 0.3$, 则 $P(-1 < X < 3) = 0.4$

(D) 数据 0, 2, 3, 4, 7, 9, 11, 16, 20, 21 的第 60 百分位数是 9

8. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点分别是 $F_1(-5, 0)$, $F_2(5, 0)$, 以 F_1F_2 为直径的圆与双曲线 C 交于点 P , O 是坐标原点. 若 $\triangle OPF_2$ 的面积为 5, 则双曲线的方程为 ()

(A) $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{20} = 1$

(B) $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{5} = 1$

(C) $\frac{x^2}{15} - \frac{y^2}{10} = 1$

(D) $\frac{x^2}{10} - \frac{y^2}{15} = 1$

9. 已知函数 $f(x) = \cos(2\omega x - \frac{\pi}{3}) - 2\sin(\omega x + \frac{\pi}{4})\cos(\omega x + \frac{\pi}{4}) + 1 (\omega > 0)$, 当 $f(x_1)f(x_2) = 4$ 时,

$|x_1 - x_2|_{\min} = \pi$. 给出下列结论:

① $f(x)$ 的最小正周期是 π ;

② $f(x) - 1$ 是奇函数;

③ $f(x)$ 在区间 $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ 上单调递增;

④ 将 $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度, 再向下平移 1 个单位长度, 得到的函数图象对应的解

析式为 $g(x) = \sin 2x$.

其中正确结论的个数为 ()

(A) 1

(B) 2

(C) 3

(D) 4

第 II 卷

注意事项:

1. 用黑色墨水的钢笔或签字笔将答案写在答题卡上。
2. 本卷共 11 小题,共 105 分。

二. 填空题:本大题共 6 小题,每小题 5 分,共 30 分. 试题中包含两个空的,答对 1 个的给 3 分,全部答对的给 5 分.

10. 已知 i 是虚数单位,则复数 $\frac{2-i^2}{3+4i} =$ _____.

11. 在 $(2\sqrt{x} - \frac{1}{4x})^8$ 的展开式中, x 的系数为 _____.

12. 已知抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 和点 $M(-1, 1)$, 直线 $l: 2x - y - 2 = 0$ 与 C 交于 A, B 两点. 若 $MA \perp MB$, 则 p 的值为 _____.

13. 设某公司有甲、乙、丙三个车间生产同一种产品,甲、乙、丙三个车间的次品率依次为 5%, 4%, 6%, 加工出来的产品混放在一起. 已知甲、乙、丙三个车间加工的产品数分别占总数的 20%, 50%, 30%. 任取一个产品,则它是次品的概率为 _____; 如果取到的产品是次品,则它来自甲车间的概率为 _____.

14. 在等腰梯形 $ABCD$ 中, $AB = 3CD = 3$, $AD = 2$, AC 与 BD 相交于点 M . 记 $\overrightarrow{AB} = a$, $\overrightarrow{AD} = b$, 试用 a, b 表示 $\overrightarrow{AM} =$ _____; 若 N 是线段 BC 上的一点, 则 $\overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{BN}$ 的取值范围是 _____.

15. 设 $a \in \mathbb{R}$, 函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2(a-1)x + a^2 + 1, & x < a, \\ \sin(\pi x - \pi a), & x \geq a, \end{cases}$ 若函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 内恰

有 5 个零点, 则 a 的取值范围是 _____.

三. 解答题:本大题共 5 小题,共 75 分. 解答应写出文字说明,证明过程或演算步骤.

16. (本小题满分 14 分)

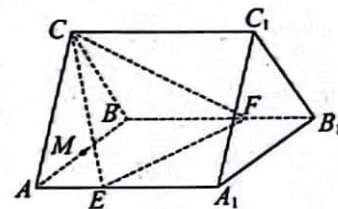
在 $\triangle ABC$ 中,角 A, B, C 所对的边分别是 a, b, c . 已知 $a = 5, b = 2\sqrt{3}, C = 30^\circ$.

- (I) 求 c 的值;
- (II) 求 $\sin B$ 的值;
- (III) 求 $\sin(A-B)$ 的值.

17. (本小题满分 15 分)

如图,在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $AA_1 = 3, AB = 2$. 点 M 是 AB 的中点,点 E, F 分别是棱 AA_1, BB_1 上的点,且 $\frac{A_1E}{AE} = \frac{BF}{B_1F} = 2$.

- (I) 求证: $CM \perp$ 平面 ABB_1A_1 ;
- (II) 求平面 ABB_1A_1 与平面 CEF 夹角的余弦值;
- (III) 求点 C_1 到平面 CEF 的距离.



18. (本小题满分 15 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 右顶点为 A , 长轴长为 4, 离心率为 $\frac{1}{2}$.

- (I) 求椭圆 C 的方程;
- (II) 过 F_1 的直线 l 与椭圆交于 M, N 两点 (M, N 不与点 A 重合), 直线 AM, AN 分别与 y 轴交于 P, Q 两点. 若 $S_{\triangle AMN} = S_{\triangle APQ}$, 求直线 l 的方程.

19. (本小题满分 15 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 为等差数列, $\{b_n\}$ 为公比大于 0 的等比数列, 且 $a_1 = b_1 = 2, a_4 = 2b_2, b_3 - b_2 = a_2$.

- (I) 求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(II) 记 $c_n = \begin{cases} a_n b_n, & n \text{ 为奇数}, \\ \frac{3a_n + 13}{(a_n - 1)(a_n + 3)b_{n+1}}, & n \text{ 为偶数}, \end{cases}$ 求 $\sum_{i=1}^{2n+1} c_i$;

(III) 记 $d_n = a_n^2 + 2a_n - 1$, 证明: $\frac{n}{4(n+1)} < \frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} + \dots + \frac{1}{d_n} < \frac{1}{3}$.

20. (本小题满分 16 分)

已知函数 $f(x) = x \ln x - ax^2 + a$.

- (I) 当 $a = 1$ 时, 求 $f(x)$ 在 $(1, f(1))$ 处的切线方程;
- (II) 当 $x \in [1, +\infty)$ 时, $f(x) \leq 0$ 恒成立, 求 a 的取值范围;
- (III) 求证: $\sum_{i=1}^{2n} \ln^2 \frac{2i+1}{2i-1} < 2$.



视频讲解



视频讲解